III. Zur analytisch-geometrischen Behandlung der Krystallographie.

Von

Th. Liebisch in Berlin.

(Zweite Fortsetzung von d. Zeitschr. Bd. II. S. 90.)

(Mit 3 Holzschnitten.)

10. Ueber die im Nachlass von C. Fr. Gauss enthaltenen krystallographischen Sätze.

Durch W. Sartorius von Waltershausen wurde bekannt, dass C. Fr. Gauss sich mit der Geometrie der Krystalle beschäftigt habe. Sartorius schreibt *): »In dem Jahre 1834 fasste Gauss plötzlich eine sehr grosse Vorliebe für Krystallographie, nachdem er sich in wenigen Wochen so des Gegenstandes bemeistert hatte, dass er alles weit hinter sich liess, was bis dahin über diese Wissenschaft bekannt war. Er mass die Krystalle mit einem 12zölligen Reichenbach'schen Theodolithen **), berechnete und zeichnete darauf ihre schwierigsten Formen. Seine Methode der Krystallbezeichnung war im Wesentlichen die, welche später von Miller in Cambridge bekannt gemacht ist: doch vermuthen wir, dass sich noch einige Probleme aus dieser Wissenschaft vorfinden werden, die das kleine aber klassische Werk des englischen Gelehrten noch vervollständigen dürften. Doch schon nach kurzer Zeit wurden alle Papiere, Beobachtungen, Rechnungen und Zeichnungen bei Seite gelegt, ohne dass auch nur das Geringste

*) W. Sartorius von Waltershausen, Gauss: zum Gedächtniss. Leipzig. 1856.

**) Nach Schering, Gauss Werke Bd. II. S. 344 sind im handschriftlichen Nachlass mehre von Gauss mit einem achtzölligen Reichenbach'schen Theodolithen ausgeführte Krystallmessungen aufgezeichnet. Die einzelnen Protokolle enthalten das jedesmalige Datum der Beobachtung, woraus zu ersehen ist, dass diese Untersuchung dem Monat Juli 1834 angehört.

zur öffentlichen Kenntniss gelangt wäre, und von Krystallographie war nie mehr die Rede.«

In der Ausgabe der Werke von C. Fr. Gauss, welche die kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veranstaltet hat, befinden sich in dem Nachlass, und zwar in dem Abschnitt: Geometrische Seite der ternären Formen, auch einige krystallographische Sätze. *) Aus diesen, wie aus den Bemerkungen, welche Gauss in seiner Anzeige **) von L. A. Seeber's Untersuchungen über die positiven ternären quadratischen Formen gemacht hat, geht hervor, dass seine Aufmerksamkeit durch die Arbeiten von Seeber ***) auf die Anwendungen, welche die wesentlich positiven ternären quadratischen Formen auf die Entwicklung der geometrischen Eigenschaften der Krystalle gestatten, gelenkt worden war. Seeber, ein Schüler von Gauss, hatte sich die Aufgabe gestellt, die Art, wie die festen Körper aus den kleinsten Theilen ihrer Materie gebildet sind, aus den Gesetzen der Mechanik zu erklären. Indem er eine Modification der bekannten Hypothese von Hauy über den parallelepipedischen Bau der Krystalle seiner Betrachtung zu Grunde legte, glaubte er zu erkennen, dass die positiven ternären quadratischen Formen mit ganzzahligen Coefficienten und ganzzahligen Variablen in Beziehung zu der inneren Structur der festen Körper stehen, derart, dass die Eigenschaften einer jeden unorganischen festen Substanz, wo nicht sämmtlich, doch grösstentheils von den Eigenschaften einer der Substanz zugehörenden Klasse äquivalenter positiver ternärer quadratischer Formen abhängen. Insbesondere war Seeber der Ansicht, dass die erwähnte Hypothese über die parallelepipedische Anordnung der mechanisch einfachsten Theile der festen Körper eine Ableitung aller der mannigfaltigen regelmässigen Gestalten der krystallisirten festen Körper gewähre. Die Quadrate der Abstände der Mittelpunkte der Theilchen in einem bestimmten Krystall setzte er gleich ganzen Vielfachen einer und derselben Grösse. Auch wenn die Hypothese über die Structur der festen Körper im Allgemeinen nicht richtig sei, so würde sich nach Seeber doch die, lediglich auf rein mathematische Principien gegründete Zurückführung der Krystallformen auf jene einfache Annahme als gültig erweisen, indem vermöge derselben wenigstens die Krystallformen einer jeden festen Substanz von den Eigenschaften einer ihr zugehörigen Klasse

*) Carl Friedrich Gauss Werke. Zweiter Band. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1863. S. 308—310 (mit Bemerkungen von Schering S. 311. 312).

**) Göttingen'sche gelehrte Anzeigen. 1831. Juli 9. — Wieder abgedruckt in Crelle's Journal für Mathematik, Bd. XX. S. 312 f. und Werke, Bd. II. S. 188—196.

***). Seeber, Versuch einer Erklärung des inneren Baues der festen Körper. Gilbert's Annalen der Physik. Bd. 76. 1824. S. 229—248. 349—371. — Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen. Freiburg. 1831.

aequivalenter positiver ternärer quadratischer Formen abhängig seien, mithin die Theorie dieser ternären Formen wenigstens ein nützliches oder nothwendiges Hülfsmittel der Krystallographie sei. Demgemäss erachtete er zur weiteren Ausführung seiner krystallographischen Betrachtungen eine genaue Kenntniss der Eigenschaften der wesentlich positiven ternären quadratischen Formen für nothwendig.

In der Anzeige der Seeber'schen Schrift gedenkt Gauss bei Gelegenheit seiner Mittheilungen über die geometrische Interpretation der positiven ternären quadratischen Formen auch der Anwendung dieser Formen auf die Ermittlung der Relationen unter den Krystallgestalten. Er macht dabei die wichtige Bemerkung, dass genauere Messungen nicht, wie Seeber mit Zugrundelegung der Winkel-Angaben von Hauy angenommen hatte, auf einfache rationale Verhältnisse der Coefficienten jener Formen führen. Doch sei der grösste Theil der Lehre von den ternären Formen und namentlich dasjenige, was für die krystallographische Anwendung erforderlich ist, auch unabhängig von der Voraussetzung, wonach die Coefficienten ganze Zahlen vorstellen, gültig.

