WILEY

Du calcul des erreurs moyennes dans les nivellements

Author(s): G. A. Rune

Source: *Geografiska Annaler*, Vol. 2 (1920), pp. 185-200

Published by: Wiley on behalf of Swedish Society for Anthropology and Geography

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/519525>

Accessed: 27-06-2016 12:38 UTC

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at

<http://about.jstor.org/terms>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Wiley, Swedish Society for Anthropology and Geography are collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Geografiska Annaler*

DU CALCUL DES ERREURS MOYENNES DANS LES NIVELLEMENTS.

PAR G. A. RUNE.

Autrefois on n'attachait aucune importance aux erreurs systématiques qui se font presque toujours fortement sentir dans un nivellement, et l'on exécutait les calculs de précision comme si les erreurs accidentelles, seules, intervenaient.

Plus tard, l'importance des erreurs systématiques fut couramment reconnue. Cependant on continua en général à exécuter les calculs de précision du nivellement comme si elles n'existaient pas, mais ces calculs se faisaient de façon à obtenir, en employant des méthodes diverses, des valeurs diverses pour l'erreur moyenne en mm par km. En comparant les erreurs moyennes ainsi obtenues, on pouvait tirer des conclusions sur l'intervention des erreurs systématiques.

En 1867, on fixa des limites aux erreurs admissibles dans les nivellements de précision; l'erreur probable ne devait pas dépasser en général 3 mm et en aucun cas 5 mm par km. Par suite des progrès notables réalisés dans l'art du nivellement depuis l'année 1867, la Conférence générale de l'Association géodésique internationale, tout en maintenant sans modification les tolérances de 1867 pour les nivellements de précision, décida d'introduire une nouvelle catégorie de nivellement, le nivellement de haute précision, où l'erreur accidentelle moyenne ne doit pas dépasser 1.5 et l'erreur systématique moyenne 0.3 mm par km. Cette décision exige donc pour cette catégorie une distinction stricte entre les erreurs moyennes accidentelles et systématiques. Pour que leur calcul puisse se faire de façon uniforme dans les différents pays, la Conférence arrêta certaines formules dues à M. Lallemand, Directeur du Service du nivellement général de la France.

Les formules de Lallemand présentent néanmoins certaines imperfections ainsi que nous le démontrons plus loin. J'ai donc établi des formules qui remplacent celles de Lallemand et dérivent des considérations qui vont suivre. Je démontrerai aussi que la définition d'un nivellement de haute précision présente une lacune importante. En outre, je ferai plus loin quelques observations au sujet d'un rapport du Professeur Baeschlin, publié en 1918 par la Schweizerische Bauzeitung, rapport dans lequel celui-ci s'efforce de démontrer que les formules de Lallemand sont théoriquement bien fondées.

¹³ *Geografiska Annaler.*

Recherches générales sur les erreurs accidentelles et systématiques.

Supposons qu'un nivellement soit exécuté avec partout une même distance entre l'instrument et la mire, par ex. 50 m. A chaque station une distance de 100 m est ainsi nivelée. Supposons en outre que, seules, des erreurs accidentelles se produisent et que pour chacune de ces nivelées de 100 m la somme des erreurs accidentelles ait la même valeur moyenne. L'erreur moyenne pour une différence d'altitude ainsi mesurée doit donc s'accroître de la racine carrée de la longueur de la distance nivelée. Posons ensuite qu'un tel nivellement est exécuté dans les deux sens entre deux repères séparés par une distance de r km et que le nivellement donne un écart d'altitude de I mm dans un sens et de II mm dans le sens inverse. Soient: $\Delta = I - II$, η_{Δ} = l'erreur accidentelle kilométrique moyenne de $I - II$, η = l'erreur accidentelle kilométrique moyenne de $\frac{I + II}{2}$, on a

$$\eta_{\Delta}^2 = 4\eta^2 = \frac{\Delta^2}{r}$$

Supposons provisoirement que toutes les distances entre deux repères consécutifs d'un nivellement soient égales à 1 km et que n soit égal au nombre des Δ , nous avons

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n \text{ et} \\ (\Sigma \Delta)^2 &= \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2 + 2 \Sigma \Delta_i \Delta_j, \text{ où } i \neq j. \end{aligned}$$

Soit $\mu^2 \pm k\mu^2$ la valeur moyenne de Δ_i^2 , k étant une constante dont la grandeur dépend de la loi des erreurs, on a

$$(\Sigma \Delta)^2 = n\mu^2 \pm k\mu^2 \sqrt{n} \pm \mu^2 \sqrt{2n(n-1)},$$

le terme dernier étant la valeur moyenne de $2 \Sigma \Delta_i \Delta_j$, et

$$(\Sigma \Delta)^2 = n\mu^2 \pm \mu^2 \sqrt{2n^2 + n(k^2 - 2)}$$

Selon la loi de Gauss on a $k^2 = 2$ et, par conséquent, $\frac{(\Sigma \Delta)^2}{n} = \mu^2 \pm \mu^2 \sqrt{2}$.

