Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér.

Von

Otto Toeplitz in Kiel.

Herr Fejér hat[1]) den folgenden Satz bewiesen:

Ist $f(t)$, $g(t)$ ein Paar reeller, stetiger Funktionen der reellen Variabeln t mit der Periode 2π, sind $f_n(t)$, $g_n(t)$ die n-ten arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Entwicklungen, und ist ferner $\mathfrak{K}$ der kleinste konvexe Bereich, der die durch die Parameterdarstellung $x = f(t)$, $y = g(t)$ gegebene Kurve ganz in sich enthält, $\mathfrak{K}_n$ der entsprechende Bereich für die Kurve $x = f_n(t)$, $y = g_n(t)$, so ist $\mathfrak{K}_n$ in $\mathfrak{K}$ enthalten.

Zu diesem Satze soll im folgenden ein Analogon aus der Algebra gewonnen werden. Zur Aufstellung eines solchen Analogons wurde ich durch dasselbe Übertragungsprinzip geführt, durch das ich in meiner Habilitationsschrift[2]) eine Verbindung zwischen der Theorie der Fourierschen Reihen und einer gewissen Klasse bilinearer Formen hergestellt habe. Aber während dieses Übertragungsprinzip wie überhaupt die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen bisher meist dazu gedient hat, um gewisse Hilfsmittel der Algebra den Problemen der Analysis nutzbar zu machen, will ich hier an einem einfachen Beispiel zeigen, wie man auch umgekehrt dieses Prinzip verwenden kann, um, von Sätzen der Analysis ausgehend, zu algebraischen Tatsachen zu gelangen.

Die Arbeit setzt die Kenntnis der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen nicht voraus, mit Ausnahme des letzten Paragraphen; sie handelt im übrigen nur von Bilinearformen mit n Variabelnpaaren.

---

[1]) Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 38 (1914), S. 79–97.

[2]) Math. Annalen 70 (1911), S. 351–376; Gött. Nachr. 1910, math.-phys. Kl. S. 489–506; Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32 (1911), S. 191–192.

§ 1.

Der Satz von Bendixson und Hirsch.

Es ist bekannt, daß die Eigenwerte einer reellen quadratischen Form $\Sigma\, a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha})$$

alle reell sind, und daß die einer alternierenden (schiefsymmetrischen, $a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 0$) Bilinearform alle rein-imaginär sind. Man kann diese beiden Tatsachen einer einzigen subsumieren, wenn man den Begriff der „Hermiteschen Form" heranzieht. Man nennt eine Bilinearform

$$C = C(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

eine Hermitesche Form, wenn sie mit ihrer „begleitenden" Form

$$\bar{C}' = \bar{C}'(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \bar{c}_{\beta\alpha}\, x_\alpha\, y_\beta \text{ [3]}$$

identisch ist, also $c_{\alpha\beta} = \bar{c}_{\beta\alpha}$. Ist $c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + i\, b_{\beta\alpha}$, so ist

$$C = \Sigma\,(a_{\alpha\beta} + i\, b_{\alpha\beta})\, x_\alpha\, y_\beta = S + i\, T$$
$$\bar{C}' = \Sigma\,(a_{\beta\alpha} - i\, b_{\beta\alpha})\, x_\alpha\, y_\beta = S' - i\, T',$$

und aus $C = \bar{C}'$ folgt durch Vergleichung von reellem und imaginärem $S = S'$, $T = -T'$, d. h. jede Hermitesche Form ist von der Gestalt $S + i\, T$, wo S eine reelle symmetrische, T eine reelle alternierende Form ist. Mithin enthält der

Satz 1: *Die Eigenwerte einer Hermiteschen Form sind alle reell.*

die beiden eingangs erwähnten Tatsachen als Spezialfälle, je nachdem man $T = 0$ oder $S = 0$ wählt.

Herr Bendixson[4]) hat eine Verallgemeinerung hiervon für beliebige Bilinearformen mit reellen Koeffizienten aufgestellt, und Herr Hirsch[5]) hat bemerkt, daß sie sich unmittelbar auf Bilinearformen mit komplexen Koeffizienten überträgt. Es sei die Bemerkung vorangeschickt:

---

[3]) Überstreichen soll durchweg den Übergang in konjugiert-imaginären Werten andeuten, der Akzent die Vertauschung der beiden Variabelnreihen in einer Bilinearform.

