GENERALIZZAZIONE DI DUE TEOREMI

RIGUARDANTI LE PARENTESI D'ORDINE n . (*)

Nota del prof. M. L. Albeggiani, a Palermo.

(Seduta del 14 novembre 1886)

Nella seduta del 22 marzo 1885 ho annunziato di avere esteso i teoremi riguardanti le *parentesi di Poisson d'ordine n* comunicati al Circolo nella seduta del 21 dicembre 1884 (pag. 12 di questo volume) al caso $n = b + k$, $b \geq k$, cioè al caso in cui fossero date b serie di ν funzioni $y_{11}, \dots, y_{1\nu}; \dots; y_{b1}, \dots, y_{b\nu}$ e k serie di ν variabili indipendenti $x_{11}, \dots, x_{1\nu}; \dots; x_{k1}, \dots, x_{k\nu}$. Ecco ora come si può ottenere siffatta estensione.

Supposte da prima verificate le condizioni tutte indicate nella pagina 11 (V) sussiste la formula ivi trovata:

$$(1) \sum_{r=0}^{r=b+k} (-1)^{r+1} (\bar{H}_1 \dots \bar{H}_{b_{r-1}} F_{b_r} \bar{H}_{b_{r+1}} \dots \bar{H}_{b_{r-1}} F_{b_r} \bar{H}_{b_{r+1}} \dots \bar{H}_n) \\ + \sum \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(a_{11} \dots a_{1n})} (a_{11} \dots a_{1n}) = 0.$$

Si facciano ora le seguenti ipotesi:

1° che tutte le variabili vengano distinte in due classi cioè in b serie di ν variabili $y_{11}, \dots, y_{1\nu}; \dots; y_{b1}, \dots, y_{b\nu}$ ed in k serie di ν variabili $x_{11}, \dots, x_{1\nu}; \dots; x_{k1}, \dots, x_{k\nu}$, $b + k = n$;

2° che le n funzioni H riducansi a certe n delle variabili y , p. e., $H_1 \equiv y_{11}$;

(1) La presente Nota fa seguito ad un'altra, che sarà pubblicata a parte, intitolata: « *Sulle parentesi d'ordine n* », i cui risultati furono comunicati al Circolo nelle sedute del 29 maggio e 20 novembre 1884 (Vedi questi *Rendiconti*, t. I, pag. 6 e 9).

3° che le funzioni F non contengano le variabili y in modo esplicito di tal che sia :

$$y_{ii} = F_i(x_{i1}, \dots, x_{in}; \dots; x_{h1}, \dots, x_{hn}; a_1, \dots, a_p)$$

onde F_i si riduce identicamente ad y_{ii} quando per $a_1, \dots, a_p$ si sostituiscono le loro espressioni in funzione delle variabili x, y il che è quanto deve sempre intendersi operato ove y_{ii} si voglia differenziare completamente rispetto alle variabili per come viene indicato dai simboli $\overline{H}_i$ nel 1° membro della (1).

Allora, chiamando $P(y', F)$ una parentesi d'ordine n che si ottiene dalla parentesi $(F_1 \dots F_n)$ sostituendo ad r delle funzioni F , r variabili y , la (1) diventa :

$$(2) \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^{n-r+1} P(y', F) + \sum \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(a_{i1} \dots a_{in})} (a_{i1} \dots a_{in}) = 0.$$

Indichisi con

$$\frac{\partial(F^{m+p})}{\partial(x^m y^p)}$$

un determinante funzionale di $m + p$ funzioni F rispetto ad m variabili x ed a p variabili y , dopo {una formula trovata a pag. 10 (I) si ha indipendentemente dal segno :

$$P(y', F) \text{ equiv. } \frac{\partial(F^{n-r})}{\partial(x^r y^{n-r})},$$

onde, poichè le F sono esplicitamente indipendenti dalle y :

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^{n-r+1} P(y', F) \text{ equiv. } \sum_{r=0}^{r=n-1} (-1)^{n-r+1} \frac{\partial(F^{n-r})}{\partial(x^r y^{n-r})} \equiv 0.$$

Inoltre si ha pure :

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^{n-r+1} P(y', F) \equiv 0.$$