Von weiteren Entwicklungen der in der Anzeige gegebenen Gesichtspunkte finden sich im Gauss'schen Nachlass namentlich die Resultate der Transformation derjenigen ternären Form, welche den Krystallformencomplex des Kalkspathes mit Zugrundelegung des Hauptrhomboëders und unter Benutzung der Hauy'schen Winkelwerthe repräsentirt, in die Formen, welche denselben Complex darstellen mit Zugrundelegung beziehungsweise des ersten stumpferen, ersten spitzeren, zweiten stumpferen und zweiten spitzeren Rhomboëders.

Ausser mit der Anwendung der ternären Formen auf die Geometrie der Krystalle beschäftigte sich Gauss mit der Frage, wie das geometrische Grundgesetz der Krystalle am einfachsten zu formuliren sei. In dieser Beziehung gelangte er zu einem Resultat, welches zunächst betrachtet werden möge.

I.

Grundgesetz der Geometrie der Krystalle.

Die fundamentale Beziehung zwischen den Flächen und Kanten eines Krystallformencomplexes ist bekanntlich in zweifacher Weise gedeutet und ausgesprochen worden: als Gesetz der rationalen Indices und als Gesetz der Zonen. Wie einfach diese Gesetze auch immer sein mögen, so kann die Aufsuchung möglichst einfacher Ausdrucksweisen für jene Grundbeziehung doch nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Denn die erwähnten Gesetze können nicht schon beim blossen Anblick der Krystalle abgelesen werden, ebensowenig wie die Gestalt der Planetenbahnen beim Anschauen des Sternenhimmels. Sie entspringen erst aus der Anwendung

der Geometrie des Raumes auf die Beobachtungen, welche unmittelbar an den Krystallen angestellt werden. Daraus geht hervor, dass in dem Masse, in welchem sich neue geometrische Hülfsmittel darbieten, auch die Nothwendigkeit von Neuem hervortritt, die geometrische Betrachtung der Krystalle einer wiederholten Ausführung zu unterziehen und die Folgerungen aus jenen Gesetzen von einem anderen Standpunkte aus zu entwickeln. Selbst wenn auf diese Weise kein Resultat gewonnen werden könnte, welches nicht schon auf früheren Wegen erreicht worden ist, so würde immerhin die Vermehrung der Gesichtspunkte, unter denen die geometrischen Charaktere der Krystalle betrachtet werden können, nicht als überflüssig zu erachten sein, um so weniger, je mehr Lücken in älteren Betrachtungsweisen hervortreten und je wünschenswerther die Lösung gewisser, jetzt noch unzugänglicher Aufgaben für die praktische Krystallographie ist.

Von jedem der beiden erwähnten, durch die Erfahrung begründeten Gesetze ausgehend gelangt man zu folgendem Satze, welcher demnach ebenfalls erfahrungsmässig für jeden Krystallformencomplex gültig ist:

»Das Doppelverhältniss (anharmonische Verhältniss) von vier Flächen, welche einer und derselben Geraden parallel gehen, sowie das Doppelverhältniss von vier Kanten, welche einer und derselben Ebene parallel gehen, ist eine rationale Zahl.«

Auch dieser Satz spricht die Grundbeziehung zwischen den Flächen und Kanten eines Krystallformencomplexes aus wie die angeführten Gesetze, mit denen er gleichbedeutend ist, da man auch umgekehrt von diesem Satze zu jenen Gesetzen gelangt. Er lässt sich jedoch, wie mir scheint, in einer systematischen Darstellung der geometrischen Krystallographie vortheilhafter benutzen als die erwähnten Gesetze, und er stimmt, wie jetzt gezeigt werden soll, im Wesentlichen überein mit den nachstehenden, von Gauss aufgestellten und a. a. O. S. 308 aus seinem Nachlass mitgetheilten Sätzen.

(A). »Das Grundgesetz der Krystallisation lässt sich am kürzesten so aussprechen: zwischen je fünf Ebenen, welche dabei vorkommen, gibt es folgende Relation:

Sind ihre Normalen auf der Kugeloberfläche (0), (1), (2), (3), (4), so sind allezeit die Producte

$$\sin 102. \sin 304, \sin 103. \sin 204, \sin 203. \sin 104$$

in einem rationalen Verhältniss; ist dies wie $\alpha : \beta : \gamma$, so ist

$$\beta = \alpha + \gamma.$$

(B). Sind die Coordinaten der 5 Punkte auf der Kugeloberfläche

$$\left. \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \text{so müssen } \begin{array}{l} (ab' - ba') \cdot (a'' b''' - b'' a''') \\ (ab'' - ba'') \cdot (a''' b' - b''' a') \\ (ab''' - ba''') \cdot (a' b'' - b' a'') \end{array}$$

in rationalem Verhältniss stehen.

(C). Allgemein seien 1, 2, 3, 4, 5 die 5 Punkte auf der Kugeloberfläche, 0 der Mittelpunkt; dann stehen, wenn 12 den körperlichen Inhalt des Tetraëders 0345 bedeutet

$$\left. \begin{array}{l} 23.45 \\ 24.53 \\ 25.34 \end{array} \right\} \text{in rationalem Verhältnisse}$$

ebenso

$$\left. \begin{array}{l} 12.34 \\ 13.42 \\ 14.23 \end{array} \right\} \text{u. s. f. «}$$