[4]) Acta mathematica 25 (1902), S. 359—366.

[5]) Acta mathematica 25 (1902), S. 367—370.

Satz 2. *Jede Bilinearform C läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form $C = H + iK$ darstellen, wo H, K Hermitesche Formen sind.*

In der Tat braucht man nur

$$H = \frac{C + \bar{C}'}{2}, \quad K = \frac{C - \bar{C}'}{2i}$$

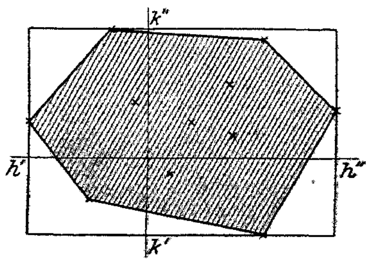
zu setzen, um auszurechnen, daß $C = H + iK$ ist, und daß H und K Hermitesche Formen sind. Ließe sich aber C noch auf eine zweite Art in die Gestalt $C = H_1 + iK_1$ setzen, so wäre

$$(H - H_1) + i(K - K_1) = 0,$$

und durch Übergang zum konjugiert Imaginären und Vertauschung der beiden Variabelnreihen würde daraus das gleichzeitige Bestehen der anderen Relation

$$(H - H_1) - i(K - K_1) = 0$$

folgen; die Addition und Subtraktion beider Relationen also würde $H_1 = H$, $K_1 = K$ ergeben, d. h. die Eindeutigkeit jener Darstellung.



Satz 3 (Satz von Bendixson und Hirsch). *Ist C irgendeine Bilinearform, sind H, K ihre beiden durch Satz 2 eindeutig bestimmten Hermiteschen Komponenten und sind alle Eigenwerte von H, die nach Satz 1 reell sind, zwischen h' und h'', alle von K zwischen k' und k'' gelegen, so konstruiere man das parallel den Koordinatenachsen orientierte Rechteck, dessen vertikale Seiten die Abszissen h' und h'', dessen horizontale Seiten die Ordinaten k', k'' haben. Alsdann liegen alle Eigenwerte von C innerhalb dieses Rechtecks.*

Es ist klar, daß Satz 3 sich auf Satz 1 reduziert, wenn C eine Hermitesche Form, also $K = 0$ ist und das Rechteck sich auf ein Stück der reellen Achse zusammenzieht.

Der Beweis ergibt sich sehr einfach aus der bekannten Bemerkung, daß die Werte, die eine Hermitesche Form $H(x, y)$ für konjugiert-imaginäre Werte der beiden Variabelnreihen $(y_\alpha = \bar{x}_\alpha)$ und unter der Nebenbedingung $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n = 1$ annimmt, und die alle reell sind, genau die Strecke zwischen ihrem untersten und ihrem obersten Eigenwert ausfüllen. Ist nun λ irgendein Eigenwert von C, so kann man — das ist die Definition des Eigenwertes — n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ bestimmen, so daß

$$\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}\, x_\beta = \lambda\, x_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

ist, und da hierbei nur die Verhältnisse der Größen $x_1, \ldots, x_n$ festgelegt sind, kann man über ihren Proportionalitätsfaktor noch derart verfügen, daß zugleich $x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1$ ist. Multipliziert man die α-te Gleichung mit $\bar{x}_\alpha$ und summiert über α, so hat man

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\, \bar{x}_\alpha\, x_\beta = \lambda \sum_\alpha x_\alpha\, \bar{x}_\alpha = \lambda,$$

und daher $\lambda = C(\bar{x}, x) = H(\bar{x}, x) + i\,K(\bar{x}, x)$, während $x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1$ ist. Der reelle Teil von λ liegt also zwischen den äußersten Eigenwerten h', h'' von H, der imaginäre Teil zwischen denen k', k'' von K, d. h. λ liegt in dem in der Figur gezeichneten Rechteck.