L'erreur moyenne $\pm \mu^2 \sqrt{2}$ étant indépendante de $n = \Sigma r$, les poids des divers $\frac{(\Sigma \Delta)^2}{\Sigma r}$ ou $\frac{\Delta^2}{r}$ ont la même valeur.

Même si $k^2 \neq 2$, ces poids conservent la même valeur, car en supposant que tous les r soient égaux à 100 m au lieu de 1 km, $n(k^2 - 2)$ devient insignifiant par rapport à $2n^2$, les distances des repères consécutifs d'un nivellement ayant en général une longueur d'un ou plusieurs kilomètres.

Dans un réseau de nivellement, où la précision est partout la même et où, seules, des erreurs accidentelles se produisent, tous les $\frac{\Delta^2}{r}$ ont ainsi le même poids. Le nombre des Δ étant égal à n_Δ , on a par conséquent

$$\eta^2 = \frac{1}{4n_\Delta} \cdot \sum \frac{\Delta^2}{r}$$

En fait les suppositions faites plus haut ne se rencontrent jamais dans la réalité. L'espacement des mires, le terrain et les conditions atmosphériques varient etc. Cette formule ne peut donc être considérée que comme une bonne approximation qui peut s'appliquer aux nivellements dans lesquels ne se trouvent que des erreurs accidentelles.

En dehors de ces erreurs accidentelles, il se produit en outre toujours des erreurs systématiques, qui, à la vérité, ne se font pas sentir du tout, ou ne se font sentir que d'une façon insignifiante sur un espacement de deux repères consécutifs (je suppose ici comme dans ce qui suit que les r ne dépassent pas quelques km.), mais qui peuvent atteindre un chiffre considérable sur une distance plus grande. Un schéma graphique exécuté avec $\Sigma\Delta$ comme ordonnée et Σr comme abscisse, met souvent en évidence l'effet des erreurs systématiques. Je donne dans la fig. 1 un exemple de graphique, emprunté au nivellement de précision suédois.

La ligne brisée qui représente $\Sigma\Delta$ dans cette figure affecte de O à A une allure ascendante assez régulière. Il est vraisemblable que des erreurs systématiques interviennent ici. Entre A et B l'allure de la ligne brisée est indécise.

L'allure de la ligne brisée entre O et A donne l'impression d'une erreur systématique qui est à peu près proportionnelle à la distance nivelée. De telles erreurs proviennent par exemple de l'enfoncement de l'instrument ou des supports des mires etc. Des causes extérieures telles que l'attraction du soleil et de la lune peuvent également produire de telles erreurs systématiques, qui pourtant n'atteignent pas des valeurs considérables, tout au plus quelques mm pour une longue ligne.

Certaines erreurs systématiques sont principalement proportionnelles aux différences d'altitude. Ce sont par exemple, la correction orthométrique étant appliquée, les erreurs qui proviennent de déformations des surfaces normales de

niveau du globe terrestre. Ces erreurs qui se font seulement sentir dans $\frac{I+II}{2}$

ne sauraient atteindre une valeur notable ailleurs que dans les pays de hautes montagnes. D'autres sont causées par une connaissance insuffisante de la longueur du mètre de la mire, d'autres encore sont les erreurs de réfraction etc. Les différences d'altitude étant souvent proportionnelles à la longueur de la

Fig. 1. Ligne 33 b du nivellement de précision suédois.

ligné, ces erreurs peuvent affecter $\Sigma \Delta$ de la même façon que des erreurs qui varient seulement avec la longueur de la ligne.

Pour un nivellement exécuté dans un terrain modérément accidenté, avec un contrôle journalier de la longueur de la mire et avec des réductions suffisantes des longueurs des nivelées, on doit pouvoir ad-

mettre, sans risque de résultats trop faux, que les erreurs systématiques croissent proportionnellement avec la longueur de la ligne. Cette supposition est admise dans l'exposé qui suit.