Die Relation:

$$\frac{\sin 102. \sin 304}{\sin 203. \sin 104} : \frac{\sin 103. \sin 204}{\sin 203. \sin 104} = \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha}{\gamma} + 1$$

welche aus dem Gaussischen Satze (A) folgt, drückt eine Beziehung zwischen Doppelverhältnissen aus. Bezeichnet man die durch den Pol (0) gehenden Zonenkreise: (0) (1) mit I, (0) (2) mit II, (0) (3) mit III, (0) (4) mit IV, so ist:

$$\frac{\sin 102. \sin 304}{\sin 203. \sin 104} = - \frac{\sin I \text{ II. } \sin III \text{ IV}}{\sin III \text{ II. } \sin I \text{ IV}} = - (I \text{ III II IV})$$

und

$$\frac{\sin 103. \sin 204}{\sin 203. \sin 104} = \frac{\sin I \text{ III. } \sin II \text{ IV}}{\sin II \text{ III. } \sin I \text{ IV}} = (I \text{ II III IV})$$

Zwischen diesen Doppelverhältnissen besteht die Beziehung *)

$$(I \text{ II III IV}) + (I \text{ III II IV}) = 1$$

Setzt man $-(I \text{ III II IV}) = \frac{\alpha}{\gamma}$ so ist demnach

$$(I \text{ II III IV}) = \frac{\alpha}{\gamma} + 1. **)$$

Die Symbole der Pole (0), (4), (2), (3), (1) seien beziehungsweise 001,

*) Möbius, Barycentrischer Calcül. S. 184.

**) Ueber eine andere Herleitung des Gaussischen Satzes (A), in welcher Doppelver-

$a\ b\ c$, $a'\ b'\ c'$, $a''\ b''\ c''$, $a'''\ b'''\ c'''$, so sind die Symbole der Zonenkreise I, II, III, IV resp. $[b\ a\ 0]$, $[b'\ a'\ 0]$, $[b''\ a''\ 0]$, $[b'''\ a'''\ 0]$. Nach Formel (74) d. Zeitschr. Bd. I S. 451 ist:

$$\frac{a\ b' - b\ a'}{a\ b'' - b\ a''} \cdot \frac{a''\ b''' - b''\ a'''}{a'\ b'' - b'\ a''} = - \quad (\text{I III II IV})$$

$$\frac{a\ b'' - b\ a''}{a\ b''' - b\ a'''} \cdot \frac{a''' b' - b''' a'}{a'\ b'' - b'\ a''} = \quad (\text{I II III IV})$$

Daraus erhellt, dass der Satz (B) aus (A) hervorgeht, wenn man die genannten Doppelverhältnisse durch Indices darstellt.

Wird der Radius der Kugel gleich 1 gesetzt und bedeutet z. B. $\sin (145)$ den Sinus der Ecke, welche von den Geraden 01, 04, 05 gebildet wird, so ist der sechsfache

Inhalt 23 des Tetraeders	0145	=	$\sin (145)$
- 45 -	-	0123	= $\sin (123)$
- 24 -	-	0153	= $\sin (153)$
- 53 -	-	0142	= $\sin (142)$
- 25 -	-	0134	= $\sin (134)$
- 34 -	-	0152	= $\sin (152)$

Bezeichnet man die grössten Kugelkreise von 1 nach 2, 3, 4, 5 resp. mit I, II, III, IV, so ist nach Formel (5) d. Zeitschr. Bd. I, S. 437:

$$\begin{aligned}\sin (145) &= \sin 51 \cdot \sin 14 \cdot \sin \text{IV III} \\ \sin (123) &= \sin 31 \cdot \sin 12 \cdot \sin \text{II I} \\ \sin (153) &= \sin 31 \cdot \sin 15 \cdot \sin \text{II IV} \\ \sin (142) &= \sin 21 \cdot \sin 14 \cdot \sin \text{I III} \\ \sin (134) &= \sin 41 \cdot \sin 13 \cdot \sin \text{III II} \\ \sin (152) &= \sin 21 \cdot \sin 15 \cdot \sin \text{I IV}\end{aligned}$$

Demnach ist:

$$\frac{23 \cdot 45}{25 \cdot 34} = \frac{\sin \text{IV III} \cdot \sin \text{II I}}{\sin \text{III II} \cdot \sin \text{I IV}} = (\text{I III II IV})$$

$$\frac{24 \cdot 53}{25 \cdot 34} = \frac{\sin \text{II IV} \cdot \sin \text{I III}}{\sin \text{III II} \cdot \sin \text{I IV}} = - (\text{I II III IV})$$

Aus den vorstehenden Umformungen ist ersichtlich, wie die Gaussischen Sätze (A), (B), (C) zu dem erwähnten Grundgesetz: Das Doppelverhältniss von vier tautozonalen Flächen ist eine rationale Zahl, führen; andererseits geht daraus hervor, dass auch umgekehrt die Gaussischen Sätze als Folgerungen aus jenem Grundgesetz aufgefasst werden können.

hältnisse nicht benutzt werden vgl. W. H. Miller, On the crystallographic method of Grassmann. Proc. Cambridge Philos. Soc. Part V. 1868.

II.

Anwendung der Theorie der wesentlich positiven ternären quadratischen Formen auf die Geometrie der Krystalle.

Die Grössen, welche bei der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Krystalle in Betracht kommen, sind, wie Seeber erkannte, so beschaffen, dass sich die Theorie der positiven ternären quadratischen Formen benutzen lässt, um die Beziehungen jener Grössen unter einander abzuleiten. Diese Anwendung auf die Geometrie der Krystalle hat das Interesse, welches sich in arithmetischer Beziehung an die ternären quadratischen Formen knüpft, wesentlich erhöht. *)

Seeber nahm an**), ein Krystall bestehe aus einem System parallelepipedisch angeordneter Molecüle, welche sich in einem stabilen Gleichgewichtszustand befinden und sich gegenseitig nicht berühren. Das Quadrat des Abstandes der Mittelpunkte von irgend zweien der parallelepipedisch gestellten Molecüle einer bestimmten krystallisirten Substanz ist dargestellt durch die ternäre quadratische Form:

$$\alpha all + \beta \beta mm + \gamma \gamma nn + 2\beta\gamma \cos Amn + 2\gamma\alpha \cos Bnl + 2\alpha\beta \cos Glm.$$