Ich habe den Beweis hier reproduziert, weil er in dieser kurzen Form unmittelbar erkennen läßt, daß man Satz 3 eine für das Folgende wesentliche Erweiterung erteilen kann. Man bedarf hierzu der folgenden Begriffsbildung:

Definition. *Unter dem Wertvorrat* $\mathfrak{W}$ *einer Bilinearform* $C(x, y)$ *soll die Gesamtheit der reellen und komplexen Werte verstanden werden, die der Ausdruck*

$$C(x, \bar{x}) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, \bar{x}_\beta$$

unter der Nebenbedingung $x_1 \bar{x}_1 + \ldots + x_n \bar{x}_n = 1$ *annimmt.*

Der Wertvorrat einer Hermiteschen Form ist danach ein Stück der reellen Achse, und den Satz 3 kann man auf Grund des eben gegebenen Beweises unmittelbar so erweitern:

Satz 4. *Die Eigenwerte einer beliebigen Bilinearform* C *gehören alle zu ihrem Wertvorrat* $\mathfrak{W}$.

§ 2.

Das Analogon des Fejérschen Satzes.

Definition. *Eine Bilinearform* $C(x, y)$ *heiße normal, wenn sie mit ihrer begleitenden Form* $\bar{C}'$ *vertauschbar ist, d. h. wenn*

$$\sum_{p=1}^{n} c_{\alpha p}\, \bar{c}_{\beta p} = \sum_{p=1}^{n} \bar{c}_{p\alpha}\, c_{p\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

gilt.

Satz 5. *Ist* $\mathfrak{K}$ *der kleinste konvexe Bereich, der alle Eigenwerte der Bilinearform* C *umschließt, ist* $\mathfrak{W}$ *der Wertvorrat von* C *und ist* C *normal, so ist* $\mathfrak{W}$ *mit* $\mathfrak{K}$ *identisch.*

Der Beweis ergibt sich in sehr einfacher Weise aus dem folgenden Satze von Herrn I. Schur[6]):

Eine beliebige Bilinearform $C(x, y)$ kann durch eine „unitäre" Transformation der Veränderlichen, d. h. durch eine Transformation

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} w_{\alpha\beta}\xi_\beta, \qquad y_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} w_{\beta\alpha}\eta_\beta,$$

für die

$$\sum_p w_{\alpha p}\overline{w}_{\beta p} = e_{\alpha\beta}, \qquad \sum_p w_{p\alpha}\overline{w}_{p\beta} = e_{\alpha\beta},$$

d. h. $= 0$ für $\alpha \neq \beta$, $= 1$ für $\alpha = \beta$ gilt, in eine andere Bilinearform $\Gamma(\xi, \eta)$ transformiert werden, deren Koeffizientenmatrix folgendermaßen beschaffen ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \gamma_{21} & \lambda_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Die Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind dann von selbst die Eigenwerte von C (und zugleich von Γ).

Ist C normal, so ist — am bequemsten mit Hilfe des Matrizenkalküls — sofort einzusehen, daß auch die transformierte Form Γ normal ist. Denn aus

$$\Gamma = \overline{W}'CW, \qquad W\overline{W}' = \overline{W}'W = E$$

folgt

$$\Gamma\overline{\Gamma}' = (\overline{W}'CW)(\overline{W}'\overline{C}'W) = \overline{W}'C\overline{C}'W,$$
$$\overline{\Gamma}'\Gamma = (\overline{W}'\overline{C}'W)(\overline{W}'CW) = \overline{W}'\overline{C}'CW;$$

ist also $C\overline{C}' = \overline{C}'C$ (d. h. C normal), so auch $\Gamma\overline{\Gamma}' = \overline{\Gamma}'\Gamma$.

Aus der besonderen Beschaffenheit der Koeffizientenmatrix von Γ ergibt sich nun, daß Γ nur dann normal sein kann, wenn alle unterhalb der Diagonale stehenden $\gamma_{\alpha\beta} = 0$ sind. Denn ist Γ normal, so ist zunächst die Quadratsumme der Beträge der Elemente der 1. Zeile gleich der Quadratsumme der Beträge der Elemente der 1. Kolonne, also:

$$\lambda_1\overline{\lambda}_1 = \lambda_1\overline{\lambda}_1 + \gamma_{21}\overline{\gamma}_{21} + \cdots + \gamma_{n1}\overline{\gamma}_{n1},$$

und da dies lauter reelle, positive Summanden sind, ist $\gamma_{21} = 0, \ldots, \gamma_{n1} = 0$. Aus der entsprechenden Betrachtung für die 2. Zeile und 2. Kolonne folgert man sodann $\gamma_{32} = 0, \ldots, \gamma_{n2} = 0$ usf. Man erhält so die

[6]) Math. Annalen 66 (1909), S. 488–510, insbes. § 1.

