Bemerkungen zu Liouville's Classificirung der Transcendenten.

Von

LEO KOENIGSBERGER in Heidelberg.

Liouville geht in seiner ausgezeichneten Arbeit „sur la classification des transcendentes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines des certaines équations en fonction finie explicite des coefficients“ im 2^{ten} und 3^{ten} Bande seines Journals von der Ueberlegung aus, dass die Theorie der algebraischen Gleichungen in ihrer Entwicklung sich mit der Frage beschäftigt habe, ob alle algebraischen Gleichungen oder nur gewisse näher anzugebende Classen die Eigenschaft haben, dass sich ihre Lösungen als *explicite* algebraische Functionen ihrer Coefficienten ausdrücken lassen, indem er als *explicite* algebraische Functionen alle solche definirt, welche durch die sechs arithmetischen Operationen aus den Coefficienten zusammengesetzt sind, und dann nach Abel die verschiedenen Ordnungen der algebraischen Functionen feststellt. Analog dazu führt nun Liouville ausser den algebraischen Functionen noch die niederen Transcendenten e^x und $\log x$ in die Betrachtung ein, spricht auch auf Grund von wiederholt ausgeführten algebraischen, exponentiellen und logarithmischen Operationen entsprechend der Abel'schen Eintheilung von expliciten transcendenten Functionen verschiedener Ordnung und glaubt die entsprechende Ausdehnung der Abel'schen Untersuchungen über die Auflösbarkeit der Gleichungen darin zu finden, dass er nach den algebraisch aus transcendenten Functionszeichen zusammengesetzten transcendenten Gleichungen fragt, welche durch jene niederen expliciten Transcendenten auflösbar sind oder bei denen die Unmöglichkeit einer solchen Auflösung sich feststellen lässt. Nachdem es aber durch Einführung des Begriffes der Irreductibilität der algebraischen Differentialgleichungen möglich geworden, diejenigen Sätze, auf welche Liouville die eben angedeuteten Untersuchungen sowie diejenigen über die algebraische Ausdrückbarkeit Abel'scher Integrale oder deren Beziehungen zu den

Logarithmen und Exponentialfunctionen stützt, auf Integrale beliebiger algebraischer Differentialgleichungen auszudehnen, ist es nicht schwer zu erkennen, dass Liouville die Frage der Auflösbarkeit der algebraischen Gleichungen, wenn sie entsprechend auf transcendente Functionen übertragen werden soll, nicht zweckmässig formulirt hat, und ich will im Folgenden nur ganz kurz die hierher gehörigen Probleme in völliger Allgemeinheit bezeichnen, ohne desshalb die sich ergebenden Sätze mit einer Eintheilung der Transcendenten überhaupt, wie sie Liouville vorschwebte, aber durch die Entwicklung der Functionentheorie unhaltbar geworden ist, in Zusammenhang bringen zu wollen.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ gegebene Elemente und $x_1, x_2, x_3, \dots$ durch die Gleichungen defnirt

$$(1) \quad x_1^{n_1} = A_1, \quad x_2^{n_2} = A_2, \quad x_3^{n_3} = A_3, \dots,$$

in denen $n_1, n_2, n_3, \dots$ Primzahlen und $A_1, A_2, A_3, \dots$ rationale Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ bedeuten, so wird nach Abel $f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, wenn f eine rationale Function von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, x_1, x_2, x_3, \dots$ darstellt, eine algebraische Function erster Ordnung sein, deren Grad durch die Anzahl der rational von einander unabhängigen Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots$ bestimmt wird. Sei jetzt eine weitere Reihe binomischer Gleichungen

$$(2) \quad y_1^{v_1} = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots), \quad y_2^{v_2} = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots), \\ y_3^{v_3} = f_3(x_1, x_2, x_3, \dots), \dots$$

gegeben, in denen $v_1, v_2, v_3, \dots$ Primzahlen und $f_1, f_2, f_3, \dots$ algebraische Functionen erster Ordnung bedeuten, so wird