Hierin bedeuten α, β, γ die Längen der Kanten des Elementarparallelepipeds, welches identisch ist mit den von Hauy angegebenen *molécules intégrantes* oder *molécules soustractives* der betreffenden Substanz, A, B, I die von diesen Kanten eingeschlossenen Winkel, l, m, n ganze, positive oder negative Zahlen.***) Seeber zeigte, dass für jeden Krystall eine wesentlich positive ternäre quadratische Form mit ganzzahligen Variablen charakteristisch ist. Wie dieselbe aus den Elementen des Krystalles zusammengesetzt wird, lehrt die vorstehende Form. Zu jeder solchen Form kann ein Elementarparallelepiped construirt werden; d. h. ist

$$axx + byy + czz + 2a'yz + 2b'zx + 2cxy$$

die ternäre Form, so können drei Kantenlängen α, β, γ und drei Winkel

*) Vgl. Vorrede zu Seeber's Untersuchungen etc. — Gauss, Werke, Bd. II. S. 495. — G. Eisenstein, Neue Theoreme der höheren Arithmetik. In: Crelle's Journal für Mathematik Bd. 35. 1847. S. 417 und in: Mathematische Abhandlungen. Berlin 1847. S. 490. — G. Eisenstein, Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung. Berlin 1854.

**) Seeber, Versuch einer Erklärung des inneren Baues der festen Körper. Gilbert's Annalen der Physik. Bd. 76.

***) Die vorstehende Form lautet in der in d. Zeitschr. Bd. I, S. 144 benutzten Bezeichnungen:

$$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k.$$

A, B, Γ gefunden werden von der Beschaffenheit, dass die Kanten eine körperliche Ecken bilden und dass:

$$\alpha = \sqrt{a}, \quad \beta = \sqrt{b}, \quad \gamma = \sqrt{c},$$

$$\cos A = \frac{a'}{\sqrt{bc}}, \quad \cos B = \frac{b'}{\sqrt{ca}}, \quad \cos \Gamma = \frac{c'}{\sqrt{ab}}.$$

Setzt man für die Variabeln einer solchen ternären Form alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen, so erhält man das System von parallelepipedisch angeordneten Moleculen, welches alle möglichen Flächen- und Kantenrichtungen des Krystallformencomplexes der betreffenden Substanz bestimmt. Dass die Variabeln ganzzahlig sein müssen, folgt nach Seeber aus dem von Hauy entdeckten Gesetz für die Krystallpolyeder, demselben, welches heute unter dem Namen der rationalen Indices bekannt ist. Den verschiedenen Krystallen entsprechen ebenso viele nicht auf einander zurückführbare ternäre quadratische Formen. Aus den Hauy'schen Winkelangaben glaubte Seeber den Schluss ziehen zu müssen, dass die Verhältnisse der Coefficienten a, b, c, a', b', c' einer solchen Form gleich ganzen Zahlen zu setzen seien. Wird z. B. der Kalkspath nach Hauy auf die Polkanten des Hauptrhomboëders bezogen und wird der von zwei Polkanten eingeschlossene Winkel nach Hauy $= 101^\circ 32'$ gesetzt, so ist:

$$\alpha : \beta : \gamma = 1, \quad \cos A = \cos B = \cos \Gamma = -\frac{1}{2}.$$

Daher sind die Coefficienten derjenigen ternären quadratischen Form, welche den Krystallformencomplex des Kalkspathes mit Zugrundelegung des Hauptrhomboëders desselben repräsentirt bis auf einen Proportionalitätsfactor:

$$5, 5, 5, -1, -1, -1.$$

Verhalten sich die Coefficienten einer ternären Form wie ganze Zahlen, so müssen sich die Abstände je zweier Punkte des zugehörigen Punktsystems wie Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen verhalten. So folgerte Seeber aus den Angaben von Hauy eine Annahme, welche Chr. S. Weiss*) derselben Quelle mit der Ueberzeugung von ihrer Naturgemässheit entnommen hatte. Sie befindet sich bekanntlich im Widerspruch mit späteren genauen Winkelmessungen und mit den thermischen Eigenschaften der Krystalle.

Die parallelepipedische Anordnung des Punktsystemes im Raume, welches durch die ternäre Form $\sum_{i,k=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k$ mit ganzzahligen Variabeln η_1, η_2, η_3 repräsentirt wird, ist nach Seeber in Uebereinstimmung mit der Anordnung der kleinsten materiellen Theilchen desjenigen Krystallformencomplexes, welcher durch dieselbe Form dargestellt werden kann. Nach dieser später von Bravais wieder aufgenommenen Anschauung be-

*) Abhandl. Berlin. Akad. für 1816 und 1817. Krystallographische Fundamentalbestimmung des Feldspathes. S. 253.

ziehen sich also die ternären Formen auf den inneren Bau der Krystalle. Es ist ausdrücklich zu betonen, dass die Anwendung der ternären Formen auf die Herleitung geometrischer Eigenschaften der Krystalle unabhängig ist von den Vorstellungen über den inneren Bau der Krystalle, welcher ebenso unbekannt ist wie derjenige der übrigen homogenen festen Körper. Sind von einem Krystallformencomplex vier Flächen (oder Kanten), von denen nicht je drei einer und derselben Geraden (oder Ebene) parallel gehen, bekannt, so ist damit auch die, dem Complex zugehörige Form

$\sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k$ gegeben, und das durch diese Form repräsentirte Punktsystem im Raume ist lediglich eine geometrische Interpretation der genannten Form, die mit der inneren Structur der Krystalle in keinem erkennbaren Zusammenhange steht.

