2. Zur Theorie der Turbulenz; von Ludwig Hopf.

§ 1. Gedankengang.

Der bei jeder Art von Flüssigkeitsströmung beobachtete Übergang aus dem laminaren in den turbulenten Zustand, wenn gewisse Mindestwerte der Abmessungen oder der Geschwindigkeit überschritten werden, ist noch immer nicht theoretisch geklärt. Osborne Reynolds¹⁾ hat experimentell gezeigt, was auch aus Dimensionsbetrachtungen folgt, daß es hierbei nur auf die „Reynoldssche Zahl“ R ankommt, welche aus der Dichte ϱ , dem Reibungskoeffizienten μ der Flüssigkeit, der Geschwindigkeit u und einer Längenabmessung l der Strömung gebildet wird durch die Beziehung

$$(1) \quad R = \frac{\varrho U l}{\mu}.$$

Unterhalb einer kritischen Zahl R_k bildet sich eine laminäre Strömung aus, die vollständig durch die innere Reibung geregelt wird und in den gewöhnlichen Fällen der mathematischen Analyse leicht zugänglich ist; oberhalb R_k tritt die turbulente Strömung ein, deren Gesetzmäßigkeiten weder physikalisch noch mathematisch erfaßt sind. Der plötzliche Übergang bei der kritischen Reynoldsschen Zahl hat zu der Auffassung geführt, daß die laminare Strömung für alle kleineren Werte von R stabil, für alle größeren instabil sei; doch ist es noch nicht gelungen, diese Auffassung aus der Theorie der reibenden Flüssigkeiten zu beweisen.

In einer früheren Arbeit habe ich²⁾ im Anschluß an Sommerfeld³⁾ die *Methode der kleinen Schwingungen* für dieses Problem durchgeführt, gelangte aber nicht zu dem

1) O. Reynolds, Scientific papers II, p. 51, 153 u. 524.

2) L. Hopf, Ann. d. Phys. **43**, p. 1. 1914.

3) A. Sommerfeld, Atti del IV. congresso intern. dei Matematici 1908.

gesuchten Ergebnis, sondern kam auf absolute Stabilität der laminaren Bewegung bei jeder Reynoldsschen Zahl.¹⁾ Dabei war, wie bei den meisten neueren Arbeiten über das Turbulenzproblem, als Grundströmung die Strömung zwischen einer ruhenden und einer bewegten Wand angenommen, bei welcher die Geschwindigkeitsverteilung normal zur Strömungsrichtung ein lineares Gesetz befolgt. Die folgende Arbeit soll eine Möglichkeit zeigen, dieses im Hinblick auf die Erfahrung sehr unbefriedigende Ergebnis durch weitere Fassung der möglichen Störungen zu überholen; ich muß mich daher hier sehr eng an die frühere Arbeit anschließen und werde mich in allen physikalischen und mathematischen Einzelheiten, die dort besprochen sind, sehr kurz fassen.

Das Hauptergebnis, an welches hier logisch angeknüpft werden soll, ist die dort gegebene Beschreibung des Stromlinienverlaufs. Aus einem System von Schwingungen der ruhenden Flüssigkeit, welches aus einer Grundschiwingung der ganzen Strömung und unendlich vielen Oberschwingungen der unterteilten Strömung besteht, wird mit wachsender Reynoldsscher Zahl schließlich ein System, bei welchem die einzelnen — verschieden stark gedämpften, in der Phase voneinander unabhängigen — Partialschwingungen sich mehr und mehr auf einzelne Strömungsschichten konzentrieren. Hierbei wird das Verhalten *reibungsloser Flüssigkeiten so angenähert*, daß das Strömungsbild für $R = \infty$ genau mit dem Strömungsbild für $\mu = 0$ übereinstimmt. Dies ist nicht etwa selbstverständlich; denn die Strömung einer reibenden Flüssigkeit unterscheidet sich von der Strömung einer reibungslosen Flüssigkeit grundsätzlich durch das Verhalten an festen Wänden, an welchen bei Berücksichtigung der Reibung kein Gleiten stattfinden darf. Der Einfluß dieser beschränkenden Bedingung konzentriert sich aber, wie die Rechnung zeigt, mit wachsendem R mehr und mehr in die unmittelbare Nähe der Wand. Von der Dämpfung der Schwingungen gilt nicht dasselbe wie von den Stromlinien, die Dämpfung wird mit wachsendem R nicht geringer, sondern wächst an. Die Schwingungen der reibungslosen Flüssigkeit sind dabei in dem behandelten Fall ganz indifferent, zeigen keine Tendenz zum Anwachsen.

1) Dasselbe Ergebnis bei R. von Mises. Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung 20. Heft 10.

Dieses Verhalten legt die Ansicht nahe, daß keine Instabilität einer reibenden Strömung bei großem R zu erwarten sein kann, wenn die reibungslose Strömung keine Neigung zur Instabilität zeigt, daß aber eine solche Neigung, wenn vorhanden, wohl imstande sein kann, der Dämpfung durch die Reibung entgegen zu arbeiten, da die Stromlinien der Störung in der reibenden Flüssigkeit dieselbe Gestalt zeigen wie in der reibungslosen. Nun gibt es aber nach den Untersuchungen von Lord Rayleigh¹⁾ tatsächlich derartige Instabilitätserscheinungen in der Theorie der reibungslosen Flüssigkeiten. Einestails gibt es Hauptströmungen, welche Instabilität zeigen; doch gehören dazu alle diejenigen nicht, bei welchen d^2U/dy^2 (U Hauptgeschwindigkeit, y Abmessung normal zur Hauptströmungsrichtung) sein Vorzeichen nicht wechselt. Deshalb sieht es zunächst nicht so aus, als ob diese Instabilitätserscheinungen mit dem Turbulenzproblem etwas zu tun hätten; man könnte sich höchstens auf den Standpunkt stellen, daß solche instabile Strömungen endliche Abweichungen von den normalen laminaren Strömungen darstellen, und so eine Brücke finden zu den für einzelne Fälle durchgeführten Berechnungen von Noether.²⁾

Andernteils zeigen aber die reibungslosen Flüssigkeiten bei jeder beliebigen Hauptströmung Instabilität, wenn gewisse Grenzbedingungen erfüllt sein sollen, und von hier scheint mir ein gangbarer Weg zum Turbulenzproblem auszugehen. Bei der früheren Untersuchung war es wesentlich, daß die Störung an den Wänden verschwinden mußte, daß sie also dieselben Grenzbedingungen erfüllen mußte wie die Hauptströmung. Darin liegt meines Erachtens eine Beschränkung; wohl kann man sich denken, daß eine im Innern der Flüssigkeit entstehende Störung an den Wänden ihre Grenze findet, aber auf der andern Seite werden gerade *an den Wänden Störungen entstehen*. Wenn die Wand erschüttert wird, wird die Störung gerade an der Wand am größten sein; man kann bei Betrachtung einer derartigen Störung ohne weiteres unendlich kleine Bewegungen der Wand zulassen und den ersten Augenblick der Störung, ihre Neigung zum Abnehmen oder Anwachsen verfolgen, wobei

1) Lord Rayleigh, Scientific papers 1. p. 474; 3. p. 575 u. 594; 4. p. 203.

2) F. Noether, Jahresberichte der deutschen Math.-Ver. 23. p. 138. 1914 u. Nachrichten der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1917.

immer noch nicht die Störung an der Wand verschwinden muß. Alle Erscheinungen bei reibenden Flüssigkeiten werden ja wesentlich durch das Verhalten in den unmittelbar an der Wand befindlichen Schichten bestimmt. Auch die Beschaffenheit der Wand hat erfahrungsgemäß einen großen Einfluß auf die turbulente Strömung, sowohl auf die Art, wie sie sich ausbildet, als auch auf die kritische Reynoldssche Zahl. Wände von verschiedener „Rauhigkeit“ begünstigen in verschiedener Weise die Ausbildung von Störungen am Rande und zeigen auch verschiedene kritische Zahlen und verschiedene Widerstandskoeffizienten der turbulenten Strömung. All dies legt es nahe, den festen Wänden auch bei der Entstehung der Turbulenz eine größere Rolle zuzuweisen, als es im früheren Ansatz geschehen ist, und insbesondere die von der Wand ausgehenden Störungen zu untersuchen.