Infatti le serie di variabili y essendo di numero b per $r > b$ la parentesi $P(y^r, F)$ conterrà necessariamente almeno due elementi y appartenenti alla stessa serie e perciò aventi numeri d'ordine diverso, onde (pag. 10, III) sarà $P \equiv 0$. Dopo ciò nella prima somma al primo membro della (2) resta solo il termine relativo ad $r = b$ e si ha:

$$(3) \quad (-1)^{b+1} P(y^b, F) + \sum \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})} (a_{i_1} \dots a_{i_n}) = 0.$$

Il simbolo $P(y^b, F)$ indica che nella parentesi $(F_1 \dots F_n)$ in luogo di b funzioni F si sono sostituite b delle n variabili y a cui si sono ridotte le n funzioni H , nel fare quindi tale sostituzione occorre combinare ad b ad b le n funzioni F , di talchè il simbolo $P(y^b, F)$ può dar luogo in generale ad una somma di parentesi nelle quali b delle n variabili y sudette trovinsi scritte in luogo di altrettante funzioni F : però, conforme al modo come si son poste le H identiche alle y , occorre distinguere diversi casi, e prima di ogni altro, qualunque sia b , ove al più $b - 1$ funzioni H siansi poste identiche a certe $b - 1$ variabili y dello stesso ordine, mentre le rimanenti funzioni H si son fatte identiche a delle y , d'ordine diverso, è $P(y^b, F) \equiv 0$, quindi la (3) si riduce alla

$$(4) \quad \sum \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})} (a_{i_1} \dots a_{i_n}) = 0.$$

Di poi possono ancora aver luogo i seguenti casi:

I. Se $b > k$, ponendo certe b funzioni H identiche rispettivamente alle $y_{i_1}, \dots, y_{i_b}$ e le rimanenti k funzioni H identiche a certe altre delle variabili y dello stesso ordine o no, il simbolo $P(y^b, F)$ dà luogo ad una sola parentesi, derivata dalla $(F_1 \dots F_n)$ nella quale b funzioni F , corrispondenti a quelle delle H che si son poste identiche alle $y_{i_1}, \dots, y_{i_b}$, si sono sostituite per b variabili y appartenenti allo stesso ordine ed a serie diverse, indicheremo tale parentesi col simbolo $P(y_{i_1}^b, F)$.

II. Se $b = k$, allora si possono certe b funzioni H porre identiche a certe $y_{i_1}, \dots, y_{i_b}$ e le rimanenti funzioni H porre identiche a certe altre delle variabili y non tutte dello stesso ordine, o a certe al-

tre delle variabili y tutte dello stesso ordine come $y_{1j}, \dots, y_{hj}$, nel primo caso si ottiene soltanto la parentesi:

$$P(y_{*i}^h, F),$$

nel secondo la somma delle parentesi:

$$P(y_{*i}^h, F_j) + P(y_{*j}^h, F_i).$$

III. Se $b < k$ sarà $k = bq + r$, allora:

α) Certe b funzioni H sono poste identiche alle $y_{1i}, \dots, y_{bi}$ e le rimanenti k funzioni H a certe k delle variabili y fra le quali se ne contengono al più $b - 1$ dello stesso ordine, in tal caso dal simbolo $P(y^h, F)$ si ottiene soltanto la parentesi:

$$P(y_{*i}^h, F).$$

β) Certe b funzioni H sono poste identiche alle $y_{1i}, \dots, y_{bi}$ e le rimanenti k funzioni H sono distribuite in t gruppi di b funzioni ciascuno, ponendo le funzioni di ogni gruppo identiche a certe b delle variabili y tutte dello stesso ordine come $y_{1i}, \dots, y_{bi}$ e le rimanenti $k - tb$ funzioni H identiche a certe delle variabili y fra le quali se ne contengono al più $b - 1$ dello stesso ordine, allora, potendo t avere i valori $1, 2, \dots, q$, dal simbolo $P(y^h, F)$ ottengonsi nei vari casi le seguenti somme:

$$\text{per } t = 1, \quad P(y_{*i}^h, F_{1i}) + P(y_{*1}^h, F_i)$$

$$\text{per } t = 2, \quad P(y_{*i}^h, F_{1i_2}) + P(y_{*1}^h, F_{2i_1}) + P(y_{*2}^h, F_{1i_1})$$

.

$$\text{per } t = q, \quad P(y_{*i}^h, F_{1i} \dots i_q) + P(y_{*1}^h, F_{1_2} \dots i_q) + \dots + P(y_{*iq}^h, F_{1i_1} \dots i_{q-1}).$$

È da osservare che il caso II rientra nel caso III ove si supponga $q = 1, r = 0$.