Faisons en ce qui concerne les erreurs accidentelles les mêmes suppositions que précédemment et supposons en outre que la même erreur systématique intervienne dans tous les Δ . Soit $\Delta_i = \Delta_i^1 + r_i \sigma_\Delta$, Δ_i^1 étant la fraction accidentelle en mm et σ_Δ l'erreur systématique kilométrique de Δ en mm par km, on obtient facilement

$$\frac{1}{4n_\Delta} \cdot \sum \frac{\Delta^2}{r} = \frac{1}{4n_\Delta} \cdot \sum \frac{\Delta^1{}^2}{r} + \frac{\sigma_\Delta^2 \cdot \sum r}{4n_\Delta} + \dots$$

et

$$\eta_r^2 = \frac{1}{4n_\Delta} \cdot \sum \frac{\Delta^1{}^2}{r} = \frac{1}{4n_\Delta} \cdot \sum \frac{\Delta^2}{r} - \frac{1}{4} r_m \sigma_\Delta^2 \dots \dots \dots (1.)$$

η_r étant l'erreur accidentelle moyenne de $\frac{I+II}{2}$ en mm par km et r_m étant la moyenne de tous les r .

L'erreur systématique est difficile à déterminer (voir plus loin), mais comme elle intervient seulement dans un terme de correction, qui est petit par comparaison avec le terme principal, l'incertitude dans σ_Δ^2 a une importance minime et la formule (1) peut être acceptée comme une bonne approximation.

Les recherches qui précèdent avaient pour objet les divers Δ où les erreurs systématiques intervenaient seulement, en général, de façon assez insignifiante. C'est pourquoi nous avons pu obtenir pour l'erreur accidentelle moyenne une formule où l'erreur systématique n'affecte qu'un terme de correction de moindre importance. Dans les résultats des nivellements de plus grandes distances il se produit souvent le contraire. Les erreurs systématiques y peuvent produire des effets plus grands que les erreurs accidentelles. En supposant que les erreurs accidentelles soient connues, on pourra donc obtenir, pour l'erreur systématique moyenne, une valeur relativement sûre en partant soit des $\Sigma\Delta$, soit des écarts de fermeture des mailles du réseau.

Faisons pour chaque ligne du nivellement un graphique de $\Sigma\Delta$, comme dans la fig. 1. Les lignes brisées ainsi obtenues nous permettront de suivre approximativement les diverses erreurs systématiques et de déterminer les limites entre elles. Décomposons les lignes en tronçons de manière que chaque tronçon paraisse n'embrasser qu'une seule erreur systématique et supposons: que l'erreur systématique vraie d'un tronçon soit constante; que les limites entre les tronçons coïncident avec les limites entre les erreurs systématiques vraies et que les diverses erreurs systématiques se comportent entre elles comme des erreurs accidentelles. Au point A de la fig. 1, nous avons la limite entre les deux tronçons de la ligne ainsi décomposée. Ces suppositions, ne répondant naturellement pas à la réalité, peuvent être considérées comme permises pour le calcul de la valeur moyenne des erreurs systématiques.

Supposons que nous ayons obtenu, par des décompositions, les lignes¹ $L_1 L_2 \dots$ (en kilomètres) avec les erreurs systématiques constantes en mm par km $\sigma_{\Delta_1} \sigma_{\Delta_2} \dots$, que le nombre de L (et de σ_{Δ}) est n_i et maintenons pour les erreurs accidentelles les mêmes hypothèses qu'auparavant. Nous avons donc pour la ligne L_i

$$(\Sigma\Delta)_i = (\Sigma\Delta^1)_i + \sigma_{\Delta_i} L_i$$

et pour toutes les lignes

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\Sigma L} \cdot \sum \frac{(\Sigma\Delta)_i^2}{L_i} &= \frac{1}{4\Sigma L} \cdot \sum \frac{(\Sigma\Delta^1)_i^2}{L_i} + \frac{\Sigma\sigma_{\Delta_i}^2 L_i}{4\Sigma L} + \\ &+ \frac{1}{2\Sigma L} \cdot \sum \sigma_{\Delta_i} (\Sigma\Delta^1)_i = (1) + (2) + (3). \end{aligned}$$

La valeur moyenne de $\frac{(\Sigma\Delta^1)_i^2}{L_i}$ est égale à $\frac{\eta_{\Delta}^2}{L_i} (r_1 + r_2 + \dots) = \eta_{\Delta}^2$.

¹ Dans l'exposé qui suit les tronçons de lignes sont tout simplement nommés des lignes.

La valeur moyenne de (1) est donc égale à

$$\frac{1}{4\Sigma L} \cdot \sum \eta_{\Delta}^2 = \frac{n_i \eta_{\Delta}^2}{4\Sigma L} = \frac{\eta_r^2}{L_m},$$

L_m étant la valeur moyenne de tous les L .