Folgerung aus dem Satz von I. Schur[7]). *Eine Bilinearform ist dann und nur dann unitär auf eine Diagonalform, d. h. auf eine Bilinearform der Gestalt*

$$\Gamma(x, y) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$$

transformierbar, wenn sie normal ist.

Aus dieser Folgerung ergibt sich der Beweis von Satz 5 in der Tat nun in sehr einfacher Weise. Denn die Form $\Gamma(x, y)$, die aus $C(x, y)$ durch unitäre Transformation hervorgegangen ist, hat offenbar denselben Wertvorrat $\mathfrak{W}$ und auch dieselben Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ wie C. Ist nun C normal, so ist, nach der Folgerung aus dem Satz von Schur,

$$\Gamma(x, \bar{x}) = \lambda_1 x_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n x_n \bar{x}_n;$$

es ist aus diesem einfachen Ausdruck unmittelbar zu ersehen, daß er unter der Einschränkung $x_1\bar{x}_1 + \dots + x_n\bar{x}_n = 1$ alle diejenigen komplexen Werte annimmt, die das kleinste konvexe, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ enthaltende Polygon ausfüllen (vgl. die obige Figur, in der dieses Gebiet schraffiert ist).

§ 3.

Das Verhältnis von Wertvorrat und Maximum einer Bilinearform.

Weit geläufiger als der bisher betrachtete Wertvorrat $\mathfrak{W}$[8]) einer Bilinearform $C = \Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ ist ein anderer Begriff: der Wertvorrat $\mathfrak{M}$ der Bilinearform, in der nicht $y_\alpha = \bar{x}_\alpha$ gesetzt sind, sondern unabhängig voneinander variieren und nur an die beiden Nebenbedingungen $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, $\Sigma y_\alpha \bar{y}_\alpha = 1$ gebunden sind. Offenbar ist $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{M}$ enthalten. $\mathfrak{M}$ ist, wie man leicht sieht, ein Kreis um O; sein Radius M ist die gewöhnlich als „*Maximum der Bilinearform*" bezeichnete Größe. Ist andererseits W der Radius des kleinsten Kreises um O, der $\mathfrak{W}$ ganz enthält, so ist offenbar $W \leq M$. Das Verhältnis von W und M wird durch die beiden folgenden Sätze aufgeklärt.

Satz 6. *Es ist stets* $W \geqq \frac{1}{2} M$.

Beweis[9]). Es ist

$$C(x+y,\ \bar{x}+\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) + C(x,\bar{y}) + C(y,\bar{x}),$$
$$C(x+iy,\ \bar{x}-i\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) - iC(x,\bar{y}) + iC(y,\bar{x}),$$

[7]) Diese unmittelbare Folgerung, die Herr I. Schur a. a. O. nicht ausdrücklich formuliert hat, war ihm so gut wie mir seit langem bekannt. Ich benutze diese Gelegenheit, um in dieser Weise eine Bemerkung des Herrn A. Ostrowski zu ergänzen [Math. Annalen 78 (1917), S. 118, Anm.], der die „Folgerung" benutzt und sich dabei allein auf mich bezieht.

[8]) Die Definition dieses Begriffs findet sich am Ende von § 1 dieser Arbeit.