Nun ist es aber nicht eindeutig, in welcher Weise eine solche Störung anzusetzen ist, welche Grenzbedingungen also an den festen Wänden vorzuschreiben sind. Bei einer Wanderschütterung oder einer starken Störung der äußersten Schicht durch Rauhigkeit oder Veränderung der Wandbeschaffenheit wird es auf die Wandbeschaffenheit sehr ankommen, so daß eine die Wand beschreibende Konstante in die Rechnung eingeht. In dieser Gestalt ist das Problem nicht angreifbar. Wir können aber den früher diskutierten Fall als einen Grenzfall ansehen und dazu den entgegengesetzten Fall konstruieren. Früher hatten wir eine Wand, welche jeder Störung unendlichen Widerstand bot; an der Wand mußte die Störung Null sein. Der entgegengesetzte *Grenzfall* wäre eine Wand, die der Störung gar nicht widersteht, also eine Art *freier Oberfläche*; an einer solchen Wand ist die Störung nicht Null, der von der Störung erzeugte *Druck verschwindet* aber. Diese Grenzbedingung führt in der Tat bei reibungslosen Flüssigkeiten zur Instabilität; es ist daher zu erwarten, daß sie auch bei reibenden Flüssigkeiten mit großem R eine solche Instabilität zeigt, während das Verhalten bei kleinem R ein ganz anderes sein muß. Die Durchführung ergibt wirklich eine kritische Reynoldssche Zahl, und zwar eine kleinere als beobachtet wurde. Dies entspricht durchaus dem Charakter des Ansatzes, der einen Grenzfall der Wirklichkeit darstellen soll. Der frühere Grenzfall ergab zu große Stabilität ($R_k = \infty$), die

folgende Diskussion des anderen Grenzfalles zu kleine Stabilität ($R_k = 11$). Zwischen beiden liegt die Wirklichkeit, welche nur durch einen weiteren Parameter vollständig charakterisiert werden kann. Gewöhnlich wird $R_k = 1000$ beobachtet; aber Ekman¹⁾ hat gezeigt, daß man bei vorsichtigem Experimentieren zu weit höheren Werten gelangen kann. Ruckes²⁾ hat in Metallröhren $R_k \sim 400$ gefunden. Der Zusammenschluß der beiden Grenzfälle in einer Grenzbedingung mit einer Materialkonstante könnte erst versucht werden, wenn das Dimensionsgesetz bekannt wäre, welches den Einfluß der Wandbeschaffenheit beherrscht.

§ 2. Mathematische Formulierung.

Die Hauptströmung, deren Stabilität wir untersuchen wollen, sei wieder die einfachste: nämlich die Strömung zwischen 2 Platten im Abstand h voneinander, deren eine mit der Geschwindigkeit U längs der x -Achse bewegt wird; die Geschwindigkeitsverteilung verläuft nach dem Gesetz $U y/h$ (Fig. 1).

Fig. 1.

Auf diese Strömung überlagere sich eine Störung mit den Geschwindigkeitskomponenten u und v längs der x - und y -Achse. Wir führen für

x , y und die Zeit t dimensionslose Größen ein durch die Beziehungen

$$(2) \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{U}{h} t.$$

Die Abhängigkeit der Störung von der x -Richtung und von der Zeit sei dargestellt durch den Faktor $e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)}$. Die räumliche Frequenz α wird dabei als reelle, bekannte Größe betrachtet; β ist die Unbekannte, welche aus der Differentialgleichung und den Grenzbedingungen folgt, und welche den zeitlichen Verlauf bestimmt. Die Kontinuitätsgleichung führt dann zu dem Ansatz

$$(3) \quad u = \frac{1}{h} \frac{df}{d\eta} e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)}, \quad v = \frac{i\alpha}{h} f e^{i(\beta\tau - \alpha\xi)}.$$

1) V. W. Ekman, Arkiv för matematik, astronomi och fysik 6. Nr. 12.

2) W. Ruckes, Ann. d. Phys. 25. p. 983. 1908.

Die Funktion f wird aus der Differentialgleichung bestimmt; die Grenzbedingungen lassen eine Lösung nur bei bestimmten Werten von β zu, welche Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind.

Zunächst behandeln wir den Fall einer *reibungslosen Flüssigkeit*: Die hydrodynamischen Differentialgleichungen ergeben bei Elimination des Druckes

$$(4) \quad (\beta - \alpha \eta) \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f \right) = 0.$$

Die erste Klammer führt auf die Lösungen $\beta = \alpha \eta$, d. h. auf Schwingungen, die auf eine unendlich schmale Schicht η konzentriert sind. Auf die Rolle, die diese Schwingungen in der früheren Arbeit spielten, wurde in der Einleitung schon hingewiesen. Die Lösung der 2. Klammer lautet:

$$(5) \quad f = A \sin \alpha \eta + B \cos \alpha \eta.$$

Nun soll der Druck an den beiden Berandungen $\eta = 0$ und $\eta = 1$ verschwinden. Der Druck sei in der Form angesetzt:

$$p = b e^{i(\beta \tau - \alpha \xi)}.$$

Dann hängt b mit f zusammen durch die Beziehung:

$$(6) \quad b = \frac{\rho U}{\alpha h} \left\{ (\beta - \alpha \eta) \frac{df}{d\eta} + \alpha f \right\}.$$

Die Grenzbedingungen führen zu den Gleichungen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \beta + B = 0 \\ A \{ (\beta - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \} + B \{ (\beta - \alpha) \sin \alpha + \cos \alpha \} = 0. \end{array} \right. \text{ und}$$

Diese Gleichungen sind nur verträglich, wenn

$$(8) \quad \beta^2 - \alpha \beta + \alpha \cot \alpha - 1 = 0$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \cot \alpha}.$$

Ist α groß, also die Wellenlänge der Störung klein, so ist β rein reell (Fig. 2), die Störung verhält sich indifferent; ist aber $\alpha < 2,4$, so ist der Radikant der Wurzel negativ, β komplex; dies bedeutet eine mit der Zeit abnehmende und eine anwachsende Schwingung, also ist die *Hauptströmung instabil gegen jede Störung, die zu einem $\alpha < 2,4$ gehört.*

Bemerkenswert ist, daß β gar nicht mehr von U abhängt; aus der Differentialgleichung und aus den Grenzbedingungen hat sich U weggehoben. Für $U = 0$ wird zwar das logarithmische Inkrement der Schwingung Null, da es proportional βU ist; trotzdem ist der Übergang von der erhaltenen Lösung zum Fall der ruhenden Flüssigkeit sinnlos. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Differentialgleichung zwar dieselbe bleibt, aber der Druck nur durch das Glied $\beta df/d\eta$ gegeben ist, und das ganze Problem für diesen Fall nur die Lösungen $\beta = a\eta$ hat. Bei reibungslosen Flüssigkeiten besteht also ein

Fig. 2.

Sprung zwischen dem Fall der Ruhe und dem Fall endlicher Bewegung. Nun entspricht jede Bewegung reibungsloser Flüssigkeiten einer unendlich großen Reynoldsschen Zahl; jede endliche Reynoldssche Zahl gehört zum Falle $U = 0$, bei welchem die Instabilität nicht mehr vorhanden ist. Man kann also vielleicht sagen, daß auch die reibungslosen Flüssigkeiten eine gewisse kritische Zahl aufweisen, aber in der Form $0/0$, die erst durch die Theorie der reibenden Flüssigkeiten ausgerechnet werden kann.

Der Sprung bei $U = 0$ existiert in der Theorie der reibenden Flüssigkeiten in der Tat nicht; sowohl Differentialgleichung wie Grenzbedingungen hängen von R so ab, daß sie den Fall

der Ruhe in stetiger Weise mit umfassen. Das ganze System von Schwingungen wandelt sich aus seiner Form bei ruhender Flüssigkeit mit wachsendem R nach und nach zu der Form, welche der reibungslosen Flüssigkeit entspricht.

Für reibende Flüssigkeiten sind die Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f = \varphi \\ \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \alpha^2 \varphi = i R (\beta - \alpha \eta) \varphi \end{cases}$$

Der Normaldruck auf die Wand erscheint in der Form

$$-p_n = p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = b_n \cdot e^{i(\beta z - \alpha \xi)}.$$

Aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen folgt

$$\frac{i\alpha}{\varrho h} b = \frac{i\beta}{h} \frac{U}{h} \frac{df}{d\eta} - U \frac{i\alpha\eta}{h^2} \frac{df}{d\eta} + \frac{i\alpha}{h} \frac{U}{h} f - \frac{\mu}{\varrho h^2} \left(\frac{d^2}{d\eta^2} - \alpha^2 \right) \frac{df}{d\eta}$$

und daraus, wenn man noch die Beziehung (9) benutzt:

$$(10) \quad \bullet - \frac{\alpha h^2}{\mu} b_n = R(\beta - \alpha \eta) \frac{df}{d\eta} + \alpha R f + i \frac{d\varphi}{d\eta} - 2i\alpha^2 \frac{df}{d\eta}.$$

Dieser Ausdruck soll für $\eta = 0$ und $\eta = 1$ verschwinden; damit ist aber das Problem noch nicht vollständig bestimmt; bei reibenden Flüssigkeiten sind ja 2 Grenzbedingungen an jeder Wand zu erfüllen. Die andere Grenzbedingung behalten wir der Einfachheit halber bei wie früher; wir fordern, daß an der Wand kein Gleiten stattfindet, also $df/d\eta = 0$ ist. Dann bleiben also an den beiden Wänden $\eta = 0$ und $\eta = 1$ die Grenzbedingungen zu erfüllen.