In der erwähnten Anzeige von Seeber's Untersuchungen über die positiven ternären quadratischen Formen eröffnete Gauss eine Reihe neuer Gesichtspunkte für die Anwendung dieser Formen auf die Geometrie der Krystalle:

»Es bedeutet allgemein die positive ternäre Form

$$axx + byy + czz + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$$

das Quadrat der Entfernung zweier unbestimmter Punkte im Raume, deren Coordinaten in Beziehung auf drei Axen (1), (2), (3) die Unterschiede $x\sqrt{a}$, $y\sqrt{b}$, $z\sqrt{c}$ geben: die Cosinus der Winkel zwischen den Axen (2) und (3), (1) und (3), (1) und (2) sind hier resp. $\frac{a'}{\sqrt{bc}}$, $\frac{b'}{\sqrt{ca}}$, $\frac{c'}{\sqrt{ab}}$. Insofern

hier x , y , z bloss ganze Zahlen bedeuten sollen, bezieht sich die Form auf ein System parallelepipedisch geordneter, d. i. durch die Durchschnitte dreier Systeme paralleler aequidistanter Ebenen sich ergebender Punkte. Der ganze Raum erscheint so in lauter gleiche Parallelepipedon getheilt, deren Eckpunkte jenes System von Punkten ausmachen, und das Quadrat des Rauminhalts eines Elementar-Parallelepipedum ist der mit positivem Zeichen genommenen Determinanten der ternären Form gleich. Aequivalente Formen repräsentiren ein und dasselbe System von Punkten, nur auf andere Axen oder Fundamentebenen bezogen.* Auf gleiche Weise finden alle andere Hauptmomente der Theorie der ternären Formen hier ihre geometrische Bedeutung, das Enthaltensein einer Form unter einer andern, die Darstellung einer bestimmten Zahl oder einer unbestimmten binären Form durch eine ternäre, die Lehre von den zugeordneten ternären Formen (formae adjunctae), das Wegfallen der Unterscheidung zwischen eigentlicher und uneigentlicher Aequivalenz, das Wesen der reducirten Formen,

*) Vgl. die vortreffliche Ausführung von Rudolf Lipschitz, Lehrbuch der Analysis. Bd. I. §§ 85—87. Bonn 1877.

u. s. w. . . . Man wird daraus erkennen, welch ein reiches Feld hier den Untersuchungen geöffnet ist, die nicht bloss für sich ein hohes theoretisches Interesse haben, sondern auch zu einer eben so bequemen als allgemeinen Behandlung aller Relationen unter den Krystallformen benutzt werden können. In das Detail dieser Benutzung einzugehen, ist hier der Ort nicht: wir dürfen jedoch die Bemerkung nicht übergehen, dass wenn gleich ursprünglich angenommen ist, dass a, b, c, a', b', c' ganze Zahlen vorstellen, doch der grösste Theil der Lehre von den ternären Formen, und namentlich dasjenige, was für jene Benutzung erforderlich ist, auch unabhängig von jener Voraussetzung gültig bleibt. In der That führen zwar Haüy's Angaben bei den meisten Krystallgattungen auf sehr einfache ganze Werthe der Coefficienten in den ternären Formen, welche sich auf die jenen entsprechende Anordnung des Punktsystems beziehen*), allein die genaueren späteren Messungen von Wollaston, Malus, Biot, Kupffer, u. a. stehen damit im Widerspruch, und machen es zweifelhaft, ob rationale Verhältnisse jener Coefficienten überall naturgemäss sind; jedenfalls aber lassen sich, wenn man nicht in der Theorie die Beschränkung auf ganze Werthe der Coefficienten weglassen will, da es dabei nicht auf absolute Werthe, sondern nur auf ihr Verhältniss unter einander ankommt, allezeit ganze Zahlen finden, die den Messungsergebnissen so nahe kommen, wie man nur will.«

Im Gaussischen Nachlass S. 309 befinden sich folgende, die Anwendung der ternären Formen auf die Geometrie der Krystalle betreffende Notizen.

»Transformation der Form $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ Det. = 108**)

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} 11\bar{1} \\ \bar{1}11 \\ 1\bar{1}1 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 17 & 17 & 17 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 240 & 240 & 240 \\ 168 & 168 & 168 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Chaux carbonatée} \\ \text{équiaxe} \end{array} \\
 \quad 36 \cdot 108 \quad \quad \quad 256 \cdot 11664 \quad \quad \quad 216 \\
 \left. \begin{array}{l} 110 \\ 011 \\ 101 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 15 & 15 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{inverse} \\ \\ \end{array} \\
 \quad 4 \cdot 108 \quad \quad \quad 54 \quad \quad \quad 27 \cdot 108 \quad \quad \quad 54 \\
 \left. \begin{array}{l} 211 \\ 121 \\ 112 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 14 & 14 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 51 & 51 & 51 \\ -21 & -21 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 17 & 17 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{contra-} \\ \text{stante} \end{array} \\
 \quad 16 \cdot 108 \quad \quad \quad 216 \quad \quad \quad 432 \cdot 108 \quad \quad \quad 16 \cdot 108 \\
 \left. \begin{array}{l} 122 \\ 212 \\ 221 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 29 & 29 & 29 \\ 23 & 23 & 23 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 312 & 312 & 312 \\ -138 & -138 & -138 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 52 & 52 & 52 \\ -23 & -23 & -23 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{mixte.} \\ \\ \end{array} \\
 \quad 25 \cdot 108 \quad \quad \quad 67500 \cdot 108 \quad \quad \quad 33750
 \end{array}$$

*) Vgl. Seeber, Gilbert's Annalen Bd. 76.

**) Hierzu bemerkt Schering S. 312: die Tafel der Transformation der Form

Setzt man die ursprüngliche Form allgemein $= \begin{pmatrix} t, & t, & t \\ u, & u, & u \end{pmatrix}$

und eine abgeleitete $\begin{pmatrix} T, & T, & T \\ U, & U, & U \end{pmatrix}$

so ist

$$(r) \quad \begin{array}{ll} 1. & T = 3t - 2u & U = -t + 2u \\ 2. & T = 2t + 2u & U = t + 3u \\ 3. & T = 6t + 10u & U = 5t + 11u \\ 4. & T = 9t + 16u & U = 8t + 17u \end{array}$$

Die Form $\begin{pmatrix} 1, & 3, & k \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ geht durch die Substitution

$$(s) \quad \begin{array}{ll} x = u + u' - 2u'' & \text{umgekehrt} \quad 6u = x + 3y + 2z \\ y = u - u' & 6u' = x - 3y + 2z \\ z = u + u' + u'' & 6u'' = -2x + 2z \end{array}$$

$$x \equiv z \pmod{3}, \quad x \equiv y \pmod{2}$$

über in $\begin{pmatrix} 4+k, & 4+k, & 4+k \\ k-2, & k-2, & k-2 \end{pmatrix}$.