[9]) Der Beweis ist einer Schlußweise von E. Hellinger, Math. Annalen 69 (1909), S. 303, nachgebildet.

$$C(x-y,\ \bar{x}-\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) - C(x,\bar{y}) - C(y,\bar{x}),$$
$$C(x-iy,\ \bar{x}+i\bar{y}) = C(x,\bar{x}) + C(y,\bar{y}) + iC(x,\bar{y}) - iC(y,\bar{x});$$

man multipliziere bzw. mit $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}i$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}i$ und addiere:

$$\tfrac{1}{4}C(x+y,\ \overline{x+y}) + \tfrac{1}{4}iC(x+iy,\ \overline{x+iy}) - \tfrac{1}{4}C(x-y,\ \overline{x-y})$$
$$-\tfrac{1}{4}iC(x-iy,\ \overline{x-iy}) = C(x,\bar{y}).$$

Nun kann man aus der Tatsache, daß W das Maximum von $|C(x,\bar{x})|$ ist unter der Nebenbedingung $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, unmittelbar entnehmen, daß $C(x,\bar{x}) \leqq W \Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha$ für beliebige x_α gilt. Also ist für beliebige x_α, y_α:

$$|C(x,\bar{y})| \leqq \tfrac{1}{4} W \{\Sigma(x_\alpha + y_\alpha)(\bar{x}_\alpha + \bar{y}_\alpha) + \Sigma(x_\alpha + iy_\alpha)(\bar{x}_\alpha - i\bar{y}_\alpha)$$
$$+ \Sigma(x_\alpha - y_\alpha,\ \bar{x}_\alpha - \bar{y}_\alpha) + \Sigma(x_\alpha - iy_\alpha,\ \bar{x}_\alpha + i\bar{y}_\alpha)\}$$
$$\leqq \tfrac{1}{4} W \{4\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha + 4\Sigma y_\alpha \bar{y}_\alpha\} = W(\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha + \Sigma y_\alpha \bar{y}_\alpha).$$

Wählt man nun x_α, y_α so, daß $C(x,\bar{y})$ gerade das Maximum M seines Betrages erreicht, während $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, $\Sigma y_\alpha \bar{y}_\alpha = 1$ sind, so erhält man in der Tat $M \leqq 2W$, also $W \geqq \frac{1}{2}M$.

Ich betrachte nun das Beispiel der speziellen Bilinearform $x_1 y_2$ von 2 Paaren von Veränderlichen. Ihre Eigenwerte sind die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda, & 1 \\ 0 & ,\ 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = 0;$$

ihren Wertvorrat $\mathfrak{W}$, d. h. die Werte von $x_1\bar{x}_2$ unter $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1$ bestimme ich, indem ich

$$x_1 = \cos t\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad x_2 = \sin t\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

setze; dann wird

$$x_1\bar{x}_2 = \cos t \sin t\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \tfrac{1}{2}\sin 2t\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

und nimmt also, wenn t, φ_1, φ_2 in jeder Weise als reelle Zahlen variieren, alle Werte der Kreisfläche vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt an. Endlich ist $M = 1$, da $|x_1 y_2| = |x_1|\,|y_2| \leqq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}\sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} \leqq 1$ ist und für $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ den Wert 1 erreicht.

Satz 7. *Das Beispiel der Bilinearform $x_1 y_2$ zeigt zugleich:*

1. *daß der Wertvorrat $\mathfrak{W}$ bei einer nicht-normalen Bilinearform nicht der kleinste konvexe Bereich zu sein braucht, der die Eigenwerte umschließt* (denn diese reduzieren sich auf den Nullpunkt, während $\mathfrak{W}$ der Kreis vom Radius $\frac{1}{2}$ um 0 ist);
2. *daß tatsächlich $W = \frac{1}{2}M$ sein kann, daß also die Konstante $\frac{1}{2}$ in Satz 6 durch keine größere ersetzt werden kann* (denn es ist $W = \frac{1}{2}$, $M = 1$)[10].

[10] (Anm. bei der Korrektur.) Herr I. Schur, dem das Manuskript der Arbeit vorgelegen hat, vermag die Bemerkungen dieses Satzes wesentlich zu vertiefen, indem er sämtliche Bilinearformen charakterisiert, bei denen $W = M$ ist, und andererseits sämtliche, bei denen $W = \frac{1}{2}M$ ist.

§ 4.

Der Rand des Bereiches $\mathfrak{W}$.