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{d\eta} = 0 \\ \text{und} \\ F \equiv f + \frac{i}{\alpha R} \frac{d\varphi}{d\eta} = 0. \end{array} \right.$$

Es empfiehlt sich meistens die Gleichungen in eine einfachere Gestalt zu bringen durch Einführung der Variablen

$$(12) \quad z = \frac{\alpha^2 + i R (\beta - \alpha \eta)}{(\alpha R)^{3/2}},$$

z_0 soll zu $\eta = 0$, z_1 zu $\eta = 1$ gehören; ferner sei

$$(13) \quad \kappa = \frac{\alpha}{(\alpha R)^{1/2}}.$$

Dann werden die Differentialgleichungen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 f}{d x^2} + x^2 f = - \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \varphi \\ \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + x \varphi = 0 \end{array} \right.$$

und die Grenzbedingungen für $z = z_0$ und $z = z_1$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{df}{dx} = 0 \\ \text{und} \\ F \equiv f + \frac{1}{(\alpha R)^{1/2}} \frac{d\varphi}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

§ 3. Aufstellung der transzendenten Gleichung.

Die Gleichungen (9) haben die einfachen partikulären Lösungen

$$\mathfrak{Cof} \alpha \eta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin} \alpha \eta ;$$

die beiden anderen Lösungen, die sich in geschlossener Form mit Hilfe von Zylinderfunktionen anschreiben lassen, seien f_1 und f_2 . Die 4 Grenzbedingungen würden eine 4reihige Determinante ergeben; wir gehen einfacher vor und wählen 2 Partikularlösungen, welche die beiden Grenzbedingungen $d f / d \eta = 0$ an den beiden Wänden von selbst erfüllen. Dies leisten die beiden Funktionen

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{1,2}^* = f_{1,2} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d f_{1,2}}{d \eta} \right)_0 \mathfrak{Sin} \alpha \eta - \frac{1}{\alpha \mathfrak{Sin} \alpha} \left\{ \left(\frac{d f_{1,2}}{d \eta} \right)_1 \right. \\ \left. - \left(\frac{d f_{1,2}}{d \eta} \right)_0 \mathfrak{Cof} \alpha \right\} \mathfrak{Cof} \alpha \eta . \end{array} \right.$$

Führen wir weiterhin die Abkürzung ein:

$$(17) \quad F_{1,2}^* = f_{1,2}^* + \frac{i}{\alpha R} \frac{d \varphi_{1,2}}{d \eta} ,$$

so führen die beiden noch zu erfüllenden Grenzbedingungen

$$F^*(0) = 0 \quad \text{und} \quad F^*(1) = 0$$

zu der transzendenten Gleichung für die Unbekannte β :

$$(18) \quad F_1^*(0) \cdot F_2^*(1) - F_2^*(0) \cdot F_1^*(1) = 0 .$$

Nun folgt aus (16) und (17) mit Benützung der Abkürzungen (11) und (13):

$$(19) \begin{cases} \sin \alpha \cdot F_{1,2}(0) = F_{1,2}(0) \sin \alpha + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_0 \mathfrak{Cof} \alpha - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_1 \\ \sin \alpha \cdot F_{1,2}(1) = F_{1,2}(1) \sin \alpha + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_0 - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_1 \mathfrak{Cof} \alpha. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke, in (18) eingesetzt, führen zu der transzendenten Gleichung

$$(20) \begin{cases} \Delta \equiv \left[\{F_1(0)F_2(1) - F_2(0)F_1(1)\} - \frac{1}{\alpha^2} \left\{ \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_0 \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_1 - \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_0 \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_1 \right\} \right] \sin \alpha \\ - \frac{1}{\alpha} \left[\left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_1 - F_2(1) \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_1 - F_1(1) \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_0 \right\} \right] \mathfrak{Cof} \alpha \\ + \frac{1}{\alpha} \left[\left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_0 - F_2(1) \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_1 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{d\eta} \right)_0 - F_1(1) \left(\frac{df_2}{d\eta} \right)_1 \right\} \right] = 0 \end{cases}$$

Bei Benutzung der Variablen z nach (12) lautet die Gleichung, wenn sich nun die Argumente und Indizes 0 und 1 auf z_0 und z_1 beziehen:

$$(21) \begin{cases} \Delta \equiv \left[\{F_1(0)F_2(1) - F_2(0)F_1(1)\} + \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 - \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 \right\} \right] \sin \alpha \\ + \frac{i}{\kappa} \left[\left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 - F_2(1) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 - F_1(1) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 \right\} \right] \mathfrak{Cof} \alpha \\ - \frac{i}{\kappa} \left[\left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 - F_2(1) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 - F_1(1) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 \right\} \right] = 0 \end{cases}$$

Allgemein sind dabei die Funktionen

$$(22) \quad \varphi_{1,2} = z^{1/2} Z_{1/3}^{(1),(2)} \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right),$$

wobei $Z_{1/3}$ eine Zylinderfunktion mit dem Index $1/3$ bedeutet, und

$$(23) \quad f_{1,2} = \frac{\kappa}{\alpha^2} \int_0^z \varphi_{1,2}(z') \sin \kappa(z' - z) dz'.$$

Wir werden aber im folgenden nur mit Näherungen arbeiten, die auch unmittelbar aus den Differentialgleichungen entnommen werden können.

Aus den Wurzeln der Gleichung (20) oder (21) erhalten wir die Werte von β , welche eine Lösung des Problems zulassen. Der reelle Teil von β ist maßgebend für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung, der imaginäre Teil für das zeitliche Abnehmen oder Anwachsen der Störung, also für die Stabilität oder Instabilität der Strömung. Instabilität tritt dann ein, wenn der imaginäre Teil von β negativ und infolgedessen der reelle Teil von z_0 und z_1 größer als κ^2 ist.

Die Stromfunktion f und damit den Verlauf der ganzen Strömung erhalten wir in der Form:

$$(24) \quad f = F_2^*(0) f_1^*(\eta) - F_1^*(0) f_2^*(\eta).$$

Dieser Ausdruck erfüllt die Differentialgleichung und alle Grenzbedingungen.

§ 4. Grenzfall ruhender Flüssigkeit; kleine αR .

Wie bereits oben erwähnt, gehen die Gleichungen (9) und (11) in dieselbe Form über, die man bei Ansatz des Problems für ruhende Flüssigkeit erhält, wenn man R zu Null werden läßt. Natürlich hat es aber nur einen Sinn, $\alpha R = 0$ zu setzen, da β ja die Unbekannte ist und βR auch für $R = 0$ endlich bleiben kann.

Wir wollen uns hier aber nicht nur auf den Grenzfall $\alpha R = 0$ beschränken, sondern einen Überblick gewinnen, in welcher Weise sich die Schwingungen für kleine αR gestalten, und wie weit die errechnete Näherung gültig ist; darum wollen wir die ersten Potenzen von R beibehalten. Die Rechnungen werden übersichtlicher, wenn wir die Symmetrie unseres Problems ausnutzen und die neue Variable

$$\eta' = \eta - 1/2$$

einführen. Dann haben die beiden Wände die Koordinaten $\eta' = \pm 1/2$. Die Differentialgleichung für φ wird mit der Abkürzung

$$(25) \quad \gamma^2 = \alpha^2 + i R (\beta - \alpha/2)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d \eta'^2} - \gamma^2 \varphi + i \alpha R \eta' \varphi = 0,$$

ihre Lösungen nach der Methode der sukzessiven Approximationen:

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi_1 = e^{\gamma \eta'} \left\{ 1 + i \alpha R \left(-\frac{1}{8 \gamma^3} + \frac{\eta'}{4 \gamma^2} - \frac{\eta'^2}{4 \gamma} \right) \right\} \\ \varphi_2 = e^{-\gamma \eta'} \left\{ 1 + i \alpha R \left(+\frac{1}{8 \gamma^3} + \frac{\eta'}{4 \gamma^2} + \frac{\eta'^2}{4 \gamma} \right) \right\} \end{cases}$$

Von $f_{1,2}$ brauchen wir nur das erste Glied

$$(27) \quad f_1 = \frac{e^{\gamma \eta'}}{\gamma^2 - \alpha^2} \quad f_2 = \frac{e^{-\gamma \eta'}}{\gamma^2 - \alpha^2}.$$

Nun werden die in Gleichung (20) vorkommenden Funktionen

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = e^{\gamma \eta'} \left\{ \frac{i \gamma}{\alpha R} + \left(\frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2} - \frac{1}{8 \gamma^2} + \frac{\eta'}{4 \gamma} + \eta'^2 \right) \right\} \\ F_2 = e^{-\gamma \eta'} \left\{ -\frac{i \gamma}{\alpha R} + \left(\frac{1}{\gamma^2 - \alpha^2} - \frac{1}{8 \gamma^2} - \frac{\eta'}{4 \gamma} + \eta'^2 \right) \right\}, \\ \frac{d f_1}{d \eta} = \frac{\gamma}{\gamma^2 - \alpha^2} e^{\gamma \eta'} \quad \quad \quad \frac{d f_2}{d \eta} = -\frac{\gamma}{\gamma^2 - \alpha^2} e^{-\gamma \eta'} \end{array} \right.$$

und wenn man mit diesen Funktionen unter Berücksichtigung der Bedeutung von η' in Gleichung (20) eingeht, heben sich alle Glieder mit αR weg. Die Gleichung lautet wie bei ruhenden Flüssigkeiten

$$(29) \quad (\alpha R)^2 \Delta = 2\gamma^2 \sin \gamma = 0.$$

Diese Gleichung hat die rein imaginären Wurzeln

$$\gamma = 0, \quad i\pi, \quad 2i\pi \dots$$

Die Unbekannte $i\beta R$, die nach (25) die Form hat

$$i\beta R = \gamma^2 - \alpha^2 + i\frac{\alpha R}{2},$$

hat also stets einen negativ reellen Teil; alle Schwingungen verlaufen mit Dämpfung; die Hauptströmung ist *für kleine αR absolut stabil*. Die Partialschwingung, welche zum kleinsten Wert von γ gehört, hat die geringste Dämpfung.