Si può quindi porre in generale :

$$P(y^i, F) = \sum_{i=0}^{i-1} P(y_{i+1}^i, F) \quad (i_0 \equiv i).$$

Ma si è trovato :

$$P(y_{i+1}^i, F) \text{ equiv. } \frac{\partial(F^i)}{\partial(x_{i+1}^i)}$$

onde :

$$\sum_{i=0}^{i-1} P(y_{i+1}^i, F) \text{ equiv. } \sum_{i=0}^{i-1} \frac{\partial(F^i)}{\partial(x_{i+1}^i)} \equiv D_i \left(\frac{F^i}{x^i} \right) = D_i \left(\frac{y^i}{x^i} \right), (D_0 \equiv D)$$

ove si indichi con D_i la somma algebrica di $i + 1$ determinanti funzionali.

E però la (3) si può scrivere :

$$(5) \quad (-1)^{i+1} D_i \left(\frac{y^i}{x^i} \right) + \sum \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(a_1 \dots a_n)} (a_1 \dots a_n) = 0.$$

Siano ora date $h\nu$ equazioni distinte e non contraddittorie :

$$(6) \quad H_1 = a_1, \dots, H_{h\nu} = a_{h\nu}$$

i cui secondi membri sono costanti qualunque ed i cui primi membri sono funzioni delle $y_1, \dots, y_{h\nu}; x_1, \dots, x_{h\nu}$, risolvendo le equazioni (6) per le y si trova :

$$(7) \quad y_{ii} = F_{ii}(x_{i1}, \dots, x_{i\nu}; \dots; x_{h1}, \dots, x_{h\nu}; a_1, \dots, a_{h\nu}),$$

le quali relazioni sono di numero $h\nu$ ed in esse le funzioni F_{ii} , come prima le F_i , sono tali che sostituendovi per $a_1, \dots, a_{h\nu}$ le loro espressioni in funzione delle x, y date dalle (6), riduconsi identicamente ad y_{ii} . Combinando le (7) n ad n , per ogni sistema delle y ha luogo una relazione della forma della (3), nella quale invece della parentesi $(a_1 \dots a_n)$ si può, in causa delle (6), porre $(H_1 \dots H_n)$.

Facciamo corrispondere alla serie degl'indici :

$$11, \dots, 1\nu; \dots; h1, \dots, h\nu$$

la serie dei numeri :

$$1, 2, \dots, h\nu$$

ed eseguiamo le menzionate combinazioni in modo ordinato cioè in modo che i diversi gruppi siano scritti con i primi individui in ordine crescente, pur potendo ognuno di questi essere ripetuto, che, per lo stesso primo individuo, i secondi siano scritti in ordine crescente, che, per lo stesso gruppo formato dai due primi, siano in ordine crescente i terzi individui ecc. ecc.

Indicando i gruppi di combinazioni così formati con un numero d'ordine, $F_{i_1 i_1}, \dots, F_{i_n i_n}$ rappresentano n funzioni F appartenenti all' i^{mo} gruppo, e $P_i(y^h, F)$ rappresenta la parentesi P relativa all'equazione dell' i^{mo} gruppo, conveniamo inoltre di comprendere il segno $(-1)^{h+1}$ nel simbolo P_i , ponendo $\binom{h\nu}{n} = \pi$ si ha il sistema di equazioni :

$$(8) \quad P_i(y^h, F) + \sum_{r=1}^{\pi} \frac{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})} (H_{r_1} \dots H_{r_n}) = 0 \quad j=1, 2, \dots, \pi.$$

Nei primi membri di queste equazioni alcune delle P possono essere identicamente nulle, altre sono equivalenti a $D_i \left(\frac{y^k}{x^k} \right)$.

Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ funzioni delle $F_{11}, \dots, F_{h\nu}$ e queste funzioni delle $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ si ha :

$$\frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_n)}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})} = \sum_{r=1}^{\pi} \frac{\partial(\varphi_1 \dots \varphi_n)}{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})} \cdot \frac{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})}$$

ponendo $\varphi_k \equiv a_{i_k}$ o $\varphi_k \equiv a_{i_k}$ poichè il gruppo $a_{i_1} \dots a_{i_n}$ che è l' j^{mo} gruppo combinazione della classe n delle $a_{11}, \dots, a_{h\nu}$, differisce almeno per un elemento dell' i^{mo} gruppo $a_{i_1} \dots a_{i_n}$, si trova :

$$(9) \quad \sum_{r=1}^{\pi} \frac{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})}{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})} \cdot \frac{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})} = 1$$

$$\sum_{r=1}^{\pi} \frac{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})}{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})} \cdot \frac{\partial(F_{r_1 i_1} \dots F_{r_n i_n})}{\partial(a_{i_1} \dots a_{i_n})} = 0.$$

Al sistema (8) per mezzo delle (9), tenendo presenti le (7), si può sostituire il sistema :

$$(10) \quad (H_{i_1} \dots H_{i_n}) + \sum_{i=1}^{\pi} \frac{\partial(H_{i_1} \dots H_{i_n})}{\partial(y_{i_1 i_1} \dots y_{i_n i_n})} P_i(y^j, F) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \pi.$$

Il determinante di questo sistema (10) è :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(H_{i_1} \dots H_{i_n})}{\partial(y_{i_1 i_1} \dots y_{i_n i_n})} & \dots & \frac{\partial(H_{i_1} \dots H_{i_n})}{\partial(y_{\pi_1 i_1} \dots y_{\pi_n i_n})} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial(H_{\pi_1} \dots H_{\pi_n})}{\partial(y_{i_1 i_1} \dots y_{i_n i_n})} & \dots & \frac{\partial(H_{\pi_1} \dots H_{\pi_n})}{\partial(y_{\pi_1 i_1} \dots y_{\pi_n i_n})} \end{vmatrix}$$

esso è evidentemente formato con tutti i minori d'ordine n del determinante :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial y_{i_1}} & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial y_{i_n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial H_{i_n}}{\partial y_{i_1}} & \dots & \frac{\partial H_{i_n}}{\partial y_{i_n}} \end{vmatrix};$$

lo indicheremo con $^{(n)}\Delta_\pi$ impiegando una notazione già adottata da Brioschi. Se si indica per :

$$co \frac{\partial(H_{i_1} \dots H_{i_n})}{\partial(y_{i_1 i_1} \dots y_{i_n i_n})}$$

il minore complementare di $\frac{\partial(H_{i_1} \dots H_{i_n})}{\partial(y_{i_1 i_1} \dots y_{i_n i_n})}$ ottenuto dal determi-

nante Δ e si indica con $^{(n-n)}\Delta_\pi$ il determinante d'ordine π costituito dai elementi, si sa che :

$$^{(n)}\Delta_\pi = \Delta^{(i^{n-1})}, \quad ^{(n-n)}\Delta_\pi = \Delta^{(i^{n-1})}, \quad ^{(n)}\Delta_\pi \quad ^{(n-n)}\Delta_\pi = \Delta^\pi \quad (*)$$

(*) Cfr. Scott: *Theory of Determinants*.

Denotando per N_i ciò che si trova col sostituire agli elementi dell' i^{ma} colonna del determinante $^{(n)}\Delta_\pi$ le parentesi

$$(H_{i1_i} \dots H_{i1_n}), \dots, (H_{i\pi_{i1}} \dots H_{i\pi_{in}}),$$

la soluzione del sistema (10) conduce al sistema di equazioni:

$$P_i(y^b, F) + \frac{N_i}{^{(n)}\Delta_\pi} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \pi$$

ovvero:

$$(11) \quad P_i(y^b, F) + \frac{N_i^{(b^{(n)}-n)}\Delta_\pi}{\Delta^\pi} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \pi.$$

Si formi il prodotto dei determinanti N_i , $^{(b^{(n)}-n)}\Delta_\pi$ per colonne costituendo con i prodotti ottenuti le righe del determinante prodotto, tenendo presente il teorema di Laplace, si ha:

$$\sum_{r=1}^{r=n-\pi} \frac{\partial(H_{r1_i} \dots H_{r1_n})}{\partial(y_{r1_i1_i} \dots y_{r1_in})} \cdot \text{co} \frac{\partial(H_{r1_i} \dots H_{r1_n})}{\partial(y_{r1_i1_i} \dots y_{r1_in})} = \Delta,$$

$$\sum_{r=1}^{r=n-\pi} \frac{\partial(H_{r1_i} \dots H_{r1_n})}{\partial(y_{r1_i1_i} \dots y_{r1_in})} \cdot \text{co} \frac{\partial(H_{r1_i} \dots H_{r1_n})}{\partial(y_{r1_i1_i} \dots y_{r1_in})} = 0$$