Auf Grund des widerlegenden Beispiels aus Satz 7 ist es keine selbstverständliche Folgerung aus Satz 5, wenn ich jetzt für jede, auch nichtnormale Bilinearform beweise:

Satz 8. *Der äußere Rand des Bereiches $\mathfrak{W}$ ist eine konvexe Kurve.*

Zum Beweise stelle ich C gemäß Satz 2 in der Form $H + iK$ dar, wo H und K Hermitesche Formen sind, und transformiere in bekannter Weise H durch eine unitäre Transformation auf die Gestalt $\mathsf{H} = \mu_1 \xi \bar{\xi}_1 + \dots + \mu_n \xi_n \bar{\xi}_n$; $\mu_1, \dots, \mu_n$ werden dann reell sein, die Eigenwerte von H und H zugleich; sie mögen der Größe nach geordnet sein: $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \dots \geqq \mu_n$. Dieselbe unitäre Transformation verwandelt K in irgendeine andere Hermitesche Form $\mathsf{K}(\xi, \eta)$ und C in eine Bilinearform $\Gamma(\xi, \eta)$, die denselben Wertvorrat wie $C(x, y)$ hat:

$$\Gamma(\xi, \eta) = \mathsf{H}(\xi, \eta) + i\,\mathsf{K}(\xi, \eta) = \mu_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \mu_n \xi_n \eta_n + i\,\mathsf{K}(\xi, \eta).$$

μ_1 ist der rechtseste von allen Werten, die $\mathsf{H}(\xi, \bar{\xi})$ für $\Sigma \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha = 1$ annehmen kann; und da $\mathsf{H}(\xi, \bar{\xi})$ der reelle Teil von $\Gamma(\xi, \bar{\xi})$ ist, liegt $\mathfrak{W}$ ganz links von der Vertikalen mit der Abszisse μ_1 und erreicht diese eben.

Ist nun μ_1 ein einfacher Eigenwert von H, also $\mu_1 > \mu_2 \geqq \dots \geqq \mu_n$, so nimmt H den Wert μ_1 nur an, wenn $\xi_1 \bar{\xi}_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\dots$, $\xi_n = 0$ ist; nur für dieses Wertsystem erreicht also $\Gamma(\xi, \eta)$ die genannte Vertikale. Nun hat der imaginäre Teil von Γ, d. i. $\mathsf{K}(\xi, \bar{\xi})$, für jenes Wertsystem einen ganz bestimmten Wert. Also enthält die Vertikale, wenn μ_1 einfacher Eigenwert von H ist, nur einen einzigen Punkt von $\mathfrak{W}$. Ist jedoch μ_1 mehrfacher Eigenwert, etwa $\mu_1 = \dots = \mu_\alpha > \mu_{\alpha+1} \geqq \dots \geqq \mu_n$, so erreicht $\Gamma(\xi, \bar{\xi})$ die Vertikale, wenn $\xi_{\alpha+1} = 0, \dots, \xi_n = 0$ und $\xi_1 \bar{\xi}_1 + \dots + \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha = 1$ ist. $\mathsf{K}(\xi, \bar{\xi})$ wird für diese Wertsysteme im allgemeinen nicht nur einen einzigen Wert annehmen; aber es reduziert sich auf eine Hermitesche Form von $\xi_1, \dots, \xi_\alpha$ allein, die lediglich an die Bedingung $\xi_1 \bar{\xi}_1 + \dots + \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha = 1$ gebunden sind, und die Werte, die $\mathsf{K}(\xi, \bar{\xi})$ dabei annimmt, werden also, wegen der beim Beginne des Beweises von Satz 3 erwähnten bekannten Tatsache, eine zusammenhängende Strecke erfüllen.

Das bisherige Ergebnis ist, daß die Vertikale, die den Bereich $\mathfrak{W}$ eben von rechts her berührt, von ihm entweder nur einen einzigen Punkt oder eine einzige zusammenhängende Strecke enthält. Versteht man aber nun unter η irgendeine komplexe Zahl vom absoluten Betrage 1 und wendet man auf $\eta C(x, y)$ dieselbe Betrachtung an, wie eben auf $C(x, y)$, so ist der Wertvorrat dieser Form gegen den von C um den zu η gehörigen Arcus um O gedreht, und es folgt, daß für jede andere Richtung bei $\mathfrak{W}$ dasselbe gilt, was bisher für die vertikale Richtung gezeigt wurde. Daraus geht aber hervor, daß die äußere Begrenzung des Bereichs $\mathfrak{W}$ eine konvexe Kurve ist, die natürlich stückweise auch aus geradlinigen Strecken bestehen kann.

