SULLA ISTERESI MAGNETICA.

DI ELENA MARINI.

§ 1. In due note, pubblicate nei *Rendiconti dell' Accademia dei Lincei* del 1° semestre 1908, il Prof. U. Cisotti sviluppa una sua teoria sopra l'isteresi magnetica di fili metallici.

L'Autore parte dalle equazioni poste dal Duhem per esprimere il magnetismo y indotto in un corpo non dolce da un campo di intensità x ,

$$\begin{cases} dx = g(y) dy + f(x, y) dy \\ dx = g(y) dy - f(x, y) dy \end{cases}$$

modificate dalla posizione:

$$g(y) = k$$

e semplificate dalla condizione di simmetria:

$$f(x, y) = -f(-x, -y).$$

Le equazioni fondamentali ottenute così:

$$(1) \quad \begin{cases} dx = k dy + f(x, y) dy \\ dx = k dy - f(x, y) dy \end{cases}$$

si trasformano ancora, per la ipotesi del Cisotti, posta in prima approssimazione:

$$f(x, y) = x \varphi'(y),$$

nelle (2):

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d x}{d y} = k + x \varphi' \\ \frac{d x}{d y} = k - x \varphi' . \end{cases}$$

Queste equazioni conducono ¹⁾ al risultato:

$$(3) \quad \begin{cases} x_a = \frac{1}{k} \psi'(y) [F - \psi(-y)] \\ x_d = \frac{1}{k} \psi'(-y) [\psi(y) - F] \end{cases}$$

dove x_a , x_d sono le due ascisse corrispondenti ad un unico valore di y , e ψ è definita dalle relazioni:

$$\psi'(y) = k e^{\psi} \quad \psi(0) = 0 .$$

Le due equazioni (3) rappresenterebbero analiticamente, l'una il ramo ascendente, l'altra il ramo discendente di un ciclo d'isteresi simmetrico.

Esse danno per $y = 0$, $x = \pm F =$ forza coercitiva,
e per $x = 0$, $F = \psi(y) = \psi(r)$ essendo r il magnetismo residuo.

Ciò dà modo all'Autore di determinare la forma della $\psi(y)$, cercandola nel caso particolare di $y = r$, ossia ricavando sperimentalmente la curva $F = \psi(r)$ e scrivendone poi l'equazione, empiricamente. E infatti, basandosi sopra i lavori sperimentali dell'Ewing e del Lorrain, il Cisotti assimila questa curva ad una iperbole equilatera, e pone:

$$(4) \quad F = \frac{b r}{a + r}$$

¹⁾ Vedi lavoro già citato.

con a , b costanti positive, che si possono ricavare dalla (4) stessa, introducendo in essa i valori corrispondenti F_i , r_i , ottenuti nelle esperienze.

Posto così:

$$\psi(y) = \frac{b y}{a + y}$$

rimangono completamente determinate tutte le funzioni che compaiono nelle (3) e quindi le x_a e x_d di qualunque ciclo d'isteresi la cui F sia contenuta entro i limiti di validità di questa teoria: limiti che risultano da considerazioni geometriche sulle curve stesse:

$$\frac{b}{3} \leq F \leq \frac{b}{2} .$$

La teoria porterebbe così al *risultato generale della dipendenza dello stato di magnetizzazione di un corpo da due sole costanti positive*, inerenti alla natura del corpo stesso.

Nel presente lavoro mi sono proposta di verificare questa teoria, seguendo esattamente la via indicata dall'Autore.

Lo studio sperimentale, fatto su più campioni, fu tale da darmi numerosissimi valori corrispondenti F_i , r_i , in un campo abbastanza esteso, e da offrire in un ultimo, come si vedrà, un confronto diretto tra risultati teorici e risultati sperimentali.

§ 2. — Per descrivere sperimentalmente i cicli d'isteresi, ho seguito il *metodo magnetometrico*. Lo schema seguente mostra la disposizione degli apparecchi.

Fig: I

M N magnetometro

B_1 = bobina magnetizzante

B_2 = » compensatrice

T = commutatore

I = milliamperometro

AB = resistenza variabile

C = contatto scorrevole

R, R' reostati ordinari.

Come appare dallo schema, alla posizione $C \equiv A$ corrispondeva una tensione nulla nel circuito delle bobine e quindi una forza magnetizzante zero; a quella $C \equiv B$, una forza magnetizzante massima: il graduale percorso A, B, A, dava un semiciclo d'isteresi: un percorso doppio, con inversione della corrente nel secondo ritorno di C in A, un ciclo intero.