Solange αR klein ist — also auch für große Reynoldssche Zahlen, wenn die Störung von entsprechend großer Wellenlänge ist —, bleibt die Dämpfung der Schwingung dieselbe, wie auf der ruhenden Flüssigkeit. Nur der imaginäre Teil von $i\beta R$ hängt von αR ab, und zwar so, daß der reelle Teil von $\beta = \alpha/2$ ist, d. h. die Störung schreitet mit der mittleren Hauptströmungsgeschwindigkeit fort; alle Partialschwingungen werden in gleicher Weise von der Hauptströmung mitgenommen.

Unsere Ableitung versagt, wie man den Ausdrücken (28) ansieht, an den Stellen $\gamma = 0$ und $\gamma^2 - \alpha^2 = 0$. Es muß also hier noch unentschieden bleiben, ob die oben errechnete Wurzel $\gamma = 0$ wirklich vorhanden ist. Wir werden in § 6 sehen, daß dies der Fall ist. Die Stelle $\gamma^2 = \alpha^2$ erfordert eine besondere Überlegung:

Ist $\gamma = \alpha + \varepsilon$ und ε verschwindend klein, so ändert sich an den Ausdrücken für $\varphi_{1,2}$ nichts; aber es wird

$$f_{1,2} = \eta e^{\pm \alpha \eta} + \varepsilon H_1 + \alpha R H_2,$$

wobei H_1 und H_2 nur von η und α abhängen. Eine Wurzel $\gamma \sim \alpha$ ist dann vorhanden, wenn sich im Ausdruck $(\alpha R)^2 \Delta$ die nicht von ε und αR abhängigen Glieder wegheben; dann gibt es nämlich eine Lösung $\varepsilon \sim \alpha R$. Dies ist jedoch hier nicht der Fall; auch jetzt werden alle von $f_{1,2}$ und $d f_{1,2}/d\eta$ herrührenden Glieder von kleinerer Ordnung als die von $d\varphi_{1,2}/d\eta$ herrührenden und $(\alpha R)^2 \Delta$ wird in erster Näherung

$$(\alpha R)^2 \Delta = -2\alpha^2 \sin \alpha \neq 0$$

Also existieren für den Grenzfall „ αR klein“ keine anderen Wurzeln als die durch Gleichung (29) gegebenen.

Wir haben nun noch dieses System von Schwingungen genauer zu beschreiben. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichungen (16), (17) und (24), und zwar werden in erster Ordnung bis auf belanglose Konstanten:

$$f_1^* = e^{\gamma \eta'} - \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{\cos \gamma/2}{\cos \alpha/2} \sin \alpha \eta' + \frac{\sin \gamma/2}{\sin \alpha/2} \cos \alpha \eta' \right\}$$

$$f_2^* = e^{-\gamma \eta'} + \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{\cos \gamma/2}{\cos \alpha/2} \sin \alpha \eta' - \frac{\sin \gamma/2}{\sin \alpha/2} \cos \alpha \eta' \right\}$$

$$F_1^*(0) = e^{-\gamma/2}$$

$$F_2^*(0) = -e^{+\gamma/2}$$

Ist nun $\gamma = 0, 2i\pi, 4i\pi \dots$, so wird $F_1^*(0) = -F_2^*(0)$; im Ausdruck (24) heben sich dann die Glieder mit $\sin \alpha \eta'$ heraus, und die Glieder mit $\cos \alpha \eta'$ haben den Faktor $\sin \gamma/2$, der für die in Frage kommenden Werte zu Null wird. Die Stromfunktion f erhält den einfachen Ausdruck

$$(30) \quad f = \cos 0 \cdot \eta', \quad \cos 2\pi \eta', \quad \cos 4\pi \eta' \dots$$

Da $u \sim df/d\eta$, $v \sim f$, stellt dies Schwingungen dar, bei welchen die ganze Strömung 0mal, 2mal, 4mal unterteilt ist durch

Fig. 3.

Schichten, in denen die normal zur Wand gerichtete Geschwindigkeit v verschwindet. Da der Cosinus eine gerade Funktion ist, gehört zu einer positiven Ausschlagung

der einen Wand auch eine positive Ausschlagung der anderen; die beiden Wände schwingen in der gleichen Phase. Fig. 3a und c zeigen die Grundschwingung und die zur Wurzel $\gamma = 2\pi i$

gehörige 2. Oberschwingung. Bei der Grundschwingung ist die Geschwindigkeitskomponente u in der ganzen Strömung Null, v konstant. Daß die Grundschwingung so verläuft, ist physikalisch einleuchtend, obwohl die Gültigkeit der Wurzel $\gamma = 0$, wie schon bemerkt, aus unserer Ableitung noch nicht hervorgeht.

Ist $\gamma = i\pi, 3i\pi \dots$, so wird $F_1^*(0) = F_2^*(0)$; in (24) heben sich die Glieder mit $\cos a\eta'$ weg und die Glieder mit $\sin a\eta'$ verschwinden wegen ihres zu Null werdenden Faktors $\cos \gamma/2$. Es wird

$$f = \sin \pi \eta', \sin 3\pi \eta' \dots$$

Bei den so dargestellten ungeraden Oberschwingungen ist die Strömung 1mal, 3mal . . . unterteilt und die beiden Wände schwingen in entgegengesetzter Phase (Fig. 3b).

Wir haben ein vollständiges System von Schwingungen vor uns, das ganz analog dem in der früheren Arbeit gefundenen und dort als 1. Typus bezeichneten verläuft. Es ist bemerkenswert, daß trotz dieser physikalischen Gleichheit formal ein großer Unterschied zwischen den beiden Systemen besteht. Die Grundschwingung wird bei dem früher behandelten System mit verschwindender Geschwindigkeit an den Wänden durch eine Wurzel dargestellt, welche zwischen πi und $2\pi i$ liegt, welche also eigentlich unserer jetzigen 2. Oberschwingung entspricht. In dem jetzt behandelten Fall existieren also formal 2 Wurzeln mehr. In den §§ 5 und 8 werden wir sehen, daß der Unterschied bei großem aR tatsächlich bedeutungsvoll wird. Die höheren Oberschwingungen wandeln sich nämlich mit wachsendem aR zu dem früher sogenannten 2. und 3. Schwingungstypus, wobei die 2. Oberschwingung die Rolle der früheren Grundschwingung spielt; die diesmalige Grundschwingung und die erste Oberschwingung hingegen zeigen einen ganz abweichenden neuen Typus, der bei dem früher behandelten Fall gar nicht auftritt und der zur Instabilität führt. Für $R = \infty$, also bei Annäherung an das Verhalten reibungsloser Flüssigkeiten, gehen die höheren Oberschwingungen in die Lösungen der ersten Klammer der Differentialgleichung (4)

$$\beta - a\eta = 0$$

über, die Grundschwingung und die erste Oberschwingung in die beiden Lösungen der 2. Klammer

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f = 0,$$

die bei verschwindender Geschwindigkeit an der Wand nicht vorhanden sind, also in der früheren Arbeit wegfielen.

Dieser prinzipielle Unterschied zwischen den beiden Ansätzen tritt also im Grenzfall „ αR klein“ physikalisch überhaupt nicht hervor.

§ 5. Grenzfall großer αR .

Wird αR groß, so liegt die Annahme nahe, daß auch z groß ist, daß man also durch asymptotische Integration der Differentialgleichung (14) zu einer brauchbaren Näherung gelangt. Man kann diese Näherung entweder der Differentialgleichung direkt oder ihren Lösungen (22) und (23) entnehmen.