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots),$$

wenn F wiederum rational ist, eine algebraische Function zweiter Ordnung sein, und ebenso aus den binomischen Gleichungen

$$(3) \quad z_1^{p_1} = F_1(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots), \\ z_2^{p_2} = F_2(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots), \\ z_3^{p_3} = F_3(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots), \dots$$

eine algebraische Function dritter Ordnung

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots, z_1, z_2, z_3, \dots)$$

entstehen u. s. w., und es würde sich somit die Frage nach der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen oder in der Liouville'schen Ausdrucksweise nach der expliciten algebraischen Darstellung der Lösungen derselben darauf reduciren, die Lösungen einer algebraischen Gleichung rational durch die Lösungen binomischer Gleichungen von der Form (1), (2), (3), ... auszudrücken.

Ziehen wir nun eine der elementaren Transcendenten z. B. den

Logarithmus in unsere Betrachtung, so werden wir, wenn $u, v, w, \dots$ algebraische Functionen von x bedeuten, eine Function

$$f(x, \log u, \log v, \log w, \dots),$$

in welcher f eine algebraische Function darstellt, eine logarithmische Function erster Ordnung nennen, oder was dasselbe ist, wenn $x_1, x_2, x_3, \dots$ durch die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(4) \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{u'}{u}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{v'}{v}, \quad \frac{dx_3}{dx} = \frac{w'}{w}, \dots$$

definiert sind, so wird $f(x, x_1, x_2, x_3, \dots)$ eine solche Transcendente erster Ordnung sein, deren Grad durch die Anzahl der algebraisch von einander unabhängigen Logarithmen bestimmt ist. Seien jetzt

$$f_1(x, \log u, \log v, \log w, \dots), \quad f_2(x, \log u, \log v, \log w, \dots), \\ f_3(x, \log u, \log v, \log w, \dots), \dots$$

gegeben, so wird, wenn F eine algebraische Function bedeutet,

$$F(x, \log u, \log v, \log w, \dots, \log f_1, \log f_2, \log f_3, \dots)$$

eine logarithmische Function zweiter Ordnung sein, oder auch, wenn $y_1, y_2, y_3, \dots$ durch die logarithmischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(5) \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{f_1'}{f_1}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{f_2'}{f_2}, \dots$$

oder die algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung definiert sind, welche man durch successive Differentiation der Gleichungen (5) und Elimination der Transcendenten $\log u, \log v, \dots$ erhält, die Function

$$F(x, x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots)$$

eine logarithmische Function zweiter Ordnung. Ebenso entsteht aus den Functionen

$$F_1(x, \log u, \log v, \dots, \log f_1, \log f_2, \dots), \\ F_2(x, \log u, \log v, \dots, \log f_1, \log f_2, \dots), \dots$$

die logarithmische Function dritter Ordnung

$$\Phi(x, \log u, \log v, \dots, \log f_1, \log f_2, \dots, \log F_1, \log F_2, \dots)$$

oder in ähnlicher Weise wie oben

$$\Phi(x, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots, z_1, z_2, \dots),$$

u. s. w.

Bleiben wir zunächst bei den logarithmischen Transcendenten stehen, welche also Lösungen der angegebenen algebraischen Differentialgleichungen sind, so würde hier, den Abel'schen Untersuchungen über algebraische Gleichungen entsprechend, die Frage aufzuwerfen sein, welche algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung logarithmische Integrale irgend welcher Ordnung besitzen können.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der allgemeinen algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

und stellen die Frage, ob dieselbe die einfachste Form von logarithmischen Transcendenten erster Ordnung, also eine solche Function ersten Grades $y = \varphi(x, \log u)$ zum Integral haben kann, wenn u eine algebraische Function bedeutet. Es ergibt sich aus (6)

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \log u} \frac{u'}{u} = f(x, \varphi(x, \log u)),$$

und da diese Gleichung, weil $\log u$ nicht algebraisch ausdrückbar ist, in dieser Grösse identisch sein muss, also auch bestehen muss, wenn $\log u + c$ für $\log u$ gesetzt wird, worin c eine willkürliche Constante ist, so erhält man aus (7)

$$\frac{d\varphi(x, \log u + c)}{dx} = f(x, \varphi(x, \log u + c)),$$

d. h. es ist auch $y = \varphi(x, \log u + c)$ ein Integral der Differentialgleichung (6) und zwar das allgemeine; man erhält alle Differentialgleichungen erster Ordnung dieser Art durch Elimination von $\log u$ aus den beiden Gleichungen

$$y = \varphi(x, \log u) \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \log u} \frac{u'}{u}.$$