§ 5.

Der binäre Fall.

Erweiterung der Aufgabe: der Bereich $\mathfrak{Z}_n$.

Die Frage, ob $\mathfrak{W}$ das ganze Innere seines äußeren, konvexen Randes ausfüllt, oder Löcher hat, ist in § 4 offen geblieben. Ich nehme jetzt eine Erweiterung der ganzen Fragestellung vor, welche für den binären Fall gestattet, das Fehlen solcher Löcher einzusehen, aber auch zugleich die Schwierigkeiten aufdeckt, die im allgemeinen Falle aus der Möglichkeit der Löcher erwachsen.

Anstatt zweier Hermitescher Formen H, K betrachte ich ν Hermitesche Formen[11]) $H_1, \ldots, H_\nu$, setze $u_1 = H_1(x, \bar{x}), \ldots, u_\nu = H_\nu(x, \bar{x})$ und deute $u_1, \ldots, u_\nu$ als reelle Koordinaten im Raume von ν Dimensionen; variieren die x_α nun gemäß der Einschränkung $\Sigma x_\alpha \bar{x}_\alpha = 1$, so erfüllen die $u_1, \ldots, u_\nu$ einen Bereich, dessen äußere Begrenzung, genau wie in § 4, konvex ist. Für $\nu = 2$ ist dies genau die bisherige Aufgabe. Es wird aber andererseits genügen, ν gleich der Höchstzahl linear unabhängiger Hermitescher Formen zu wählen, die bei n Variabeln auftreten können, nämlich $\nu = n^2$. Denn alle niedrigeren Fälle kann man aus diesem höchsten durch Projektion ableiten. In diesem höchsten Falle aber erhält man einen bis auf lineare homogene Transformationen völlig bestimmten Bereich im Raume von n^2 Dimensionen, der $\mathfrak{Z}_n$ heißen möge. Bisher steht von ihm fest, daß er ganz im Endlichen liegt und von außen konvex begrenzt ist. Für das binäre Gebiet gilt nun:

Satz 9. *Der Bereich $\mathfrak{Z}_2$ ist die Oberfläche eines gewöhnlichen Ellipsoids, also in einem dreidimensionalen linearen Teilraum des Raumes von 4 Dimensionen gelegen.*

Seien nämlich

$$u_1 = x_1\bar{x}_1, \quad u_2 = x_2\bar{x}_2, \quad u_3 = \tfrac{1}{2}(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1), \quad u_4 = \frac{1}{2i}(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1)$$

als die 4 linear unabhängigen binären Hermiteschen Formen ausgewählt, so wird $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 = 1$ genau dann erfüllt sein, wenn man

[11]) In der analogen Richtung liegt eine Verallgemeinerung, die Herr Fejér in seiner Arbeit von $\nu = 2$ auf $\nu = 3$ vornimmt.

$$x_1 = \cos t\, e^{i\varphi_1}, \qquad x_2 = \sin t\, e^{i\varphi_2}$$

setzt und t, φ_1, φ_2 in jeder Weise zwischen 0 und 2π reell variiert. Es wird dabei

$$u_1 = \cos^2 t,\ u_2 = \sin^2 t,\ u_3 = \tfrac{1}{2}\sin 2t \cos(\varphi_1 - \varphi_2),\ u_4 = \tfrac{1}{2}\sin 2t \sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Statt φ_1, φ_2 einzeln ist also nur die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ wesentlich, $\mathfrak{Z}_2$ wird nicht drei-, sondern zweidimensional. Nun ist andererseits

$$u_3^2 + u_4^2 = u_1 u_2, \qquad u_1 + u_2 = 1,$$

und man übersieht leicht, daß die ganze Oberfläche dieses Ellipsoids durch die voranstehende Parameterdarstellung ausgefüllt wird.