Wir wollen uns hier auf die ersten Glieder der asymptotischen Entwicklung beschränken, welche lauten:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(\alpha R)^{3/4}} \varphi_1 = z^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ \frac{1}{(\alpha R)^{5/4}} \varphi_2 = z^{-1/4} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ f_1 = \frac{z^{-1/4}}{z - \alpha^2} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ f_2 = \frac{z^{-1/4}}{z - \alpha^2} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}} \end{array} \right.$$

Die Reihen schreiten nach absteigenden Potenzen von $z^{1/2}$ und $z - \alpha^2$ fort und sind semikonvergent; unsere Ausdrücke gelten nur dann, wenn die Lösung Werte von z ergibt, die von den Punkten $z = 0$ und $z = \alpha^2$ weit entfernt sind. (Bei dem früher behandelten Ansatz war das durchgehends der Fall.) Ferner ist aber auch zu beachten, was in der früheren Arbeit (§ 2) über die Umlaufsrelationen der Zylinderfunktion gesagt wurde. Darnach sind unsere Ausdrücke nur zu brauchen, solange alle vorkommenden Werte von z , also speziell die Grenzwerte z_0 und z_1 im nämlichen Gebiete I oder II oder III der komplexen z -Ebene liegen (Fig. 4). Die im vorigen Kapitel behandelten Schwingungen entsprechen Wurzeln, welche gerade auf der Grenze der Gebiete II und III liegen. An diese können wir mit den jetzigen Ausdrücken keinen direkten Anschluß finden. Dagegen gelten die Ausdrücke genau im Gebiet I und mit sehr

guter Annäherung in den Grenzgebieten von I gegen II und III, also auf der ganzen Halbebene mit positiv reellem Teil von z . Dort müssen aber die Wurzeln liegen, wenn eine Instabilität herauskommen soll. Das Instabilitätsgebiet wird gegen das Stabilitätsgebiet durch die Gerade $\Re e(z) = \kappa^2$, die in Fig. 4 eingezeichnet ist, abgegrenzt. Nun werden die in Gleichung (21) vorkommenden Funktionen:

Fig. 4.

$$(32) \quad \begin{cases} F_1 = i z^{1/4} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}}, & F_2 = -i z^{1/4} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}}, \\ \frac{d f_1}{d z} = \frac{i z^{1/4}}{z - \kappa^2} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}}, & \frac{d f_2}{d z} = -\frac{i z^{1/4}}{z - \kappa^2} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke df/dz werden von kleinerer Ordnung als die Ausdrücke F ; trotzdem darf man sie in Gleichung (21) nicht wegstreichen, da dort

$$\frac{1}{\kappa} \frac{df}{dz}$$

gegen F steht und κ bei großem αR sehr klein wird.

Elementare Rechnung ergibt nun für (21) die Formel:

$$(33) \quad \begin{cases} \Delta = 2 i z_0^{1/4} z_1^{1/4} \left[1 + \frac{1}{\kappa^2 (z_0 - \kappa^2)(z_1 - \kappa^2)} \right] \\ \sin \alpha + \frac{i}{\kappa} \left\{ \frac{1}{z_1 - \kappa^2} - \frac{1}{z_0 - \kappa^2} \right\} \cos \alpha \cdot \sin \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) = 0 \end{cases}$$

Die Wurzeln von $\sin \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2})$ liegen in den Gebieten II und III: sie haben keine Gültigkeit. Die eckige Klammer kommt bei Berücksichtigung der Beziehung

$$z_0 - z_1 = i(\alpha R)^{1/2}$$

und der Bedeutung von κ nach (13) auf die Form:

$$\{\kappa^2(z_0 - \kappa^2)(z_1 - \kappa^2) + 1\} \sin \alpha - \alpha \cos \alpha = 0$$

und setzen wir

$$z_{0,1} = \xi \pm i \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2} \equiv \xi \pm i \frac{\alpha}{\kappa},$$

so wird

$$(34) \quad \begin{cases} \kappa^2 (\xi - \kappa^2)^2 + \frac{\alpha^2}{4} + 1 - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha = 0 \\ \xi = \kappa^2 \pm \frac{1}{\kappa} \sqrt{\alpha \operatorname{Cotg} \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4}} \end{cases}$$

Infolge (12) ist

$$\xi = \kappa^2 + \frac{i\beta - \frac{\alpha}{2}}{\kappa},$$

daher (34) vollkommen identisch mit (8). Für große αR ist der zeitliche Verlauf einer kleinen Störung derselbe wie bei reibungslosen Flüssigkeiten. Gegen Störungen von der räumlichen Frequenz $\alpha > 2,4$ verhält sich die Strömung indifferent, gegen $\alpha < 2,4$ instabil.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V , gleichfalls dieselbe wie bei reibungslosen Flüssigkeiten, ist

$$V = \frac{\beta U}{\alpha};$$

also bei den instabilisierenden Störungen ($\alpha < 2,4$) für beide Schwingungen gleich der mittleren Geschwindigkeit $U/2$ der Hauptströmung, bei $\alpha > 2,4$:

$$(35) \quad V = U \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{Cotg} \alpha}{\alpha}} \right),$$

also den Strömungsgeschwindigkeiten in 2 symmetrisch zur Mitte liegenden Schichten gleich, in der Grenze $\alpha = \infty$ den Geschwindigkeiten 0 und U der beiden Wände.

Für die Diskussion der Stromlinien ist die Lage der Grenzen z_0 und z_1 auf der z -Ebene wichtig. Zur Veranschaulichung ist diese Lage für $(\alpha R)^{1/2} = 10$ und $\alpha = 0,1, 1$ und 10 in Fig. 5 dargestellt. Die Größe κ^2 ist in den ersten 2 Fällen so klein, daß sie in der Figur gar nicht in Erscheinung tritt. Die gedämpfte Oberschwingung kann nicht als exakt berechnet gelten, da die dazu gehörigen z -Werte zu tief in den Gebieten II und III liegen. Auch bei großem κ^2 ist die Lösung nicht mehr exakt, da der Punkt z_1 oder z_0 zu nahe an den Punkt κ^2 heranrückt. Doch ist die genauere Diskussion dieser Schwingungen nicht von Interesse; sie wird trotz dieser Unexaktheit nichts ergeben, was von dem folgenden abweicht.

Die in (24) vorkommenden Funktionen werden:

$$F_1^*(0) = i z_0^{1/4} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} - \frac{1}{\pi \sin \alpha} \left\{ \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} - \frac{z_0^{1/4}}{z_0 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \cot \alpha \right\},$$

Nun ist in allen Fällen, wie man Fig. 5 ohne weiteres ansieht

$$e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \gg e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}},$$

daher reduziert sich $F_1^*(0)$ auf

$$(36) \quad F_1^*(0) = - \frac{1}{\pi \sin \alpha} \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}.$$

Fig. 5.

Im Ausdruck für $F_2^*(0)$ berücksichtigen wir, daß

$$e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \gg e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}$$

und erhalten

$$(37) \quad F_2^*(0) = - z_0^{1/4} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} \left(i + \frac{\cot \alpha}{x(z_0 - x^2)} \right).$$

Mit der gleichen Vernachlässigung werden:

$$(38) \quad f_1^*(\eta) = \frac{z^{-1/4}}{x - x^2} e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} - \frac{1}{\pi \sin \alpha} \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - x^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \cot \alpha \eta,$$

$$(39) \quad f_2^*(\eta) = \frac{z^{-1/4}}{x - x^2} e^{-i \frac{2}{3} z^{3/2}} + \frac{z_0^{1/4}}{x(z_0 - x^2)} e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} (\sin \alpha \eta - \cot \alpha \cot \alpha \eta).$$

In (24) eingesetzt:

$$(40) \left\{ \begin{aligned} f = e^{i\frac{2}{3}(z_1^{3/2} - z_0^{3/2})} & \left[-z_0^{1/4} \left(i + \frac{\operatorname{Cot} \alpha}{\alpha(z_0 - \alpha^2)} \right) \left(\frac{z^{-1/4}}{z - \alpha^2} e^{i\frac{2}{3}(z^{3/2} - z_1^{3/2})} \right. \right. \\ & - \frac{1}{\alpha \operatorname{Sin} \alpha} \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - \alpha^2} \operatorname{Cot} \alpha \eta \Big) + \frac{1}{\alpha \operatorname{Sin} \alpha} \frac{z_1^{1/4}}{z_1 - \alpha^2} \left(\frac{z^{-1/4}}{z - \alpha^2} e^{i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z^{3/2})} \right. \\ & \left. \left. + \frac{z_0^{1/4}}{\alpha(z_0 - \alpha^2)} (\operatorname{Sin} \alpha \eta - \operatorname{Cot} \alpha \operatorname{Cot} \alpha \eta) \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Der Klammerausdruck zerfällt in 2 Teile, wie schon durch die Benutzung der verschiedenen Variablen z und η hervor gehoben ist. Die Ausdrücke

$$e^{i\frac{2}{3}(z^{3/2} - z_1^{3/2})} \quad \text{und} \quad e^{i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z^{3/2})}$$

werden 1 für $z = z_1$ bzw. $z = z_0$, also je an einer Wand, und nehmen von dort aus sehr schnell ab, wenn sich z auf der in Fig. 5 eingezeichneten Parallelen zur imaginären Achse gegen den Punkt z_0 bzw. z_1 bewegt. Gleichen Schichtabständen η entsprechen um so größere Abschnitte auf dieser Geraden, je größer αR ist. Die Abnahme der durch diese Ausdrücke dargestellten Bewegung von der Wand aus erfolgt also um so schneller, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Der andere Teil von f , der nur die Funktionen $\operatorname{Sin} \alpha \eta$ und $\operatorname{Cot} \alpha \eta$ enthält, stellt eine wirbellose Bewegung dar, wie sie sich in reibungslosen Flüssigkeiten ausbildet. *Das ganze Innere unserer Strömung wird beherrscht von einer Potentialbewegung, und nur in engen Grenzschichten an den Wänden kommt die Wirkung der Reibung so zur Geltung, daß die Grenzbedingungen richtig erfüllt sind. Diese Grenzschichten sind um so enger, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Somit ist in unserem Fall aus der Theorie der reibenden Flüssigkeiten ein Verhalten gefolgert, welches als Grundannahme der Prandtlschen Grenzschichtentheorie in der Hydrodynamik eine bedeutende Rolle spielt.*¹⁾