Ho eliminato l'azione del campo magnetico terrestre sul filo metallico immerso nella bobina B_1 , con un'opportuna scelta dei campi magnetici estremi. Ho misurato il magnetismo indotto secondo le deviazioni dell'ago magnetometrico, lette con cannocchiale e scala. Ho espresso così le x (campi) in unità di corrente (milliampères), le y (magnetismi indotti) in unità di lunghezza (centimetri). La sensibilità del magnetometro è stata sempre la stessa per tutta la durata delle esperienze.

§ 3. — Dal disegno dei cicli, descritti sperimentalmente in senso ascendente, ho ricavato per ciascun filo sperimentato le F_i , r_i che appaiono nei seguenti specchietti (Fig. II, curve sperimentali).

Primo filo di ferro		Secondo filo di ferro		Filo di acciaio	
F	r	F	r	F	r
2,1	0,25	2,4	0,12	3,5	0,05
2,75	0,35	4,5	0,3	17,5	0,72
3,25	0,4	7	0,57	25	1,2
3,50	0,5	7	0,65	40	3,6
4,25	0,75	9	1,08	45,2	5,4
5	0,95	11	1,32	48	6,8

Primo filo di ferro		Secondo filo di ferro		Filo di acciaio	
F	r	r	F	F	r
5,75	1,3	11,2	1,58	49,2	8
7	2,1	12,6	1,85	50,6	8,8
8,3	2,6	13,6	2,15	51,5	9,4
10,30	4,4	15,5	2,96	51,7	9,92
11,2	5,7	20,5	4,9	52,4	10,85
12,3	7,55	23,8	7,72	52,9	11,35
12,6	7,95	25,35	9,58	53,5	12,38
13,1	10,4	27,2	12,92	54	12,8
13,6	13,3	27,66	15,38	54,8	13,40
13,85	14,35	28,55	16,9	55	14,02
14,2	15,56	29,37	19,82	55,5	14,43
14,4	15,82	29,5	20,97	55,75	15,27
14,7	16,53	29,8	22,05	57,32	16,37
15	16,15	30,2	23,6	57,9	17,36
15,2	16,41	30,85	25,02	59	17,88
15,4	16,98	31,3	26,04	59,8	18,65
15,55	17,49	32	28,92	60,1	19,22
15,75	18,06	32,78	31,18	60,7	19,96
15,85	19,86	33,2	32,65	61,3	20,40
15,95	20,36	34	33,81	61,5	21,05
16,2	20,78	34,5	34,67	61,7	21,34
16,05	21,51	34,82	35,58		
16	21,67	35,4	35,9		
16,32	22,08	35,6	37		
16,37	22,32				
16,55	22,52				
16,65	23,15				
16,75	23,11				
16,86	23,51				
16,95	23,48				
16,92	23,78				
16,8	23,69				
17,02	24,07				
17,1	24,14				
17,3	24,48				
17,45	25,12				
17,75	26,39				
17,9	27,17				
18	27,63				

Calcolate, col metodo dei minimi quadrati, le due costanti a , b , partendo da parecchi punti sperimentali F ; r_i , ho ottenuto :

$$\begin{array}{lll} \text{I}^\circ \text{ filo di ferro} \left\{ \begin{array}{l} a=3 \\ b=19,22 \end{array} \right. & \text{II}^\circ \text{ filo di ferro} \left\{ \begin{array}{l} a=3,97 \\ b=38,23 \end{array} \right. & \text{filo di acciaio} \left\{ \begin{array}{l} a=2,36 \\ b=67,88 \end{array} \right. \end{array}$$

Questi valori, introdotti nella (4) danno, per ogni singolo campione, la iperbole della figura II; e introdotti nelle espressioni analitiche delle $\phi(y)$; $\phi(-y)$; $\psi(y)$; $\psi(-y)$, permettono di ricavare poi le x_a e x_d di un ciclo d'isteresi di determinata F .

Primo filo di ferro.

y	$\phi(y)$	$\frac{1}{k} \phi'(y)$	$-\phi(-y)$	$-\frac{1}{k} \phi'(-y)$
0	0	1	0	1
1	4,795	0,563	8,744	1,775
2	7,674	0,360	23,164	2,772
3	9,598	0,251	44,612	3,988
4	10,968	0,184	74,63	5,429
6	12,8	0,111	165,7	8,97

Secondo filo di ferro.