e ponendo inoltre:

$$\sum_{r=1}^{r=n-\pi} (H_{r1_i} \dots H_{r1_n}) \cdot \text{co} \frac{\partial(H_{r1_i} \dots H_{r1_n})}{\partial(y_{r1_i1_i} \dots y_{r1_in})} = I_\lambda$$

si trova:

$$N_i^{(b^{(n)}-n)}\Delta_\pi = \left| \begin{array}{cccccc|cccc} \Delta & 0 & 0 & \dots & 0 & I_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & \dots & 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta & I_{\pi-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{\pi-1} & \Delta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_\pi & 0 & \dots & 0 & \Delta \end{array} \right| = I_1 \cdot \Delta^{\pi-1}.$$

E però il sistema (11) diventa :

$$(12) \quad \Delta \cdot P_i(y^h, F) + I_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \pi,$$

onde si ha il teorema:

Siano date le $h\nu$ equazioni:

$$(a) \quad H_1 = a_1, \dots, H_{h\nu} = a_{h\nu}$$

i cui secondi membri sono costanti qualunque ed i cui primi membri sono funzioni delle $y_{11}, \dots, y_{h\nu}; x_{11}, \dots, x_{h\nu}$, e siano le equazioni (a) tali che da esse si possano determinare le $y_{11}, \dots, y_{h\nu}$ in funzione delle $x_{11}, \dots, x_{h\nu}$ e delle costanti $a_1, \dots, a_{h\nu}$ cioè siano tali che abbiasi $\Delta \geq 0$ allora :

1° Se i primi membri delle (a) soddisfano identicamente a tutte le equazioni:

$$(b) \quad (H_{i_1} \dots H_{i_n}) = 0,$$

che si ottengono combinando n ad n le funzioni H date, saranno nulle tutte le I_i , onde si conclude dalle equazioni (12), poichè $\Delta \geq 0$, che i valori delle y trovati dalle equazioni (a) soddisfano a tutte le equazioni :

$$(c) \quad P_i(y^h, F) = 0,$$

ovvero rispettivamente :

nel caso I) al sistema di equazioni differenziali parziali del 1° ordine monomie :

$$(c') \quad D \left(\frac{y^h}{x^h} \right) = 0,$$

nel caso II) al sistema di equazioni differenziali parziali del 1° ordine monomie e binomie :

$$(c'') \quad D \left(\frac{y^h}{x^h} \right) = 0, \quad D_1 \left(\frac{y^h}{x^h} \right) = 0,$$

nel caso III) al sistema di equazioni differenziali parziali del 1° ordine monomie, binomie, ... $q + 1$ -nomie

$$(c''') \quad D \left(\frac{y^k}{x^k} \right) = 0, \quad D_1 \left(\frac{y^k}{x^k} \right) = 0, \quad \dots, \quad D_i \left(\frac{y^k}{x^k} \right) = 0.$$

2° Se i valori delle y tratti dalle (a) soddisfano, in ciascuno dei menzionati tre casi, ai sistemi di equazioni differenziali (c') o (c'') o (c'''), e in generale a tutte le equazioni (c), sono i prodotti $\Delta \cdot P_i(y^k, F)$ tutti nulli, e però si riduce il sistema di equazioni (12) al sistema :

$$(13) \quad I_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \pi$$

che è lineare omogeneo nelle (b) ed il cui determinante $^{(h\nu-n)}\Delta_\pi$, in virtù della ipotesi $\Delta \geq 0$, è pur esso diverso da zero, onde i primi membri delle (a) soddisfano identicamente alle (b).