Der wirbellose Teil der Bewegung läßt sich auf denselben einfachen Ausdruck bringen, der auch unmittelbar aus der Theorie der reibungslosen Flüssigkeiten mit Hilfe unserer Gleichungen (5) und (7) gefolgert werden kann; er erfüllt also für sich gerade die Grenzbedingungen der reibungslosen Flüssig-

1) L. Prandtl, Verh. des int. Math.-Kongr. 1904; H. Blasius, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 56. Heft 1. 1908.

keit. Bei Unterdrückung belangloser Konstanten wird bis auf die unmittelbare Nähe der Wände nach (40)

$$f = i \operatorname{Co}[\alpha \eta] + \frac{1}{\alpha(x_0 - x^2)} \operatorname{Sin} \alpha \eta,$$

oder nach (12) und (13)

$$(41) \quad f = \operatorname{Sin} \alpha \eta - \beta \operatorname{Co}[\alpha \eta].$$

Der *Stromlinienverlauf* dieser Schwingungen ist sehr vielgestaltig. Allgemein ist die Stromfunktion zur Zeit $t = 0$

$$\Pi = f e^{-i\alpha \xi}$$

und die Stromlinien sind durch die Gleichung

$$\Re \Pi = \text{const}$$

gegeben. Schreiben wir nun

$$(42) \quad f = P e^{\pm i\Phi},$$

so wird

$$(43) \quad \Re \Pi = P \cos(\alpha \xi \mp \Phi).$$

Nach Fig. 2 wird $\Phi = 0$ für $\alpha > 2,4$, für kleinere α ist es — wie P immer — eine Funktion von η . In der Gleichung

$$\beta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha}$$

gehört das positive Vorzeichen zur gedämpften, das negative zur anwachsenden Schwingung; in Gleichung (42) ist es wegen (41) umgekehrt, in Gleichung (43) dagegen wieder so, daß das negative Vorzeichen der anwachsenden Schwingung entspricht, welche Instabilität erzeugt. Für $\alpha < 2,4$ wird nun

$$(44) \quad P = \sqrt{\left(\operatorname{Sin} \alpha \eta - \frac{\alpha}{2} \operatorname{Co}[\alpha \eta]\right)^2 + \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha\right) \operatorname{Co}^2 \alpha \eta},$$

$$(45) \quad \cotg \Phi = \frac{\operatorname{Ig} \alpha \eta - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4} - \alpha \operatorname{Cotg} \alpha}}.$$

Diese Ausdrücke sind um die Mitte $\eta = 1/2$ symmetrisch, was bei der Symmetrie des physikalischen Problems selbstverständlich ist; in obiger Form sieht man die Symmetrie nicht; doch lohnt sich eine Umformung nicht, da die Ausdrücke sehr handlich sind.

Man rechnet am besten P und Φ als Funktionen von η aus, gibt sich dann bestimmte konstante Werte für den reellen Teil von Π und erhält aus (43) die zu bestimmten η -Werten gehörigen $\alpha \xi$ -Werte. Als Beispiel sei das Rechnungsergebnis für die instabilisierende Schwingung für $\alpha = 2$, daher $\beta = 1 - 0,273 i$, mitgeteilt.

Tabelle.

			$\Re \Pi$ = 0	$\Re \Pi$ = 0,3	$\Re \Pi$ = 0,5	$\Re \Pi$ = 0,56	$\Re \Pi$ = 0,64	$\Re \Pi$ = 1,04
η	P	Φ^0	$\alpha \xi^0$					
0	1,04	-16	74 u. - 106	57 u. - 89	46 u. - 76	42 u. - 72	36 u. - 68	- 16
0,1	0,87	-18	72 u. - 108	52 u. - 88	36 u. - 74	32 u. - 68	24 u. - 60	imag.
0,2	0,73	-24	66 u. - 114	41 u. - 89	23 u. - 71	15 u. - 63	4 u. - 52	imag.
0,3	0,64	-30	60 u. - 120	32 u. - 92	8 u. - 68	- 2 u. - 60	- 30	imag.
0,4	0,58	-39	51 u. - 129	20 u. - 98	- 9 u. - 69	- 24 u. - 54	imag.	imag.
0,5	0,56	-49	41 u. - 139	9 u. - 107	- 22 u. - 76	- 49	imag.	imag.
0,6	0,58	-59	31 u. - 149	0 u. - 118	- 29 u. - 89	- 44 u. - 74	imag.	imag.
0,8	0,73	-74	16 u. - 164	- 9 u. - 139	- 27 u. - 121	- 35 u. - 113	- 46 u. - 102	imag.
1.0	1,04	-82	8 u. - 172	- 9 u. - 155	- 21 u. - 143	- 25 u. - 139	- 30 u. - 134	- 82

Das Ergebnis veranschaulicht Fig. 6. Es gibt Stromlinien, welche an einer Wand beginnen und an der anderen enden, und solche, welche an dieselbe Wand zurücklaufen. Die Grenze zwischen beiden ist gegeben durch

$$\Re \Pi = P(1/2).$$

Die Stromlinien $\Re \Pi = P(0) = P(1)$ schrumpfen zu Punkten zusammen. Charakteristisch für den Vergleich mit denselben Schwingungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl (Fig. 3) ist die Verzerrung der ganzen Schwingung. Während dort die Phasen an beiden Wänden übereinstimmen, ist hier das ganze Stromlinienbild verdreht und zwar, wie Fig. 6 gleichfalls erkennen läßt, im entgegengesetzten Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs

in der Hauptströmung. Die andere Schwingung, welche durch (48) dargestellt wird, und welche gedämpft ist, unterscheidet sich von der diskutierten nur durch das Vorzeichen von Φ ; man erhält ihr Stromlinienbild durch Spiegelung der Fig. 6 an der η -Achse. Bei dieser Schwingung geht die Verdrehung im Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs. Sie gemahnt daher an den früher sogenannten 2. Typus von Schwingungen (Fig. 26 der alten Arbeit). Bei sehr großer Reynoldsscher Zahl und $a < 2,4$ bilden sich also 2 Schwingungen aus, die gegenüber den Schwingungen bei kleiner Reynoldsscher Zahl stark verzerrt erscheinen; die im Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs in der Hauptströmung

Fig. 6.

verzerrte Schwingung ist gedämpft, die im entgegengesetzten Sinn verzerrte widerstrebt der Hauptströmung und macht sie instabil.

Je kleiner a ist, um so mehr schrumpft das Gebiet zwischen den Stromlinien $\text{Re } II = P(1/2)$ zusammen, um so mehr Stromlinien gehen also von einer Wand zur anderen. In der Grenze $a = 0$ zeigen alle Stromlinien dieses Verhalten. Fig. 7 veranschaulicht die Stromlinien für $a = 0,1$. Bei $a = 2,4$ verschwindet die Verzerrung vollständig; die Stromlinien $\text{Re } II = 0$ sind Gerade, parallel zur y -Achse; die beiden Wände schwingen wieder in übereinstimmender Phase (Fig. 8).

Bei $a > 2,4$ zeigt sich ein ganz anderes Bild. Jetzt ist $\Phi = 0$ und

$$(46) \quad \text{Re } II = (\sin a \eta - \beta \cos a \eta) \cos a \xi.$$

Die Stromlinie $\Re e II = 0$ wird für jedes a , wie bei $a = 2,4$ von den Geraden $a\xi = \pm 90^\circ$ gebildet; die Stromlinien

Fig. 7.

$\Re e II = P(0)$ und $\Re e II = P(1)$, werden die Punkte $a\xi = 0$, $\eta = 0$, bzw. $\eta = 1$. Die Schwingungsamplitude nimmt von der Wand aus sehr rasch ab.

Fig. 8.

Fig. 9 zeigt die Stromlinien für $a = 3$; dabei ist das positive Vorzeichen im Ausdruck für β gewählt. Nimmt man das negative, so erhält man das Spiegelbild; Symmetrieachse ist dabei die

Gerade $\eta = 1/2$. Der Teilungspunkt A , der bei $\alpha < 2,4$ in der Mitte lag, ist jetzt durch das Minimum von P , d. h. durch die Gleichung

$$\cotg \alpha \eta = \beta$$

gegeben. Er rückt offenbar zu immer kleineren Werten von η , je größer α ist; für $\alpha = 3$ liegt er bei $\eta = 0,18$, für $\alpha = 10$ bei $\eta = 0,011$. Bei großem α , also kleinen Wellenlängen, ist somit die Symmetrie der einzelnen Schwingung verloren gegangen; die durch das physikalische Problem geforderte Symmetrie

Fig. 9.

kommt erst heraus, wenn man die beiden Schwingungen zusammen betrachtet. Dies bedeutet physikalisch, daß die von den beiden Wänden ausgehenden Schwingungen unabhängig voneinander verlaufen. Ihre Wirkung ist auf die unmittelbare Nähe der Wand beschränkt. Damit erinnern diese Schwingungen an den 3. Typus der früheren Arbeit; doch, ist die Analogie, wie auch oben beim 2. Typus, nur eine unvollkommene; denn der früher beschriebene 3. Typus bildete sich für jedes α um so vollkommener aus, je größer αR war, der jetzt beschriebene Typus existiert nur bei großem αR und $\alpha > 2,4$, um so vollkommener, je größer α ist.