0	0	1	0	1
0,5	4,273	0,789	5,44	1,267
1	7,686	0,638	12,24	1,56
2	12,8	0,442	30,55	2,26
2,5	14,764	0,377	42,35	2,654
3	16,44	0,325	56,145	3,08
4	19,18	0,248	90,2	4,026
5	20,303	0,196	134	5,098

Filo di acciaio.

y	$\psi(y)$	$\frac{1}{k} \psi'(y)$	$-\psi(-y)$	$\frac{1}{k} \psi'(-y)$
0	0	1	0	1
1	21,09	0,493	42,715	2,027
1,5	27,55	0,374	76,274	2,674
2	32,52	0,293	119,93	3,412
2,5	36,46	0,236	174,9	4,24
3	40,185	0,199	232,35	5,027

I cicli teorici seguenti (disegnati nella fig. III) corrispondono a forze coercitive contenute nei limiti della teoria, ed uguali a quelle di cicli già ottenuti sperimentalmente.

Primo filo di ferro.

$$6,4 \leq F \leq 9,6$$

$F = 7$			$F = 8,3$		
y	x_a	x_d	y	x_a	x_d
0	7	— 7	0	8,3	— 8,3
1	8,87	— 3,91	1	9,6	— 6,22
2	10,88	+ 1,87	2	11,35	— 1,74
3	12,94	10,36	3	13,27	+ 5,18
4	15,03	21,54	4	15,27	14,48
			6	19,40	40,37

Secondo filo di ferro

$$12,74 \leq F \leq 19,11$$

$F = 13,6$			$F = 15,5$		
y	x_a	x_d	y	x_a	x_d
0	13,6	— 13,6	0	15,5	— 15,5
0,5	15,02	— 11,82	0,5	16,52	— 14,23
1	16,5	— 9,26	1	17,71	— 12,24
2	19,69	— 1,81	2	20,37	— 6,10
2,5	21,09	3,089	2,5	21,8	— 1,95
3	22,64	8,75	3	23,26	+ 2,9
4	25,2	22,47	4	26,25	14,82
5	28,95	39,27	5	29,32	29,59

Filo di acciaio

$$22,62 \leq F \leq 33,94$$

$$F = 25$$

y	x_a	x_d
0	25	— 25
1	33,39	— 7,93
1,5	37,88	6,82
2	42,48	25,65
2,5	47,15	48,58
3	51,2	76,3

§ 4. — Il confronto dei cicli teorici con quelli sperimentali si può fare sopra la fig. III: non si può negare che i cicli teorici siano prossimi a quelli sperimentali; ma non sono coincidenti con questi. In quanto alle curve $\psi(r) = \frac{b}{a+r}$ (fig. II) esse non coincidono davvero con le $\psi(r)$ sperimentali, almeno per un buon tratto: è vero che nell'intervallo $\frac{b}{2}, \frac{b}{3}$ le iperboli sono molto vicine alle curve sperimentali, ma è anche vero che tale intervallo è troppo piccolo per dedurre qualche conclusione utile, e ch'esso *varia insieme alle costanti* col variare dei valori F_i, r_i adoperati per ricavare le a, b ; come risulta da un secondo calcolo fatto sul filo di acciaio, per il quale

$$a' = 0,781$$

$$b' = 47,93 .$$

D'altra parte, sembra che coll'aumentare del campo, le curve $\psi(r)$ acquistino un andamento tutt'altro che iperbolico: viene a mancare così il risultato più saliente della teoria del Cisotti, secondo il quale « le proprietà magnetiche di un corpo sarebbero definite dalle due costanti a, b ».

La stessa teoria si presta poi anche ad altre obiezioni, alcune delle quali sono del tutto generali e indipendenti dall'ipotesi speciale della forma analitica attribuita alla $\psi(r)$.

§ 5: — I) OBBIEZIONE GENERALE. — $\frac{dx}{dy}$ è nella teoria del Duhem, funzione solo dei valori attuali di x e di y .

Ora, anche nei casi di raggiunto regime per ciclizzazione tra estremi simmetrici l'ipotesi suppone in fondo che per ogni punto del piano passi un ciclo ed uno solo. Il che non è.