Um den Kalkspath zu produciren ist $k = 0,973403$ zu setzen.

Die vorstehenden Sätze von Gauss beziehen sich auf die Lehre von der Transformation der quadratischen Formen durch eine Substitution des ersten Grades. Zu einem Krystallformencomplex, der bezogen ist auf die Coordinatenachsen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mit den Einheiten $a_1 : a_2 : a_3$, gehört die wesentlich positive ternäre quadratische Form mit ganzzahligen Variablen η_1, η_2, η_3 :

$$f : \dots \sum_{i,k=1}^3 c_{ik} a_i a_k \eta_i \eta_k$$

und deren adjungirte Form:

$$\varphi : \dots a_1^2 a_2^2 a_3^2 \sum_{i,k=1}^3 \frac{\Delta_{ik}}{a_i a_k} h_i h_k$$

Beispielsweise ist für einen Krystall des rhomboëdrischen Systems, der auf die Polkanten seines Grundrhomboëders als Coordinatenachsen bezogen ist:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1, \quad c_{23} = c_{31} = c_{12} = \frac{u}{t}$$

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = \frac{tt - uu}{t}, \quad \Delta_{23} = \Delta_{31} = \Delta_{12} = \frac{uu - ut}{t}$$

$\begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ enthält in der ersten Verticalreihe die Coefficienten der Substitution, in der zweiten die dadurch entstandene neue Form, in der dritten die der letzteren Form entsprechende primitive, wenn diese nicht selbst schon eine solche ist, und in der vierten deren Adjuncta. — Chaux carbonatée équiaxe, inverse, contrastante, und mixte sind die von Hauy (Traité de Minéralogie 1801. Tome II. pag. 132, 137) gebrauchten Benennungen.

$f \dots t\eta_1\eta_1 + t\eta_2\eta_2 + t\eta_3\eta_3 + 2u\eta_2\eta_3 + 2u\eta_3\eta_1 + 2u\eta_1\eta_2$
 oder in Gaussischer Bezeichnungweise:

$$f \dots \begin{pmatrix} t, & t, & t \\ u, & u, & u \end{pmatrix}$$

$\varphi \dots (t+u)h_1h_1 + (t+u)h_2h_2 + (t+u)h_3h_3 - 2uh_2h_3 - 2uh_3h_1 - 2uh_1h_2$
 oder nach Gauss:

$$\varphi \dots \begin{pmatrix} t+u, & t+u, & t+u \\ -u & -u & -u \end{pmatrix}$$

Hierfür bieten die 3. und 5. Reihe der Gaussischen Transformationstabelle Beispiele.

Werden an die Stelle der Fundamentalflächen: $x_2x_3 = 100$, $x_3x_1 = 040$, $x_1x_2 = 004$ der Reihe nach die Flächen $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ eingeführt, und wird an Stelle der Einheitsfläche $e = 111$ die Fläche k als Einheitsfläche gewählt, so bestehen die Transformationsgleichungen (88) und (85) d. Zeitschrift Bd. I. S. 154. 153. Der Kürze wegen möge

$$|k f^{(2)} f^{(3)}| = \sum_{i=1}^3 k_i \Phi_i^{(1)}$$

mit K_1 u. s. f. bezeichnet werden, dann ist:

$$\begin{aligned} (a) \quad K_1 K_2 K_3 \cdot \eta_1' &= K_1 \cdot \sum_{i=1}^3 f_i^{(1)} \eta_i \\ K_1 K_2 K_3 \cdot \eta_2' &= K_2 \cdot \sum_{i=1}^3 f_i^{(2)} \eta_i \\ K_1 K_2 K_3 \cdot \eta_3' &= K_3 \cdot \sum_{i=1}^3 f_i^{(3)} \eta_i \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} (b) \quad \Phi \cdot \eta_1 &= K_1 K_2 K_3 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\Phi_1^{(i)}}{K_1} \eta_i' \\ \Phi \cdot \eta_2 &= K_1 K_2 K_3 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\Phi_2^{(i)}}{K_2} \eta_i' \\ \Phi \cdot \eta_3 &= K_1 K_2 K_3 \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\Phi_3^{(i)}}{K_3} \eta_i' \end{aligned}$$

Demnach geht f über in:

$$f' \dots K_1^2 K_2^2 K_3^2 \sum_{\mu\nu=1}^3 \frac{\gamma_{\mu\nu}}{K_\mu K_\nu} \eta_\mu' \eta_\nu'$$

worin:

$$(a) \quad \gamma_{\mu\nu} = \sum_{ik=1}^3 c_{ik} a_i a_k \Phi_i^{(\mu)} \Phi_k^{(\nu)}$$

1.

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Phi_i^{(i)} = -1, \quad \Phi_i^{(k)} = 1; \quad K_1 = K_2 = K_3 = 1$$

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \eta_2 + \eta_3 & 2\eta_1 &= -\eta_1' + \eta_2' + \eta_3' \\ \eta_2' &= \eta_1 + \eta_3 & 2\eta_2 &= \eta_1' - \eta_2' + \eta_3' \\ \eta_3' &= \eta_1 + \eta_2 & 2\eta_3 &= \eta_1' + \eta_2' - \eta_3' \\ h_1' &= -h_1 + h_2 + h_3 & 2h_1 &= h_2' + h_3' \\ h_2' &= h_1 - h_2 + h_3 & 2h_2 &= h_1' + h_3' \\ h_3' &= h_1 + h_2 - h_3 & 2h_3 &= h_1' + h_2' \end{aligned}$$

2.