Den Fall $\nu = 2$ erhält man durch Parallelprojektion dieses Ellipsoids; als Projektionszentrum dient eine unendlichferne Gerade, als Projektionsstrahlen die ∞^2 zweidimensionalen Ebenen durch jene unendlichferne Gerade, und es wird auf eine zweidimensionale Ebene projiziert. Die Projektion ist daher entweder die Fläche einer Ellipse oder eine Strecke oder ein Punkt. Kombiniert man dieses Resultat mit einer einfachen Rechnung, die man im binären Falle an die durch den Schurschen Satz gegebene Normalform anknüpfen kann, so hat man:

Satz 10. *Für eine binäre Bilinearform ist $\mathfrak{W}$ die Fläche einer Ellipse mit den beiden Eigenwerten der Form als Brennpunkten, die sich dann und nur dann auf die Strecke zwischen diesen beiden Eigenwerten reduziert, wenn die Form normal ist.*

Für den allgemeinen Fall $\nu > 2$ oder $n > 2$ ist aber klar geworden, daß der Bereich hohl sein kann. Ob dies schon für $\nu = 2$, $n > 2$ eintreten kann, bleibt dahingestellt, wenn auch unwahrscheinlich.

§ 6.

Der Zusammenhang mit dem Satze von Fejér.

Der Weg, auf dem ich von dem Fejérschen Satze aus zur Aufstellung von Satz 5 gelangte, ist der folgende. Unter Einführung der komplexen Variabeln $z = \cos t + i \sin t$ füge ich das Paar von Fourierschen Reihen zu einer Laurentschen Entwicklung $\Sigma c_n z^n = f(t) + ig(t)$ zusammen; dieser ordne ich die Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen $\Sigma c_{\beta-\alpha} x_\alpha y_\beta$ zu (α, β laufen von $-\infty$ bis $+\infty$), eine sog. L-Form [12], und beweise:

1. Das Spektrum dieser L-Form, d. h. die Gesamtheit ihrer Eigenwerte, ist der Wertvorrat der Funktion $\Sigma c_n z^n$ für $|z| = 1$ [13]).

[12]) Math. Annalen 70, S. 354.

[13]) A. a. O. Satz 5, S. 360.

2. Das n-te arithmetische Mittel der Reihe $\Sigma c_n z^n$, d. h. der Ausdruck

$$c_0 + \frac{n-1}{n}\left(c_1 z + c_{-1}\frac{1}{z}\right) + \ldots + \frac{1}{n}\left(c_{n-1} z^{n-1} + c_{-(n-1)}\frac{1}{z^{n-1}}\right),$$

ist für $|z| = 1$ ein Wert des Wertvorrats der L-Form. Denn setzt man in dieser

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}},\ x_2 = \frac{\bar{z}}{\sqrt{n}},\ \ldots,\ x_n = \frac{\bar{z}^{n-1}}{\sqrt{n}},\ x_{n+1} = 0,\ \ldots,$$

so wird in der Tat $C(x, \bar{x})$ gleich dem eben aufgeführten Mittel, während $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots = 1$ ist[14]).

3. Jede L-Form ist normal[15]). Denn je zwei L-Formen sind miteinander vertauschbar, und die begleitende Form einer L-Form ist selbst wieder eine L-Form; also ist jede L-Form mit ihrer begleitenden vertauschbar.

Der Fejérsche Satz ist demnach in dem folgenden enthalten: *Der Wertvorrat $\mathfrak{W}$ einer L-Form liegt ganz in dem kleinsten konvexen Bereich $\mathfrak{K}$, der den Wertvorrat der zugehörigen Funktion $\Sigma c_n z^n$ längs des Einheitskreises $|z| = 1$ umschließt, und ist mit ihm identisch.*

Umgekehrt genügen die Methoden der Fejérschen Arbeit, um den Satz in dieser erweiterten Fassung zu beweisen, worauf ich nicht näher eingehe.

Es sei noch erwähnt, daß man durch vorsichtige Grenzübergänge und andere Methoden Satz 4 und Satz 8 auf beliebige beschränkte Bilinearformen von unendlichvielen Veränderlichen ausdehnen und hinzufügen kann, daß bei einer solchen, die zugleich normal ist, der kleinste konvexe Bereich, der das Spektrum enthält, sicher $\mathfrak{W}$ angehört, nicht nur innerhalb seiner äußeren Randlinie gelegen ist.

Kiel, den 10. Mai 1918.

---

14) A. a. O. S. 358 unten, Gött. Nachrichten 1910, § 4.

15) A. a. O. S. 357.

(Eingegangen am 22. Mai 1918.)