II) Sulla natura della $f(x, y)$ — Porre:

$$\frac{dx}{dy} = k \pm f(x, y)$$

di cui il $\pm$ vale per esempio per i cicli ascendenti, significa che la tangente nel punto $x y$ al ciclo che passa per quel punto, (supposto unico il ciclo, v. s.) ha una orientazione che dipende solo da x e da y . Volendo precisare questa dipendenza, non ha alcun senso dire che x è piccola e y è grande, poichè potrebbero esse comparire nella funzione in modo tale da compensare la piccolezza numerica di x e y .

È dall'esperienza che occorre partire per fare delle congetture sulla natura della f , osservando come varia l'orientazione della tangente ai cicli quando variano x e y .

Porre perciò :

$$f(x, y) = x \varphi' \quad (\text{come fa il Cisotti})$$

dove φ' è solo funzione di y , potrà essere una posizione legittima *a posteriori*, ma non è per nulla giustificata dalle considerazioni cui ricorre l'Autore; occorre invece tener presente il significato fisico della funzione f , che si può considerare connessa con lo scarto dal valore medio della permeabilità nei diversi punti del piano.

La posizione fatta :

$$\frac{dx}{dy} = k \pm x \varphi'(y)$$

equivale ad assumere che per

$$x = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = k = \text{costante}.$$

Questo significa che l'asse delle ordinate taglia tutti i cicli che incontra sotto angoli uguali. E questo si verifica abbastanza bene nelle curve disegnate da me, mentre non era per nulla deducibile dalle premesse del Cisotti.

Inoltre per $y = \text{cost.}$ per cui $\varphi' = M$, ove M è una costante, la relazione tra la orientazione della tangente nei diversi cicli e la corrispondente x sarebbe data da

$$\frac{dx}{dy} = k \pm Mx.$$

Si avrebbe cioè proporzionalità tra gli scarti dal valore medio k della inversa della permeabilità vera $\left(\frac{d y}{d x}\right)$ e la forza magnetizzante x .

E perciò, guidata una parallela all'asse x , precisati i punti d'incontro con un sistema di cicli, e dedotti i valori di $\operatorname{tg} \alpha$, ove α denota l'angolo che quelle tangenti formano con l'asse y , si dovrebbe avere:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha = k \pm M x$$

e perciò una relazione lineare con x .

Servendomi dei cicli tracciati, ho potuto invece constatare che fra $\operatorname{tg} \alpha$ e x si ha una dipendenza di ben diversa natura.

Il risultato di tre determinazioni fatte in questo senso, due sui cicli d'isteresi del secondo filo di ferro, una su quelli del filo di acciaio, è riassunto negli specchietti seguenti e nella fig. IV.

Secondo filo di ferro.

$$y = -9,6$$

x del p.to di tg.za	x_T inters: tg, asse x	$x_T - x$ suttang.te
— 20	+ 127,5	+ 147,5
0	77,8	77,8
15	43,6	28,6
20,4	37,4	17
23,4	34,8	11,4
26	32,6	6,6
27,2	32,3	5,1
28,4	32	3,6
32,8	33,5	0,7
33,2	33,9	0,7
35,2	35,9	0,6

$$y = -2$$

x	x_T	$x_L - x$
— 1,4	+ 21,7	+ 23,1
— 4	20	24
— 10,2	17,5	27,7
+ 1,6	21,6	20
7	17,4	10,4
15,4	21,6	6,2
20,8	24,4	3,6
23,6	25,8	2,2
26,2	27,4	1,2
27,3	27,8	0,5
30	30,4	0,4
31,2	31,4	0,2

Filo di acciaio.

$$y = -6,8$$

— 35	+ 256,8	+ 291,8
0	142	142
18	101	83
28	82	54
32,8	81,6	48,8
35,6	77,4	41,8
40,2	71,4	31,2
43,2	68,8	25,6
45,5	65	19,5
49,2	64,7	15,5
51	62,4	11,4
54	62,1	8,1
56,8	62	5,2
58	63	5
59,8	63,1	3,3
61	62,8	1,8

FIG. IV

Le curve disegnate sono ottenute (vedi fig. IV) riportando come ascisse le x , come ordinate le sottangenti, proporzionali alle tangenti α .

Certo nessuna delle tre linee disegnate può lontanamente somigliare ad una retta.