$$\Phi = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{vmatrix} = 2, \quad \Phi_i^{(i)} = 0, \quad \Phi_i^{(k)} = 2; \quad K_1 = K_2 = K_3 = 4$$

$$\begin{aligned} 46\eta_1' &= -\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 & \frac{1}{16}\eta_1 &= \eta_2' + \eta_3' \\ 46\eta_2' &= \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 & \frac{1}{16}\eta_2 &= \eta_1' + \eta_3' \\ 46\eta_3' &= \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 & \frac{1}{16}\eta_3 &= \eta_1' + \eta_2' \\ 2h_1' &= h_2 + h_3 & h_1 &= -h_1' + h_2' + h_3' \\ 2h_2' &= h_1 + h_3 & h_2 &= h_1' - h_2' + h_3' \\ 2h_3' &= h_1 + h_2 & h_3 &= h_1' + h_2' - h_3' \end{aligned}$$

3.

$$\Phi = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Phi_i^{(i)} = 3, \quad \Phi_i^{(k)} = -1; \quad K_1 = K_2 = K_3 = 4$$

$$\begin{aligned} \eta_1' &= 2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 & 4\eta_1 &= 3\eta_1' - \eta_2' - \eta_3' \\ \eta_2' &= \eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 & 4\eta_2 &= -\eta_1' + 3\eta_2' - \eta_3' \\ \eta_3' &= \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 & 4\eta_3 &= -\eta_1' - \eta_2' + 3\eta_3' \\ h_1' &= 3h_1 - h_2 - h_3 & 4h_1 &= 2h_1' + h_2' + h_3' \\ h_2' &= -h_1 + 3h_2 - h_3 & 4h_2 &= h_1' + 2h_2' + h_3' \\ h_3' &= -h_1 - h_2 + 3h_3 & 4h_3 &= h_1' + h_2' + 2h_3' \end{aligned}$$

4.

$$\Phi = \begin{vmatrix} 3 & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & 3 & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & 3 \end{vmatrix} = 16, \quad \Phi_i^{(i)} = 8, \quad \Phi_i^{(k)} = 4; \quad K_1 = K_2 = K_3 = 16$$

$$\begin{aligned} 16. \quad 16. \quad \eta_1' &= 3\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 & \frac{1}{4 \cdot 16}\eta_1 &= 2\eta_1' + \eta_2' + \eta_3' \\ 16. \quad 16. \quad \eta_2' &= -\eta_1 + 3\eta_2 - \eta_3 & \frac{1}{4 \cdot 16}\eta_2 &= \eta_1' + 2\eta_2' + \eta_3' \\ 16. \quad 16. \quad \eta_3' &= -\eta_1 - \eta_2 + 3\eta_3 & \frac{1}{4 \cdot 16}\eta_3 &= \eta_1' + \eta_2' + 2\eta_3' \\ 4h_1' &= 2h_1 + h_2 + h_3 & h_1 &= 3h_1' - h_2' - h_3' \\ 4h_2' &= h_1 + 2h_2 + h_3 & h_2 &= -h_1' + 3h_2' - h_3' \\ 4h_3' &= h_1 + h_2 + 2h_3 & h_3 &= -h_1' - h_2' + 3h_3' \end{aligned}$$

Eine Form :

$f \dots t\eta_1\eta_1 + t\eta_2\eta_2 + t\eta_3\eta_3 + 2u\eta_2\eta_3 + 2u\eta_3\eta_1 + 2u\eta_1\eta_2$
 gehe durch Anwendung der Substitution (b) über in :

$f' \dots T\eta_1'\eta_1' + T\eta_2'\eta_2' + T\eta_3'\eta_3' + 2U\eta_2'\eta_3' + 2U\eta_3'\eta_1' + 2U\eta_1'\eta_2'$
 so ergeben sich die Werthe der Coefficienten T, U aus (α):

$$T = t(\Phi_1^{(i)}\Phi_1^{(i)} + \Phi_2^{(i)}\Phi_2^{(i)} + \Phi_3^{(i)}\Phi_3^{(i)}) \\
+ 2u(\Phi_2^{(i)}\Phi_3^{(i)} + \Phi_3^{(i)}\Phi_1^{(i)} + \Phi_1^{(i)}\Phi_2^{(i)}) \\
U = t(\Phi_1^{(i)}\Phi_1^{(k)} + \Phi_2^{(i)}\Phi_2^{(k)} + \Phi_3^{(i)}\Phi_3^{(k)}) \\
+ U(\Phi_2^{(i)}\Phi_3^{(k)} + \Phi_3^{(i)}\Phi_2^{(k)} + \Phi_3^{(i)}\Phi_1^{(k)} + \Phi_1^{(i)}\Phi_3^{(k)} + \Phi_1^{(i)}\Phi_2^{(k)} + \Phi_2^{(i)}\Phi_1^{(k)})$$

für $i, k = 1, 2, 3$. Trägt man für die Grössen $\Phi_i^{(k)}$ der Reihe nach die unter 1. 4 angegebenen Werthe ein, so erhält man die Gaussischen Formeln (r). Nimmt man insbesondere $t = 5, u = -1$, so erhält man die von Gauss aufgestellte Tabelle.

Die Gaussische Substitution (s) bedeutet, dass für die Bestimmung eines Krystallformencomplexes des rhomboedrischen Systems, welcher auf die Flächen $11\bar{2}, 1\bar{1}0, 111$ als Fundamentelebenen und 100 als Einheitsfläche bezogen war, nunmehr die Flächen des Hauptrhomboeders und die Basis zu Grunde gelegt werden.

III.

Reguläres System.