Soll das Integral linear in Bezug auf die logarithmische Function sein, also die Form haben

$$y = U + A \log u,$$

worin A eine Constante bedeutet, so wird die Differentialgleichung (7) in

$$\frac{dU}{dx} + A \frac{u'}{u} = f(x, U + A \log u)$$

übergehen, und somit die f -Function vom zweiten Argumente frei sein müssen, so dass die Untersuchung auf die Frage zurückkommt, wann $\int f(x) dx$ sich in der Form $U + A \log u$ integrieren lässt.

Nehmen wir nun aber für das Integral der Differentialgleichung (6) die allgemeinste Form einer logarithmischen Function erster Ordnung und beliebigen Grades

$$y = \varphi(x, \log u, \log v, \log w, \dots)$$

an, in welcher die Transcendenten $\log u, \log v, \log w, \dots$ als algebraisch von einander unabhängig vorausgesetzt werden, so folgt aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \log u} \frac{u'}{u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \log v} \frac{v'}{v} + \dots = f(x, \varphi(x, \log u, \log v, \dots))$$

wiederum genau wie oben vermöge der Identität dieser Gleichung in den Logarithmen, dass auch

$$y = \varphi(x, \log u + c_1, \log v + c_2, \log w + c_3, \dots)$$

ein Integral von (6) sein muss, und da dasselbe offenbar nur *eine* willkürliche Constante haben darf, so wird die Form des logarithmischen Integrales irgend welcher Ordnung für eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung nothwendig

$$y = \varphi(x, A_1 \log u + A_2 \log v + A_3 \log w + \dots)$$

sein, wenn $A_1, A_2, A_3, \dots$ Constanten bedeuten, und umgekehrt ist klar, dass solche Differentialgleichungen auch wirklich existiren.

Ist die vorgelegte Differentialgleichung jedoch von der zweiten Ordnung

$$(8) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

so ist die Möglichkeit von logarithmischen Integralen erster Ordnung und ersten oder zweiten Grades von der Form

$$y = \varphi(x, \log u), \quad y = \varphi(x, \log u, \log v)$$

unmittelbar zu erkennen, jedoch muss das Integral, wenn mehr als zwei Logarithmen in dasselbe eintreten, die Form

$$y = \varphi(x, A_1 \log u + A_2 \log v + A_3 \log w + \dots, \\ B_1 \log u + B_2 \log v + B_3 \log w + \dots)$$

haben, und ähnlich für algebraische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

Soll nun das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung (6) eine logarithmische Function zweiter Ordnung und zwar zunächst noch ersten Grades von der Form

$$(9) \quad y = F(x, \log u, \log v, \log w, \dots, \log f_1(x, \log u, \log v, \log w, \dots))$$

sein, so folgt durch Einsetzen in (6)

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \log u} \frac{u'}{u} + \frac{\partial F}{\partial \log v} \frac{v'}{v} + \dots \\ + \frac{\partial F}{\partial \log f_1} \frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial \log u} \frac{u'}{u} + \frac{\partial f_1}{\partial \log v} \frac{v'}{v} + \dots \right)}{f_1} = f(x, F),$$

und es muss diese Gleichung wiederum, da $\log f_1$ nicht algebraisch von $x, \log u, \log v, \dots$ abhängen darf, bestehen bleiben, wenn $\log f_1, \log u, \log v, \dots$ durch beliebige Grössen ersetzt werden; substituirt man nun statt dieser Grössen

$$\log f_1 + x, \quad \log u + c_1, \quad \log v + c_2, \quad \dots,$$

worin $x, c_1, c_2, \dots$ willkürliche Constanten bedeuten, so folgt wieder, dass auch

$$y = F(x, \log u + c_1, \log v + c_2, \dots, \\ \log f_1(x, \log u + c_1, \log v + c_2, \dots) + x)$$

ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung ist, was wegen der zu grossen Anzahl willkürlicher Constanten nicht möglich ist, indem selbst im einfachsten Falle die Form

$$y = F(x, \log u + c_1, \log f_1(x, \log u + c_1) + x)$$

noch zwei willkürliche Constanten enthält — es kann somit eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung nie ein logarithmisches Integral zweiter Ordnung besitzen, da die eben gemachten Schlüsse um so mehr für die allgemeinste Form der logarithmischen Functionen zweiter Ordnung gelten. Soll nun eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (8) eine logarithmische Function zweiter Ordnung zum Integral haben, so ist wieder sofort zu sehen, dass dies ohne Beschränkung möglich ist für eine solche ersten Grades in der einfachsten Form

$$y = F(x, \log u, \log f_1(x, \log u)),$$

während, wenn zwei einfache Logarithmen eintreten sollen, das Integral also die Form haben soll

$$y = F(x, \log u, \log v, \log f_1(x, \log u, \log v)),$$

wegen der drei eintretenden Constanten nothwendig die Logarithmen additiv mit constanten Coefficienten verbunden vorkommen müssen, also das Integral die Gestalt haben wird

$$y = F(x, a_1 \log u + a_2 \log v, \quad b_1 \log u + b_2 \log v \\ + b_3 \log f_1(x, a_1 \log u + a_2 \log v)),$$

und dieselbe Form, wenn mehr als zwei einfache Logarithmen eintreten. Soll das Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung jedoch mehr als eine Function $\log f_1$ enthalten, also mindestens vom zweiten Grade sein, so ist wiederum sogleich zu sehen, dass, weil jede logo-logarithmische Function $\log f_1(x, \log u, \dots)$, $\log f_2(x, \log u, \dots)$, ... mindestens zwei willkürliche Constanten einführt, das Integral nothwendig die Form haben muss

$$y = F(x, a_1 \log u + a_2 \log v + \dots, \quad b_1 \log u + b_2 \log v + \dots \\ c_1 \log f_1(x, a_1 \log u + a_2 \log v + \dots) + c_2 \log f_2(x, a_1 \log u + a_2 \log v + \dots) \\ + \dots).$$

Führt man in diesen Schlüssen fort, so sieht man allgemein leicht ein, dass eine algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung nie als Integral eine logarithmische Function von einer höheren Ordnung als der m^{ten} besitzen kann, während die logarithmischen Integrale niederer Ordnung in ihrem Grade dadurch bestimmt sind, dass die nach dem Vorigen zu den selbständigen Logarithmenverbindungen hinzutretenden willkürlichen Constanten die Zahl m nicht übersteigen.

Genau ebenso kann die Exponentialfunction verschiedener Ordnung und verschiedenen Grades vermöge der sie definirenden Differentialgleichungen in die Untersuchung eingeführt, und die Möglichkeit der Integration algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung durch diese Transcendenten erörtert werden.

Vermöge früher von mir aufgestellter Sätze über die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen algebraischer Differentialgleichungen ist es nun leicht diese Methoden zu verallgemeinern.

Sei

$$(11) \quad \omega \left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{d^m x_1}{dx^m} \right) = 0$$

eine algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, die in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreducibel ist und deren eines Integral x_1 nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet, und werde diese Transcendente durch $x_1 = L(x)$ bezeichnet, so werden, wenn $u, v, \dots$ algebraische Functionen von x bedeuten, die Grössen

$$(12) \quad x_1 = L(u), \quad x_2 = L(v), \quad \dots$$

durch die Differentialgleichungen definirt sein,

$$(13) \quad \omega \left(u, x_1, \frac{dx_1}{du}, \dots, \frac{d^m x_1}{du^m} \right) = 0, \\ \omega \left(v, x_2, \frac{dx_2}{dv}, \dots, \frac{d^m x_2}{dv^m} \right), \dots$$

oder nach Reduction der nach u genommenen Differentialquotienten auf die nach x genommenen durch die algebraischen Differentialgleichungen