Tutto questo, *si noti bene*, anche lasciando completamente indeterminata la forma della funzione $\varphi'(y)$ che influisce sul coefficiente angolare dalla retta (1) ricorrendo a valori diversi di y .

III) Ancora sulla espressione analitica della $\psi(r)$.

La forma supposta per $\psi(r)$ e quindi per $\psi(y)$ ci permette d'altra parte di precisare la funzione $\varphi'(y)$ che è il fondamento della teoria.

Da

$$k e^2 = \psi'(y)$$

si ottiene derivando:

$$k e^2 \varphi' = \psi''(y)$$

è dividendo la II equazione per la I:

$$\varphi' = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}.$$

Ossia:

$$\varphi' = - \frac{2 a b}{(a+y)^3} : \frac{a b}{(a+y)^2} = \frac{-2}{a+y}.$$

Questa è l'espressione di $M(y)$.

Potremo allora scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tg} \alpha = k - \frac{2x}{a+y} & \text{ramo ascendente} \\ \operatorname{tg} \alpha = k + \frac{2x}{a+y} & \text{» discendente} \end{array} \right.$$

o anche:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a+y)(\operatorname{tg} \alpha - k) = -2x \\ (a+y)(\operatorname{tg} \alpha - k) = 2x. \end{array} \right.$$

Queste equazioni ci dicono che per tutti i punti della linea

$$2x = m(a + y)$$

con m qualsiasi, $\operatorname{tg} \alpha$ ha il medesimo valore. Questa linea è una retta passante per $y = -a$, $x = 0$, qualunque sia m .

Ciò significa che qualunque retta uscente dal punto $x = 0$, $y = -a$, taglia tutti i rami ascendenti o i discendenti di tutti i cicli del piano sotto eguale angolo (le tangenti ai rami della stessa specie nei punti d'intersezione debbono essere parallele).

In particolare questa proprietà vale anche per l'asse y . Ma non risulta dalle mie esperienze che essa valga per tutte le rette uscenti da $y = -a$.

Poichè dunque l'iperbole $\frac{br}{a+r}$ non può rappresentare la $\psi(r)$, converrebbe cercare un'espressione analitica più conveniente a questa funzione; dalla quale si potrebbero poi ricavare, ove esistessero, i valori delle nuove costanti; ma è inutile accingersi a questo lavoro, vista l'obiezione II.

*
* * *

Riassumendo, la teoria del Cisotti va considerata come un tentativo lodevole ma poco fruttifero di rappresentazione dei processi da cui prendono origine i fenomeni di isteresi del ferro. Sono discutibili, e non sempre fondati, gli argomenti con cui egli cerca di giustificare la forma della funzione $f(x, y)$ del Duhem da cui dipenderebbero le variazioni della permeabilità vera nei diversi stati del corpo. E perciò la forma analiticamente prevista pel ramo ascendente e per quello discendente del ciclo è piuttosto una rappresentazione empirica, che vale solo (e non si sa perchè) entro limiti troppo ristretti di variazione della magnetizzazione.

Resta inoltre, e ciò è una deficienza grave dal punto di vista teorico e pratico, la necessità di considerare due leggi diverse di variazioni del magnetismo che si devon sostituire quattro volte, l'una all'altra, bruscamente, al passaggio pei

vertici e al passaggio per l'asse x ; mentre una teoria generale dovrebbe con una sola forma analitica rappresentare in modo continuo l'andamento della magnetizzazione durante le variazioni periodiche del campo.

È questo il problema fondamentale che deve risolvere la teoria perchè ne possa trarre vero profitto la previsione matematica del funzionamento importantissimo delle macchine magnetiche con ferro.

Dato cioè un campo variabile sinusoidalmente col tempo

$$H = H_0 \sin \omega t$$

la teoria dovrebbe consentire che si potesse costruire la funzione

$$I = I(t)$$

secondo la quale la magnetizzazione I varia col tempo; e questa dovrebbe esser tale che, per eliminazione di t , ne risultasse una legge di variazione periodica di I con H , indipendente, entro larghi limiti, da ω , cioè dalla frequenza; e invero l'esperienza ha dimostrato che da zero fino a 20,000 periodi circa per secondo il ciclo d'isteresi subisce solo lievissime modificazioni. Ma le teorie finora note, non hanno compiuto, in questo senso, alcun passo d'importanza sensibile.

Roma, Istituto Fisico della R. Università.

(Ricevuta il 30 Giugno 1912).