Supposons que les erreurs systématiques des deux nivellements d'une même ligne se comportent entre elles comme des erreurs accidentelles, $\sigma_{\Delta i}$ devient alors en moyenne égal à $2\sigma_i$, σ_i étant l'erreur systématique en mm par km de $\frac{I + II}{2}$. On obtient par là:

$$(2) = \frac{\sigma_1^2 L_1 + \sigma_2^2 L_2 + \dots}{L_1 + L_2 + \dots}$$

Cette expression peut être considérée comme la valeur moyenne des divers σ_i^2 . Si tous les σ_i^2 égalent σ^2 , (2) est égal à σ^2 . Et si tous les L_i sont égaux en longueur, (2) devient égal à la moyenne arithmétique de tous les σ_i^2 . Par contre si σ_i^2 et L_i sont tous deux de grandeur variable, (2) devient alors la valeur moyenne de tous les σ_i^2 , si l'on admet que le poids d'un σ_i^2 est proportionnel à L_i , ce que l'on peut considérer comme approximativement exact. (2) est donc égal à σ_r^2 , σ_r^2 étant la valeur moyenne de tous les σ_i^2 .

(3) ayant la valeur moyenne 0, on obtient

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{4\Sigma L} \cdot \sum \frac{(\Sigma \Delta)_i^2}{L_i} - \frac{\eta_r^2}{L_m} \dots \dots \dots (2)$$

En admettant les suppositions faites précédemment, on obtient comme valeur moyenne pour l'accumulation des erreurs sur une distance nivelée dans les deux sens et comprenant tous les L :

$$\eta_r^2 \Sigma L + \Sigma \sigma_i^2 L_i^2 \text{ ou } \eta_r^2 \Sigma L + \sigma_R^2 \Sigma L^2,$$

si l'on admet que tous les σ_i^2 sont égaux à σ_R^2 .

Supposons que η_R est une erreur accidentelle moyenne en mm par km dont la grandeur est déterminée par l'expression:

$$\eta_R^2 \Sigma L = \eta_r^2 \Sigma L + \sigma_R^2 \Sigma L^2,$$

on a

$$\sigma_R^2 = \frac{\Sigma L}{\Sigma L^2} (\eta_R^2 - \eta_r^2) \dots \dots \dots (3)$$

En supposant que toutes les lignes sont égales à L_m , on a

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{L_m} (\eta_R^2 - \eta_r^2)$$

et

$$\eta_R^2 = \eta_r^2 + \sigma_R^2 L_m.$$

La valeur de η_R^2 étant ainsi indépendante du nombre des lignes, le carré de la valeur moyenne de l'accumulation des erreurs sur une distance comprenant une ou plusieurs lignes est égale à $\eta_R^2 \times$ la distance en km. Mais puisque les écarts de fermeture des mailles du réseau sont constitués par de telles accumulations d'erreurs, ils peuvent servir à calculer η_R^2 . En effet, si la circonférence d'une maille est égale à P_i km et si l'accumulation des erreurs autour de la maille est égale à f_i , $\frac{f_i^2}{P_i}$ est par conséquent une valeur pour η_R^2 . Tous les $\frac{f_i^2}{P_i}$ ayant le même poids (voir page 187), on obtient

$$\eta_R^2 = \frac{1}{n_p} \sum \frac{f_i^2}{P_i},$$

n_p étant le nombre des mailles.

Dans la formule (3) c'est avantageux de remplacer η_R^2 par le carré de l'erreur moyenne kilométrique de $\frac{I + II}{2}$ ressortant de la compensation du réseau, à condition que les poids des lignes aient été admis comme inversement proportionnels aux longueurs des lignes. Désignons, en conformité avec P. G. Rosén,¹ cette erreur moyenne par m_4 . On obtient ainsi

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{L_m} (m_4^2 - \eta_r^2) \dots \dots \dots (3a)$$

Mais pour obtenir une valeur suffisamment exacte pour η_R , m_4 et σ_R , le nombre des mailles du réseau ne doit pas être trop petit. En acceptant la loi des erreurs de Gauss, l'erreur moyenne de η_R est en effet égale à $\pm \frac{0,707 \eta_R}{\sqrt{n_p}}$.

Soit en conformité avec P. G. Rosén¹

$$m_1^2 = \frac{1}{4n_\Delta} \sum \frac{\Delta^2}{r} \dots \dots \dots (4)$$

$$m_2^2 = \frac{1}{4n_l} \sum \frac{(\Sigma \Delta)_i^2}{L_i} \dots \dots \dots (5)$$

¹ P. G. Rosén: Sveriges precisionsafvägning 1886—1905, Stockholm 1906.