$$(14) \quad \Omega \left(x, u, u', \dots, u^{(m)}, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \dots, \frac{d^m x_1}{dx^m} \right) = 0, \\ \Omega \left(x, v, v', \dots, v^{(m)}, x_2, \frac{dx_2}{dx}, \dots, \frac{d^m x_2}{dx^m} \right) = 0, \dots$$

und wenn man nunmehr die algebraische Function der eingeschlossenen Grössen bildet

$$(a) \quad f \left(x, x_1, x_2, \dots, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1} x_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} x_2}{dx^{m-1}}, \dots \right),$$

so wird diese analog der früher gegebenen Definition als Transcendente erster Ordnung definirt werden können, deren Grad durch die Anzahl der eintretenden Functionen $x_1, x_2, \dots$ bestimmt wird.

Bildet man nunmehr der Function (a) analog die Functionen

$$f_1, f_2, \dots$$

und den Differentialgleichungen (13) entsprechend

$$(15) \quad \omega \left(f_1, y_1, \frac{dy_1}{df_1}, \dots, \frac{d^m y_1}{df_1^m} \right) = 0,$$

$$\omega \left(f_2, y_2, \frac{dy_2}{df_2}, \dots, \frac{d^m y_2}{df_2^m} \right) = 0, \dots$$

oder nach (14)

$$(16) \quad \Omega \left(x, f_1, f_1', \dots, f_1^{(m)}, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^m y_1}{dx^m} \right) = 0,$$

$$\Omega \left(x, f_2, f_2', \dots, f_2^{(m)}, y_2, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^m y_2}{dx^m} \right) = 0, \dots$$

so wird wieder, wenn F eine algebraische Function bedeutet,

$$(b) \quad F \left(x, x_1, x_2, \dots, \frac{d^{m-1} x_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} x_2}{dx^{m-1}}, \dots, y_1, y_2, \dots, \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \dots \right)$$

eine Transcendente zweiter Ordnung sein, deren Grad von der Anzahl der Grössen $y_1, y_2, \dots$ abhängt; mit Hülfe einer Reihe ähnlicher Functionen

$$F_1, F_2, \dots$$

und der entsprechenden Differentialgleichungen

$$(17) \quad \omega \left(F_1, z_1, \frac{dz_1}{dF_1}, \dots, \frac{d^m z_1}{dF_1^m} \right) = 0,$$

$$\omega \left(F_2, z_2, \frac{dz_2}{dF_2}, \dots, \frac{d^m z_2}{dF_2^m} \right) = 0, \dots$$

oder der (16) analogen, wird man die Transcendente dritter Ordnung

$$(c) \quad \Phi \left(x, x_1, x_2, \dots, \frac{d^{m-1} x_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} x_2}{dx^{m-1}}, \dots, y_1, y_2, \dots, \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \dots, \right.$$

$$\left. z_1, z_2, \dots, \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}}, \dots \right)$$

definiren, u. s. w.

Sei nun

$$(18) \quad \Psi \left(x, t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2 t}{dx^2}, \dots, \frac{d^\mu t}{dx^\mu} \right) = 0$$

eine algebraische Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung und zu untersuchen, ob diese die betrachtete Transcendente in irgend einer Ordnung und irgend einem Grade zum Integrale haben kann, so wird, wenn t_1 die oben definirte Transcendente sein soll und z. B. von der dritten Ordnung, dieses Integral von der Form (c), also

$$(19) \quad t_1 = \Phi \left(x, x_1, x_2, \dots, \frac{d^{m-1} x_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} x_2}{dx^{m-1}}, \dots, y_1, y_2, \dots, \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \dots, \right.$$

$$\left. z_1, z_2, \dots, \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} z_2}{dx^{m-1}}, \dots \right)$$