Siano ora date certe funzioni $G_1, \dots, G_{h\nu}$, delle $y_{11}, \dots, y_{h\nu}$; $x_{11}, \dots, x_{h\nu}$; $a_1, \dots, a_{h\nu}$ e suppongasi che le equazioni

$$(g) \quad G_1 = 0, \dots, G_{h\nu} = 0$$

siano tali da permettere di determinare le a in funzione delle x, y di talchè si abbia :

$$(b) \quad a_1 = H_1, \dots, a_{h\nu} = H_{h\nu},$$

allora è certo che sostituendo queste espressioni delle a nei primi membri delle (g) queste si mutano in altrettante identità, onde, tenuta presente la (1), si trova :

$$(14) \quad (-1)^n P_j(G^n) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial (G_{\lambda_1} \dots G_{\lambda_n})}{\partial (a_{i_1} \dots a_{i_n})} P_i(H^n) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \pi$$

ove si è posto :

$$\begin{aligned} -(G_{\lambda_1} \dots G_{\lambda_n}) &\equiv P_j(G^n) \\ (H_{i_1} \dots H_{i_n}) &\equiv P_i(H^n). \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial a_{h\nu}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_{h\nu}}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial G_{h\nu}}{\partial a_{h\nu}} \end{vmatrix}$$

e tenendo presente il significato delle notazioni sopra adottate si ponga inoltre :

$$\sum_{r=1}^{r=n} P_r(G^*) \cdot \text{co} \frac{\partial (G_{r1} \dots G_{rh_n})}{\partial (a_{11} \dots a_{1h_n})} = K_1,$$

allora dalle (14) si trova :

$$(15) \quad (-1)^n D \cdot P_1(H^*) + K_1 = 0.$$

Poichè, come fu detto, sostituendo nelle (g) le a date dalle (h) si ottengono altrettante identità, indicando per $\left(\frac{\partial G_r}{\partial y_{11}}\right)$ il quoziente differenziale completo di G_r rispetto ad y_{11} , si trova :

$$\left(\frac{\partial G_r}{\partial y_{11}}\right) = 0,$$

cioè

$$\frac{\partial G_r}{\partial y_{11}} + \sum \frac{\partial G_r}{\partial a_m} \cdot \frac{\partial H_m}{\partial y_{11}} = 0,$$

onde posto :

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_{11}} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_{h\nu}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_{h\nu}}{\partial y_{11}} & \dots & \frac{\partial G_{h\nu}}{\partial y_{h\nu}} \end{vmatrix}$$

si ha :

$$\nabla = (-1)^n D \cdot \Delta$$

ove Δ è il determinante sopra menzionato; allora la (15) può prendere la forma :

$$(16) \quad \nabla \cdot P_1(H^*) + \Delta K_1 = 0.$$

Onde se $\nabla \geq 0$, e però anche $D \geq 0$ $\Delta \geq 0$, segue:

1° Se i primi membri delle (g) soddisfano identicamente a tutte le

$$P_i(G'') = 0$$

che si ottengono combinando n ad n le funzioni G , saranno nulle tutte le

$$P_i(H'')$$

e però, dopo quanto sopra fu dimostrato, i valori delle y tratte dalle (g) soddisfano alle equazioni differenziali di 1° ordine (c).

2° Viceversa se i valori delle y tratti dalle (g) soddisfano a tutte le equazioni differenziali (c), saranno soddisfatte tutte le relazioni

$$P_i(H'') = 0$$

e però i primi membri delle (g) soddisfaranno identicamente alle

$$P_i(G'') = 0.$$

Così, p. es., se dalle equazioni:

$$(a) \quad H_1 = a_1, \dots, H_{h\nu} = a_{h\nu}$$

si ricavano le

$$y_{ii} = F_{ii}(x_{1i}, \dots, x_{kv}; a_1, \dots, a_{h\nu})$$

queste si possono scrivere:

$$G_r \equiv y_{ii} - F_{ii} = 0,$$

quindi se i primi membri delle (a) soddisfano identicamente alle

$$(H_{u_1} \dots H_{u_n}) = 0,$$

saranno ancora soddisfatte le

$$(y_{u_1'1} - F_{u_1'1}, \dots, y_{u_n'n} - F_{u_n'n}) = 0$$

e viceversa.

Per $h = k = 1$ i precedenti teoremi coincidono con quelli che riguardano le condizioni d'integrabilità di una o di più equazioni differenziali parziali del 1° ordine (*).

(*) Cfr. in particolare: MANSION: *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1875; IMSCHENETSKY: *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, traduit du russe par HOÜEL, Paris, Greifswald, 1869. Quest'ultima monografia fu pubblicata nell'*Archiv der Mathematik und Physik* di GRUNERT, t. LIV.

La condizione analoga a quelle indicate nel testo con $\Delta \geq 0 \quad \nabla \geq 0$ si trova menzionata per la prima volta nell'interessante nota del signor MAYER: *Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function* (*Math. Ann.*, t. IV, pp. 88-94).