* Si l'on fait le calcul avec des lignes non décomposées (c'est-à-dire, en général, avec des côtés de mailles du réseau) au lieu de tronçons de lignes, on doit obtenir une valeur de m_3 qui ne diffère que très peu de m_3 calculé d'après les tronçons.

Avec ces désignations les formules (1) et (2) s'écrivent comme suit:

$$\eta_r^2 = m_1^2 - r_m \sigma_r^2$$

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{L_m} (m_3^2 - \eta_r^2)$$

On obtient de là:

$$\eta_r^2 = \frac{L_m m_1^2 - r_m m_3^2}{L_m - r_m} \dots \dots \dots (6)$$

$$\sigma_r^2 = \frac{m_3^2 - m_1^2}{L_m - r_m} \dots \dots \dots (7)$$

$$m_3^2 = \eta_r^2 + \sigma_r^2 L_m \dots \dots \dots (8)$$

On obtient en outre facilement:

$$\sigma_R^2 = \frac{m_4^2 - m_1^2}{L_m - r_m} \dots \dots \dots (9)$$

$$m_4^2 = \eta_r^2 + \sigma_R^2 L_m \dots \dots \dots (10)$$

Les formules (4) et (5) ont été les plus communément employées jusqu'ici pour le calcul des erreurs moyennes dans un nivellement; elles sont généralement complétées par le calcul de m_4 . Les formules (6), (7) et (9) fournissent donc des expressions particulièrement commodes pour isoler les erreurs moyennes accidentelles et systématiques dans ces nivellements anciens.

Avec toutes les suppositions qui ont servi à établir ces formules, $m_3 (\sigma_r)$ serait égal à $m_4 (\sigma_R)$ si le nombre des lignes et des mailles polygonales était infini. Avec un nombre fini de lignes et de mailles, $m_3 (\sigma_r)$ serait l'expression plus exacte de l'erreur moyenne, étant donné que le nombre des lignes est plus grand que le nombre des mailles. Dans la réalité, ces suppositions ne se rencontrent jamais. Surtout nous avons supposé que les erreurs systématiques des deux nivellements de la même ligne se comportent entre elles comme des erreurs accidentelles. On peut donc se demander, même lorsqu'il s'agit d'un nombre restreint de mailles, quelle est celle des erreurs moyennes m_3 et m_4 qui donne la valeur la plus exacte de la précision du nivellement. Si l'on admet que le nombre des mailles est égal au nombre des lignes, $m_4 (\sigma_R)$ serait sans contredit la valeur la plus vraisemblable, étant basée sur les erreurs dans $\frac{I + II}{2}$, tandis que $m_3 (\sigma_r)$ est extrait des Δ .

Avec de courtes distances entre les repères, η_r est obtenu avec plus de précision, parce que d'une part le nombre de Δ se trouve augmenté, d'autre part l'influence de σ_r , qui est difficile à évaluer, est diminuée, et par suite on arrive à plus de précision dans la détermination de σ_r . Avec de plus grandes distances entre les repères, on obtient une évaluation plus incertaine de η_r et par conséquent de σ_r .

Les formules de Lallemand.

La déduction des formules de Lallemand est exposée en détail dans le procès-verbal de la Conférence générale de l'Association géodésique internationale (tome II, pages 238—248). C'est pourquoi je me contenterai de faire ici quelques comparaisons entre ses formules et celles que je viens d'établir plus haut.

Prenons pour commencer la détermination de η_r^2 . La formule (1), page 188, diffère de celle de Lallemand en ce que j'ai supposé que les différents $\frac{\Delta^2}{r}$ ont la même exactitude, tandis que Lallemand admet que le poids d'un $\frac{\Delta^2}{r}$ est proportionnel à r . Cette supposition de Lallemand doit être tenue pour inexacte (voir page 187). Si l'on admet une variation dans l'exactitude des différents $\frac{\Delta^2}{r}$, celle-ci doit s'exercer dans le sens opposé, à cause de l'influence des erreurs systématiques difficile à calculer. Lallemand obtient, avec sa supposition:

$$\eta^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{4 \Sigma L} \text{ et}$$

$$\eta_r^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{4 \Sigma L} - \frac{\Sigma r^2}{\Sigma L} \cdot \sigma_r^2.$$

Ayant ainsi admis des poids erronés, η_r^2 calculé avec sa formule est moins exact que η_r^2 calculé avec la formule (6), page 192. En outre la formule (6) est plus commode que la formule de Lallemand, m_1 et m_3 étant, en général, déjà calculés.