sein müssen. Nun können wir die Schlüsse, welche wir oben für die logarithmischen Transcendenten verschiedener Ordnung unmittelbar aus der Eigenschaft des Logarithmus hergeleitet haben, hier vermöge des Satzes durchführen, dass, wenn zwischen Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung stattfindet, diese erhalten bleibt, wenn man statt aller Integrale mit Ausnahme eines beliebige particuläre Integrale ihrer resp. Differentialgleichungen setzt, und nur für das eine ein passendes Integral seiner entsprechenden Differentialgleichung substituirt — vorausgesetzt, dass die Differentialgleichungen, welche jene willkürlich zu ersetzenden Integrale definiren, in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sind und zwischen den in die Relation eintretenden Integralen und deren Ableitungen bis zu einer Ordnung hin, die um eine Einheit kleiner ist als die Ordnung der Differentialgleichung, keine algebraische Relation besteht. Da nun die letzten Voraussetzungen in Folge der Annahme der Irreductibilität der Differentialgleichungen, welche die Transcendenten der verschiedenen Ordnungen definirten, erfüllt sind, so wird sich aus (19), wenn $x'_1, x'_2, \dots, y'_1, y'_2, \dots, z'_1, z'_2, \dots$ beliebige particuläre Integrale der Differentialgleichungen (14), (16) ... bedeuten, während t'_1 ein bestimmtes zugehöriges Integral der Differentialgleichung (18) vorstellt,

$$(20) \ t'_1 = \Phi \left(x, x'_1, x'_2, \dots, \frac{d^{m-1}x'_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1}x'_2}{dx^{m-1}}, \dots, y'_1, y'_2, \dots, \frac{d^{m-1}y'_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1}y'_2}{dx^{m-1}}, \dots, \right. \\ \left. z'_1, z'_2, \dots, \frac{d^{m-1}z'_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1}z'_2}{dx^{m-1}}, \dots \right)$$

ergeben, und es wird sich in jedem gegebenen Falle darum handeln, aus den unendlich vielen Formen, welche die Gleichung (20) vermöge der Substitution der willkürlichen particulären Integrale der die Transcendenten verschiedener Ordnung definirenden Differentialgleichungen und der Integrale $t_1, t'_1, \dots$ der zu untersuchenden Differentialgleichung (18) annimmt, einerseits die Möglichkeit, andererseits die Form der Beziehung (19) festzustellen, wie dies leicht für die logarithmischen- und Exponential-Functionen verschiedener Ordnung möglich war. Aehnlich wie für diese elementaren Transcendenten kann man vielfach aus der Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung auf die Unmöglichkeit schliessen, dass dieselbe zum Integrale eine Transcendente von gegebener Art und von bestimmter Ordnung besitze.

Es mag endlich noch mit Rücksicht auf unsere Ausgangsbetrachtungen bemerkt werden, dass der oben ausgesprochene Satz von der Unveränderlichkeit der Gleichung (19) die Verallgemeinerung der von Abel gemachten Bemerkung ist, dass, wenn eine algebraische Gleichung algebraisch in der Form

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_1 p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

auflösbar ist, dann auch dieser Ausdruck eine Lösung der Gleichung bleibt, wenn $p^{\frac{1}{n}}$ durch irgend eine andere Lösung der binomischen Gleichung

$$z^n - p = 0$$

ersetzt wird, worin y eine Function μ^{ter} , p eine solche $\mu - 1^{\text{er}}$ Ordnung ist. Die von Abel daraus gezogene Folgerung, dass jeder Theil der Auflösung einer algebraisch auflösbaren Gleichung sich als rationale Function der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lasse, würde jedoch, wenn, wie zufolge der obigen Betrachtungen

nothwendig ist, an die Stelle von $p^{\frac{1}{n}}$, $p^{\frac{2}{n}}$, $\dots$, $p^{\frac{n-1}{n}}$ die in (19) vorkommende Transcendente 3^{ter} Ordnung z_1 und deren Ableitungen

$\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{d^2 z_1}{dx^2}$, $\dots$, $\frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}$, an Stelle der Lösungen y der vorgelegten

algebraischen Gleichung die particulären Integrale t der algebraischen Differentialgleichung (18) gesetzt und die rationale Beziehung durch eine algebraische ersetzt würde, nur in bestimmten Fällen linearer Differentialgleichungen ein Analogon finden.

Heidelberg, den 15. October 1886.