Auf S. 340 des Nachlasses von Gauss befinden sich folgende, das Hexakisoktaeder betreffende Formeln :

»Hexakisoktaeder.

$$\text{Gleichung: } px + qy + rz = 1$$

Coordinationen.

$$\begin{array}{l} 1. \quad \frac{1}{\gamma} \quad 0 \quad 0 \\ 2. \quad \frac{1}{\beta + \gamma} \quad \frac{1}{\beta + \gamma} \quad 0 \\ 3. \quad \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \quad \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma} \end{array}$$

Fig. 3.

$$\text{Sechsfacher Inhalt einer Elementarpyramide} = \frac{1}{\gamma(\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}$$

Alle [Flächen] sind um eine Kugel beschrieben, deren Halbmesser

$$= \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}$$

$$\text{Doppelte Fläche eines Dreieckes} = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}{\gamma(\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$\text{Kante } 1.2 = \frac{\sqrt{(\beta\beta + \gamma\gamma)}}{\gamma(\beta + \gamma)}, \quad 1.3 = \frac{\sqrt{((\alpha + \beta)^2 + 2\gamma\gamma)}}{\gamma(\alpha + \beta + \gamma)}, \quad 2.3 = \frac{\sqrt{(2\alpha\alpha + (\beta + \gamma)^2)}}{(\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$\text{Cosinus Kanten Winkel } 3.1.2 = \frac{\alpha\beta + \beta\beta + \gamma\gamma}{\sqrt{(\beta\beta + \gamma\gamma)((\alpha + \beta)^2 + 2\gamma\gamma)}}$$

$$\text{Sinus} = \frac{\gamma\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)}}{\sqrt{(\beta\beta + \gamma\gamma)((\alpha + \beta)^2 + 2\gamma\gamma)}}.$$

Zur Erläuterung der vorstehenden Formeln möge folgendes dienen. Wird die Fläche $\gamma\beta\alpha$ nicht auf die Hauptsymmetrieachsen x, y, z , sondern auf die Symmetrieachsen 1, 2, 3 bezogen, so werden damit an die Stelle der Fundamentalfächen: 100, 010, 001 der Reihe nach die Flächen: 110, 011, 001 eingeführt. Dann ist:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 110 \\ 110 \\ 111 \end{vmatrix}$$

und die neuen Indices der Fläche $\gamma\beta\alpha$ lauten nach Formel (85) d. Zeitschr. Bd. I. S. 153:

$$\gamma, \frac{\gamma + \beta}{2}, \frac{\gamma + \beta + \alpha}{3}$$

Bestimmt die Oktaederfläche 111 nach wie vor die Axeneinheiten, so sind diese $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$, und die Parameter der Fläche $\gamma\beta\alpha$ haben die Werthe:

$$01 = \frac{1}{\gamma}, \quad 02 = \frac{\sqrt{2}}{\gamma + \beta}, \quad 03 = \frac{\sqrt{3}}{\gamma + \beta + \alpha}$$

wenn 0 den Mittelpunkt des Hexakisoktaeders bedeutet. Das Quadrat des Sinus der von den Symmetrieachsen 1, 2, 3 gebildeten Ecke ist, da:

$$(12) = 45^\circ, \quad (23) = 35^\circ 15' 53'', \quad (31) = 54^\circ 44' 7'',$$

$$\sin^2(123) = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

Daher ist der sechsfache Inhalt der Pyramide 0123:

$$01.02.03 \cdot \sin(123) = \frac{1}{\gamma(\gamma + \beta)(\gamma + \beta + \alpha)}$$

Die Kanten 23, 31, 12 haben folgende Symbole:

$$23 = \left| \begin{smallmatrix} \gamma\beta\alpha \\ \beta\gamma\alpha \end{smallmatrix} \right| = [\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \gamma + \beta], \quad 31 = \left| \begin{smallmatrix} \gamma\beta\alpha \\ \gamma\alpha\beta \end{smallmatrix} \right| = [\beta + \alpha, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}], \quad 12 = \left| \begin{smallmatrix} \gamma\beta\alpha \\ \gamma\beta\alpha \end{smallmatrix} \right| = [\bar{\beta}\gamma 0]$$

Demnach ist nach Formel (40) d. Zeitschr. Bd. I. S. 144:

$$\cos 31^{\wedge}12 = \frac{-(\beta + \alpha)\beta - \gamma\gamma}{\sqrt{((\beta + \alpha)^2 + 2\gamma\gamma)(\beta\beta + \gamma\gamma)}}$$

$$\cos 12^{\wedge}23 = \frac{\beta\alpha - \gamma\alpha}{\sqrt{(\beta\beta + \gamma\gamma)(2\alpha\alpha + (\gamma + \beta)^2)}}$$

$$\cos 23^{\wedge}34 = \frac{-\alpha(\beta + \alpha) + \gamma\alpha - (\gamma + \beta)\gamma}{\sqrt{(2\alpha\alpha + (\gamma + \beta)^2)((\beta + \alpha)^2 + 2\gamma\gamma)}}$$

und :

$$\sin 34^{\wedge}12 = \sqrt{\frac{\gamma\gamma + \beta\beta + \alpha\alpha}{((\beta + \alpha)^2 + 2\gamma\gamma)(\beta\beta + \gamma\gamma)}}$$

$$\sin 12^{\wedge}23 = (\gamma + \beta) \sqrt{\frac{\gamma\gamma + \beta\beta + \alpha\alpha}{(\beta\beta + \gamma\gamma)(2\alpha\alpha + (\gamma + \beta)^2)}}$$

$$\sin 23^{\wedge}34 = (\gamma + \beta + \alpha) \sqrt{\frac{\gamma\gamma + \beta\beta + \alpha\alpha}{(2\alpha\alpha + (\gamma + \beta)^2)((\beta + \alpha)^2 + 2\gamma\gamma)}}$$

Hieraus ergeben sich die Kantenlängen in dem Dreieck 123 :

$$\begin{aligned} 23 : 34 : 12 &= \sin 34^{\wedge}12 : \sin 12^{\wedge}23 : \sin 23^{\wedge}34 \\ &= \frac{\sqrt{2\alpha\alpha + (\gamma + \beta)^2}}{(\gamma + \beta)(\gamma + \beta + \alpha)} : \frac{\sqrt{(\beta + \alpha)^2 + 2\gamma\gamma}}{\gamma(\gamma + \beta + \alpha)} : \frac{\sqrt{\gamma\gamma + \beta\beta}}{\gamma(\gamma + \beta)} \end{aligned}$$

und der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks 123 :

$$23 \cdot 34 \sin 23^{\wedge}34 = \frac{\sqrt{\gamma\gamma + \beta\beta + \alpha\alpha}}{\gamma(\gamma + \beta)(\gamma + \beta + \alpha)}$$