Passons à la détermination de σ_R^2 . La formule (3), page 190, est établie d'une autre manière que la formule correspondante de Lallemand. Le résultat reste toutefois le même, avec cette différence que j'obtiens une expression différente pour η_R^2 qui entre dans la formule. J'ai en effet supposé que les différents $\frac{f^2}{P}$ ont la même erreur moyenne, tandis que Lallemand admet que le poids de $\frac{f^2}{P}$ est proportionnel à P , ce qui doit être tenu pour inexact (voir page 187). Lallemand obtient avec cette supposition

$$\eta_R^2 = \frac{\Sigma f^2}{\Sigma P}.$$

Il y a lieu de remarquer ici que Lallemand comprend dans les mailles polygonales le polygone enveloppe et s'assure par là le bénéfice d'une simplification de sa formule pour σ_R . Mais ayant admis que le poids d'un $\frac{f^2}{P}$ est proportionnel à P , ce polygone enveloppe exerce une influence très anormale sur η_R^2 et par conséquent sur σ_R^2 , dont l'erreur moyenne est ainsi considérablement augmentée. En introduisant

$$\eta_R^2 = \frac{\Sigma f^2}{\Sigma P} = \frac{\Sigma f^2}{2 \Sigma L}$$

dans la formule (3), page 190, on obtient la formule de Lallemand

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{\Sigma L^2} \left(\frac{1}{2} \Sigma f^2 - \eta_R^2 \cdot \Sigma L \right)$$

A cette formule correspond la formule (9), page 192, qui est à la fois d'un calcul numérique plus commode et fondée sur des suppositions plus correctes que celle de Lallemand. La formule (9) est donc une meilleure approximation que celle de Lallemand.

Pour σ_r^2 Lallemand obtient la formule suivante:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{4 \Sigma L} \cdot \sum \frac{S^2}{L}$$

La formule (2), page 190, diffère de celle-ci surtout en ce que j'ai introduit un deuxième terme qui constitue une correction pour les erreurs accidentelles. Cette correction doit être opérée pour éviter d'obtenir une valeur beaucoup trop grande pour σ_r^2 . Bien plus, en l'absence d'erreurs systématiques, la formule de Lallemand donne pour σ_r^2 une valeur qui n'est pas insignifiante, [son σ_r^2 devient alors à peu près égal au terme de correction de la formule (2)]. Supposons par exemple que dans le nivellement suédois il ne se soit produit que des erreurs accidentelles ($\eta_r = \pm 1.3$ et $L_m = 44$ km), la formule de Lallemand donnerait alors $\sigma_r = \pm 0.20$ mm par km, valeur assez considérable, tandis que la formule (2) ou (7) dans ce cas doit donner $\sigma_r = 0$.

Le terme principal dans la formule (2), page 190, correspond tout à fait à l'expression de Lallemand pour σ_r^2 , si l'on remplace $\Sigma \Delta$ par S . La fig. 2 illustre bien l'importance de ces deux quantités $\Sigma \Delta$ et S .

Les ordonnées de la ligne brisée OP de la figure 2 représentent $\Sigma \Delta$. Traçons la droite AB en suivant le plus près possible la ligne brisée. On obtient ainsi

$$AC = L, PD = \Sigma \Delta \text{ et } BC = S.$$

Lallemand pose que $\frac{S}{L} = \sigma_A$ et obtient ainsi directement de là sa formule pour σ_r^2 , en admettant que les poids des divers $\frac{S^2}{L^2}$ sont proportionnels à L .

Cette détermination graphique de S rend toutefois très long le calcul de S et laisse plus de place à l'arbitraire que le procédé d'employer $\Sigma \Delta$ au lieu de S . On obtient en outre des erreurs moyennes plus grandes pour σ_r^2 , comme il ressort de l'examen ci-dessous.

Supposons que la ligne OD soit constituée par un nombre n d'espacements de repères consécutifs, que ces espacements soient de 1 km et qu'une même erreur systématique constante se fasse sentir le long de toute la ligne. Traçons la ligne droite AB de façon à ce que la somme des carrés des distances, parallèlement avec l'axe des ordonnées, des sommets des angles de la ligne brisée jusqu'à AB soit un minimum; la ligne droite AB doit alors suivre mieux la ligne brisée OP que si elle avait été tracée à main levée. Supposons

d'où on obtient la valeur moyenne pour :

$$\begin{aligned}(b - \sigma_{\Delta})^2 &= \frac{6\eta_{\Delta}^2}{5n} \cdot \frac{n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 4}{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4} = \\ &= \frac{6\eta_{\Delta}^2}{5L} \left(1 - \frac{1}{L} + \frac{3}{L^2} - \dots \right)\end{aligned}$$

Puisque $b = \frac{S}{L}$ = l'erreur systématique de Δ telle qu'elle résulte de la détermination graphique, et puisque σ_{Δ} est l'erreur systématique vraie, $(b - \sigma_{\Delta})^2$ donne la valeur moyenne du carré de l'erreur qui résulte de la détermination graphique de l'erreur systématique. En réalité cette valeur moyenne est plus grande, étant donné que pour la détermination graphique de Lallemand, la ligne droite AB est tracée à main levée, et qu'on obtient par là une coïncidence moins grande avec la ligne brisée.