§ 6. Berechnung der kritischen Zahl für kleine αR .

Wir fanden nun bei kleinem αR absolute Stabilität, bei großem αR und $\alpha < 2,4$ Instabilität gegen die Grundswin-

gung. Um die kritische Zahl R_* berechnen zu können, müssen wir die zur Grundschwingung gehörige Wurzel unserer transzendenten Gleichung in Abhängigkeit von αR weiter verfolgen. Im § 4 fanden wir $\gamma = 0$, also auch $z = 0$ für die Grundschwingung, mußten aber diese Wurzel als nicht streng gültig zunächst noch ablehnen. Wir müssen nun die in der Nähe von $z = 0$ liegende Wurzel von (21) exakt ableiten und darum die Lösungen unserer Differentialgleichungen (14) in der Nähe des Nullpunktes suchen.

Wir gehen zu diesem Zweck am besten von der Differentialgleichung selbst aus und integrieren sie mit Reihen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten. Wir erhalten außer den schon bekannten Lösungen $\cos \kappa z$ und $\sin \kappa z$ die Reihen:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= z^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{\kappa^2 z^2}{4!} + \frac{\kappa^4 z^4}{6!} - \dots \right) - 1 \cdot z^5 \left(\frac{1}{5!} - \frac{\kappa^2 z^2}{7!} + \frac{\kappa^4 z^4}{9!} - \dots \right) \\ &\quad + 1 \cdot 4 \cdot z^8 \left(\frac{1}{8!} - \frac{\kappa^2 z^2}{10!} + \dots \right) - \dots \\ f_2 &= z^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{\kappa^2 z^2}{5!} + \frac{\kappa^4 z^4}{7!} - \dots \right) - 2 \cdot z^6 \left(\frac{1}{6!} - \frac{\kappa^2 z^2}{8!} + \frac{\kappa^4 z^4}{10!} - \dots \right) \\ &\quad + 2 \cdot 5 \cdot z^9 \left(\frac{1}{9!} - \frac{\kappa^2 z^2}{11!} + \dots \right) - \dots \end{aligned} \right.$$

Dazu gehören die Ausdrücke

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{(\alpha R)^{3/2}} \varphi_1 &= 1 - \frac{\kappa^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4}{6!} z^6 - \dots \\ -\frac{1}{(\alpha R)^{5/2}} \varphi_2 &= z - \frac{2 \kappa^4}{4!} + \frac{2 \cdot 5}{7!} z^7 - \dots \end{aligned} \right.$$

Da zwar z klein, aber κ keiner Einschränkung unterworfen ist, kann κz jeden beliebigen Wert annehmen; die κz enthaltenden Klammern der Formeln (47) lassen sich aber leicht summieren:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\kappa^2} (-\cos \kappa z + 1) - \frac{1}{\kappa^5} \left(\sin \kappa z - \frac{\kappa \kappa}{1!} + \frac{\kappa^3 \kappa^3}{3!} \right) \\ &\quad + \frac{1 \cdot 4}{\kappa^8} \left(\cos \kappa z - 1 + \frac{\kappa^2 \kappa^2}{2!} - \frac{\kappa^4 \kappa^4}{4!} + \frac{\kappa^6 \kappa^6}{6!} \right) - \dots, \\ f_2 &= \frac{1}{\kappa^3} (-\sin \kappa z + \kappa z) - \frac{2}{\kappa^6} \left(-\cos \kappa z + 1 - \frac{\kappa^2 \kappa^2}{2!} + \frac{\kappa^4 \kappa^4}{4!} \right) \\ &\quad + \frac{2 \cdot 5}{\kappa^9} \left(\sin \kappa z - \frac{\kappa \kappa}{1!} + \frac{\kappa^3 \kappa^3}{3!} - \frac{\kappa^5 \kappa^5}{5!} + \frac{\kappa^7 \kappa^7}{7!} \right) - \dots \end{aligned} \right.$$

Konvergenzschwierigkeiten können nicht auftreten, da die Differentialgleichungen (14) im endlichen keine Singularitäten haben. Beim Einsetzen in die Gleichung (21) können wir die Ausdrücke sogar noch vereinfachen, indem wir die Summanden $\cos \kappa z$ und $\sin \kappa z$ in den Klammern der Formeln (49) weglassen; dieselben sind ja lineare Funktionen von $\cos a\eta$ und $\sin a\eta$, daher im ganzen Aufbau der Gleichung (21) von selbst richtig berücksichtigt (s. § 3).

Es erweist sich als notwendig, 3 Glieder der Entwicklung zu berücksichtigen. Damit in den ziemlich weitläufigen Rechnungen die Übersicht erhalten bleibt, sind in allen folgenden Formeln die Glieder 1. Ordnung 2mal, die Glieder 2. Ordnung 1mal unterstrichen. Es werden:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa^2}{2} + \frac{1}{\kappa^5} \left(\kappa z - \frac{\kappa^3 \kappa^3}{6} \right) - \frac{\kappa^5}{30} - \frac{4}{\kappa^8} \\ &\quad \left(1 - \frac{\kappa^2 \kappa^2}{2} + \frac{\kappa^4 \kappa^4}{24} - \frac{\kappa^6 \kappa^6}{720} \right) + \frac{\kappa^8}{1440}, \\ F_2 &= -1 + \frac{\kappa \kappa}{\kappa^3} + \frac{\kappa^3}{3} - \frac{2}{\kappa^6} \left(1 - \frac{\kappa^2 \kappa^2}{2} + \frac{\kappa^4 \kappa^4}{24} \right) - \frac{\kappa^6}{72}, \\ (51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df_1}{dz} &= \frac{1}{\kappa^4} \left(1 - \frac{\kappa^2 \kappa^2}{2} \right) + \frac{4}{\kappa^7} \left(\kappa z - \frac{\kappa^3 \kappa^3}{6} + \frac{\kappa^5 \kappa^5}{120} \right), \\ \frac{df_2}{d\kappa} &= \frac{1}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa^5} \left(\kappa z - \frac{\kappa^3 \kappa^3}{6} \right). \end{aligned} \right.$$

Daraus:

$$\begin{aligned} F_1(0) F_2(1) - F_2(0) F_1(1) &= - \frac{\kappa_0^2 - \kappa_1^2}{2} - \frac{1}{\kappa^4} \left\{ (z_0 - z_1) + \frac{\kappa^2}{6} (z_0^3 - z_1^3) \right\} \\ &\quad + \frac{\kappa_0^5 - \kappa_1^5}{30} + \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa_0^2}{2} \right) \left(\frac{\kappa_1}{\kappa^2} + \frac{\kappa_1^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa_1}{2} \right) \left(\frac{\kappa_0}{\kappa^2} + \frac{\kappa_0^3}{3} \right) \\ &\quad + \frac{4}{\kappa^6} \left\{ - \frac{\kappa_0^3 - \kappa_1^3}{2} + \frac{\kappa^2}{24} (z_0^4 - z_1^4) - \frac{\kappa^4}{720} (z_0^6 - z_1^6) \right\} - \frac{\kappa_0^8 - \kappa_1^8}{1440} \\ &\quad - \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa_0^2}{2} \right) \left\{ \frac{2}{\kappa^6} \left(1 - \frac{\kappa^2 \kappa_1^2}{2} + \frac{\kappa^4 \kappa_1^4}{24} \right) + \frac{\kappa_1^6}{72} \right\} + \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{\kappa_1^2}{2} \right) \\ &\quad \left\{ \frac{2}{\kappa^6} \left(1 - \frac{\kappa^2 \kappa_0^2}{2} + \frac{\kappa^4 \kappa_0^4}{24} \right) + \frac{\kappa_0^6}{72} \right\} + \left\{ \frac{1}{\kappa^4} \left(z_0 - \frac{\kappa^2 \kappa_0^3}{6} \right) - \frac{\kappa_0^5}{30} \right\} \\ &\quad \left(\frac{\kappa_1}{\kappa^2} + \frac{\kappa_1^3}{3} \right) - \left\{ \frac{1}{\kappa^4} \left(z_1 - \frac{\kappa^2 \kappa_1^3}{6} \right) - \frac{\kappa_1^5}{30} \right\} \left(\frac{\kappa_0}{\kappa^2} + \frac{\kappa_0^3}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{z_0^3 - z_1^3}{2} - \frac{2}{x^4}(z_0 - z_1) - \frac{1}{6x^2}(z_0^3 - z_1^3) + \frac{z_0 z_1}{2x^2}(z_0 - z_1) \\
&\quad + \frac{1}{30}(z_0^5 - z_1^5) - \frac{z_0^3 z_1^2}{6}(z_0 - z_1) - \frac{4}{x^6}(z_0^2 - z_1^2) + \frac{1}{4x^4}(z_0^4 - z_1^4) \\
&\quad - \frac{z_0 z_1}{2x^4}(z_0^2 - z_1^2) + \frac{1}{120x^2}(z_0^6 - z_1^6) - \frac{z_0 z_1}{30x^2}(z_0^4 - z_1^4) \\
&\quad + \frac{z_0^3 z_1^2}{24x^2}(z_0^2 - z_1^2) - \frac{1}{1440}(z_0^8 - z_1^8) + \frac{z_0^2 z_1^2}{144}(z_0^4 - z_1^4) \\
&\quad - \frac{z_0^3 z_1^2}{90}(z_0^2 - z_1^2) \\
&= -(z_0 - z_1) \left[\frac{z_0 + z_1}{2} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{6x^2}(z_0 - z_1)^2 - \frac{1}{30}(z_0^4 + z_1^4) \right. \\
&\quad \left. + \frac{z_0^3 z_1 + z_1^3 z_0 - 4z_0^2 z_1^2}{(z_0 + z_1)} + (z_0 + z_1) \left\{ \frac{4}{x^6} - \frac{1}{4x^4}(z_0 - z_1)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{120x^2}(z_0 - z_1)^4 + \frac{1}{1440}(z_0^6 + z_1^6 - 9z_0^4 z_1^2 - 9z_0^2 z_1^4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 16z_0^3 z_1^3) \right\} \right].
\end{aligned}$$