Avec la méthode de remplacer S par $\Sigma\Delta$ et avec les mêmes suppositions que précédemment, on a

$$\frac{\Sigma\Delta}{L} = \frac{\Sigma\Delta^1}{L} + \sigma_{\Delta}$$

et la valeur moyenne pour

$$\left(\frac{\Sigma\Delta}{L} - \sigma_{\Delta} \right)^2 = \frac{\eta_{\Delta}^2}{L} < (b - \sigma_{\Delta})^2$$

Donc, en employant $\Sigma\Delta$ au lieu de S on arrive à plus d'exactitude avec moins de travail; en outre, avec la méthode d'employer $\Sigma\Delta$, les divers Δ contribuent également au résultat. De plus, si l'on prête égard à ce fait que la formule de Lallemand pour σ_r^2 ne contient aucun terme de correction pour les erreurs accidentelles, il résulte que la formule (7), page 192, est à la fois plus commode et considérablement plus exacte que celle de Lallemand.

La longueur moyenne L_m pour les lignes comprises dans le nivellement est un complément nécessaire aux formules de Lallemand comme aussi aux formules données ici page 192. L_m manque dans la définition d'un nivellement de haute précision qui a été adoptée par la Conférence générale de 1912 et qui de ce fait reste vague. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, il subsiste souvent un certain doute au sujet de l'établissement des limites entre les différentes lignes; aussi des valeurs différentes sont en général obtenues pour L_m .

par des personnes différentes dans un même nivellement. A une plus grande L_m correspond en règle un générale moindre σ_r . En outre les erreurs systématiques peuvent en réalité embrasser des distances de longueur différente dans des nivellements différents, par suite de procédés différents etc., à quoi vient s'ajouter que la Conférence de 1912 a laissé libre choix entre les «sections» (c'est-à-dire les lignes non décomposées ou les côtés de mailles polygonales dans le cas d'un réseau) et les «tronçons de sections» (c'est-à-dire les lignes décomposées). Les conséquences possibles de ce libre choix ressortent du tableau suivant, où m_4 a été calculé d'après la formule $m_4^2 = \eta_r^2 + \sigma_R^2 L_m$ (voir page 192), avec $\eta_r = \pm 1.5$ et $\sigma_R = \pm 0.3$ mm., c'est-à-dire avec les limites prescrites pour un nivellement de haute précision.

	Longueur moyenne pour les sections km	m_4 mm	Longueur moyenne pour les tronçons de sections km	m_4 mm
Espagne	135	± 3.8	62	± 2.8
France	108	± 3.5	56	± 2.7
Prusse ..	73	± 3.0	47	± 2.5
Suède	147	± 3.9	44	± 2.5

Il ressort de ce tableau, que la définition adoptée pour un nivellement de haute précision ne fixe pas une limite pour m_3 et m_4 , c'est-à-dire pour la précision du nivellement. On peut même s'imaginer un nivellement, constituant d'après la définition un nivellement de haute précision, qui ne remplirait pas les conditions requises pour un nivellement de précision. Cette lacune pourrait être comblée en complétant la définition pour un nivellement de haute précision par une limite pour m_3 et m_4 .

Il peut être intéressant d'examiner quels seraient les résultats obtenus à l'aide des formules de η_r^2 et de σ_r^2 , si les longueurs des lignes étaient très courtes. Supposons par exemple que les lignes coïncident avec les espacements entre les repères, que l'on admet être d'une longueur égale, r km. Les formules de Lallemant donnent

$$\eta_r^2 = 0$$

$$\sigma_r^2 = \frac{m_1^2}{r}$$

tandis que les formules (6) et (7), page 192, donnent

$$\eta_r^2 = \frac{0}{0}$$

$$\sigma_r^2 = \frac{0}{0}$$

d'où il ressort qu'il est impossible dans ce cas d'isoler η_r et σ_r , ce qui correspond à la réalité.

Admettons ensuite que chaque ligne embrasse deux de ces espacements de repères. On obtient approximativement avec les formules de Lallemant

$$\eta_r^2 = \frac{m_1^2}{2}$$

$$\sigma_r^2 = \frac{m_1^2}{2r}$$

Si par exemple $r = 1$ km, η_r devient égal à σ_r , ce qui, en général, ne correspond pas à la réalité.

Avec les formules (6) et (7), on obtient

$$\eta_r^2 = 2m_1^2 - m_3^2$$

$$\sigma_r^2 = \frac{m_3^2 - m_1^2}{r}$$

Si l'on admet ici que l'erreur accidentelle moyenne vraie dans $\frac{I + II}{2}$ est égale à $\pm \mu$ et l'erreur systématique vraie dans $\frac{I + II}{2}$ est égale à k , on obtient

$$\begin{aligned} \text{la valeur moyenne de } m_1^2 &= \mu^2 + k^2r \\ \text{» » » } m_3^2 &= \mu^2 + 2k^2r \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\eta_r^2 = \mu^2$$

$$\sigma_r^2 = k^2$$

On obtient ainsi un résultat exact avec les formules (6) et (7). Si la longueur des lignes augmente de façon à ce que chaque ligne embrasse 3 espacements ou plus, ces formules continuent à donner des valeurs exactes. Dans les deux suppositions qui viennent d'être faites, les formules de Lallemant donnent des résultats qui s'écartent sensiblement de la réalité; mais lorsque la longueur des lignes augmente, les η_r et σ_r calculés d'après ses formules gagnent en exactitude.

Dans la Schweizerische Bauzeitung de 1918, le Professeur F. Baeschlin a discuté les formules de Lallemant et en particulier a cherché à démontrer que la formule $\eta^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{4\Sigma L}$ (voir page 193) est théoriquement bien fondée.

Il pose que

$$H = h_1 + h_2 + \dots + h_n,$$

$h_1, h_2, \dots, h_n$ étant les différences d'altitude des divers espacements de repères. Si l'on suppose que les erreurs moyennes de $H, h_1, h_2, \dots$ sont égales à $m_H, m_{h_1}, m_{h_2}, \dots$ on obtient:

$$m_H^2 = m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \dots + m_{h_n}^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{4}$$

Mais on a $m_H^2 = \eta^2 \Sigma L$ d'où il suit

$$\eta^2 = \frac{\Sigma \Delta^2}{4\Sigma L}$$

Certainement $\frac{\Sigma \Delta^2}{4}$ et $\eta^2 \Sigma L$ sont de bonnes valeurs pour l'accumulation des erreurs sur la distance ΣL , s'il n'y a que des erreurs accidentelles, mais η calculé de $\frac{\Sigma \Delta^2}{4} = \eta^2 \Sigma L$ n'est pas nécessairement une valeur juste. Il faut faire

des recherches sur ce sujet. Au premier coup d'oeil on voit d'ailleurs qu'un Δ qui se rapporte à un plus grand r en général a une plus grande influence sur le résultat qu'un Δ se rapportant à un moindre r . Admettons par exemple qu'un nivellement n'embrasse que deux espacements de repères et posons $r_1 = 5$ km et $r_2 = 1/2$ km, nous avons en moyenne $\Delta_1^2 = 10 \Delta_2^2$, c'est-à-dire la valeur de $\Sigma \Delta^2$ et par conséquent celle de η est ordinairement déterminée par Δ_1, Δ_2 n'ayant en général aucune influence sensible sur le résultat. Cela ne semble pas juste.

Page 187 j'ai démontré qu'il faut que tous les $\frac{\Delta^2}{r}$ aient le même poids; ainsi tous les Δ auront la même influence sur le résultat. Par conséquent il n'est pas juste de supposer, directement comme Lallemant ou indirectement comme Baeschlin, que le poids d'un $\frac{\Delta^2}{r}$ est proportionnel à r .

Baeschlin montre ensuite que d'après la formule de Lallemant η a une erreur moyenne plus grande que d'après la formule (4) page 191 et que cet écart augmente à mesure que les r sont plus variables (avec des r égaux les deux formules coïncident). Cependant tout cela va de soi, puisque les poids employés par Lallemant et Baeschlin sont erronés.

Dans l'exposé de la méthode graphique de Lallemand pour la détermination de S (voir page 194), Baeschlin trace la ligne droite depuis l'origine O de sorte qu'il obtienne au lieu de AB une ligne droite OB telle que la surface comprise entre OB et l'axe des abscisses devienne égale à la surface comprise entre la ligne brisée et cet axe. Cependant cela constitue un affaiblissement de la méthode de Lallemand. En effet c'est facile de montrer que selon le procédé de Baeschlin (cf. page 196) la valeur moyenne de

$$\left(\frac{S}{L} - \sigma_d\right)^2 \text{ est égale à } \frac{4\eta_d^2}{3L} \left(1 - \frac{3}{2L} + \frac{5}{4L^2}\right)$$