Nun berücksichtigen wir, daß

$$z_0 - z_1 = i \frac{\alpha}{x} = i(aR)^{1/2}$$

und führen wieder ein

$$(52) \quad z_{0,1} = \xi \pm i \frac{\alpha}{2x},$$

dann wird:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} F_1(0)F_2(1) - F_2(0)F_1(1) &= -i \frac{\alpha}{x} \left[\xi + \frac{2}{x^4} - \frac{\alpha^2}{6x^4} + \frac{1}{6} \xi \frac{\alpha^2}{x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{120} \frac{\alpha^4}{x^4} + 2 \xi \left\{ \frac{4}{x^6} + \frac{\alpha^2}{4x^6} - \frac{\alpha^4}{120x^6} + \frac{1}{240} \xi^2 \frac{\alpha^4}{x^4} + \frac{1}{45 \cdot 64} \frac{\alpha^6}{x^6} \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ebenso:

$$(54) \quad \left(\frac{df_1}{d\tau} \right)_0 \left(\frac{df_2}{d\tau} \right)_1 - \left(\frac{df_2}{d\tau} \right)_0 \left(\frac{df_1}{d\tau} \right)_1 = -\frac{1}{x^6} \cdot \frac{x^2}{2} (z_0^2 - z_1^2) = -i \frac{\alpha}{x} \cdot \frac{\xi}{x^4}.$$

$$\begin{aligned}
 (55) \quad & \left\{ \left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 + F_1(1) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 + F_2(1) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 \right\} \right. \\
 &= \left\{ \frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{6x^4} (z_0^3 + z_1^3) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) + \frac{2}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) \\
 &\quad \left. + \frac{x_0 x_1}{x^4} (z_0 + z_1) - \frac{x_0^2 x_1^2}{6x^2} (z_0 + z_1) \right\} \\
 &- \left\{ -\frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{x_0 x_1}{2x^4} (z_0 + z_1) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{x_0^2 x_1^2}{6x^2} (z_0 + z_1) - \frac{4}{x^6} (z_0 + z_1) \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) \right\} \\
 &= \frac{4}{x^4} + \frac{6}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{3}{2x^4} (z_0 + z_1) (z_0 - z_1)^2 = \frac{4}{x^4} + \frac{6\xi}{x^6} \left(2 + \frac{\alpha^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & \left\{ \left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 + F_1(1) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 + F_2(1) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 \right\} \right. \\
 &= \left\{ \frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{6x^4} (z_0^3 + z_1^3) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) + \frac{2}{x^6} (z_0 + z_1) + \frac{1}{x^4} (z_0^3 + z_1^3) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{6x^2} (z_0^5 + z_1^5) \right\} \\
 &- \left\{ -\frac{2}{x^4} + \frac{1}{2x^2} (z_0^2 + z_1^2) + \frac{1}{x^6} (z_0 + z_1) - \frac{1}{2x^4} (z_0^3 + z_1^3) \right. \\
 &\quad + \frac{1}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{6x^2} (z_0^5 + z_1^5) - \frac{4}{x^6} (z_0 + z_1) \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3x^4} (z_0^3 + z_1^3) - \frac{1}{30x^2} (z_0^5 + z_1^5) \right\} \\
 &= \frac{4}{x^4} + \frac{6}{x^6} (z_0 + z_1) = \frac{4}{x^4} + \frac{12}{x^6} \xi.
 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke ergeben in Gleichung (21) eingesetzt für ξ (wenn wir wieder $(aR)^{1/2}$ anstatt a/x schreiben) die Gleichung:

$$(57) \quad \frac{\xi^3}{120} (aR)^{3/2} + \frac{\xi^2}{6} (aR)^{3/2} + \xi \{ 1 + (aR)^2 A \} + (aR)^{1/2} B = 0$$

wobei A und B folgende Funktionen von α allein sind:

$$(58) \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{\alpha^6} \left(9 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{60} + \frac{\alpha^6}{45 \cdot 32} - \frac{\operatorname{Cotg} \alpha}{\alpha} (12 + 3\alpha^2) + \frac{12}{\alpha \sin \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^6} \left(9 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{60} + \frac{\alpha^6}{45 \cdot 32} - \frac{1}{\alpha} \operatorname{Zg} \frac{\alpha}{2} \left(12 + \frac{3\alpha^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \alpha \operatorname{Cotg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

$$(59) \left\{ \begin{aligned} B &= \frac{1}{\alpha^4} \left\{ 2 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120} - 4 \left(\frac{\operatorname{Cotg} \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha \sin \alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha^4} \left(2 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120} - \frac{4}{\alpha} \operatorname{Zg} \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

Fig. 10.

Gleichung (57) hat eine kleine Wurzel, welche in 1. Ordnung, wie zu erwarten war, $\xi = 0$ wird. In 2. und 3. Ordnung wird:

$$(60) \quad \xi = -B(\alpha R)^{1/2} \left\{ 1 - \left(A - \frac{B}{6} \right) (\alpha R)^2 \right\}.$$

Die Funktionen A und B sind in Fig. 10 aufgezeichnet; sie sind für kleine α negativ, für große positiv; die Reihen für kleine α werden:

$$A = -0,595 \cdot 10^{-3} + 0,122 \cdot 10^{-3} \alpha^2,$$

$$B = -8,33 \cdot 10^{-3} + 1,69 \cdot 10^{-3} \alpha^2.$$

Der Ausdruck (60) konvergiert ausgezeichnet, da der Koeffizient $A - B/6$ nur von der Größenordnung 10^{-3} ist; man kann also (60) bis etwa $\alpha R = 15$ sicher benutzen. Die kritische Zahl R_* ist nun dadurch gegeben, daß der reelle Teil von $i\beta$ zu Null wird, also nach (12) und (52) durch die Gleichung

$$\xi = \frac{\alpha^2}{(\alpha R)^{1/2}},$$

also in erster Näherung durch

$$(61) \quad R_*^2 = -\frac{1}{B},$$

genauer

$$(62) \quad R_*^2 = -\frac{1}{B} \left\{ 1 - \left(\frac{A}{B} - \frac{1}{6} \right) \alpha^2 \right\}.$$

Für $\alpha = 0$ wird $R_*^2 = 120$, also $R_* = 10,9$, für größere α wächst es; man erhält für

$$\alpha = 1/2 \quad R_* = \sqrt{130} = 11,4$$

$$\alpha = 1 \quad R_* = \sqrt{165} = 12,8$$

$$\alpha = 2 \quad R_* = \sqrt{396} = 19,9$$

Die letzte Zahl liegt schon außerhalb des Gültigkeitsbereiches; das Zusatzglied in (62) macht hierbei 40 Proz. aus; dagegen kann der Wert für $\alpha = 1$ als voll gültig angesehen werden, da das Zusatzglied dabei nur 10 Proz. ausmacht.

Es ergibt sich also: *Die kleinste kritische Zahl gehört zu den kleinsten Werten von α ; je langweiliger die Störung, um so leichter erzeugt sie Instabilität. Die kritische Reynoldssche Zahl ist*

$$R_* = 11.$$

Daß sie kleiner ist als die kleinste beobachtete, entspricht dem Ansatz; die angenommene Grundbedingung stellt ja einen Grenzfall dar, in welchem Störungen mehr begünstigt werden, als in Wirklichkeit zu erwarten ist.

§ 7. Weitere Näherung für große αR .

Um auch die kritische Zahl für Werte von α zu berechnen, die zwischen 1 und 2,4 liegen, müssen wir von der im § 5 zugrunde gelegten asymptotischen Entwicklung ausgehen und weitere

Näherungen versuchen. Es sei gleich vorweggenommen, daß die Ergebnisse dieser Rechnung nicht sehr befriedigend sind. Die Konvergenz der asymptotischen Entwicklungen reicht nicht immer aus, um sie bis zu den kritischen Werten benutzen zu können.

Die asymptotischen Reihen, deren erste Glieder in (31) angegeben sind, lauten

$$(63) \quad \frac{1}{(\alpha R)^{3/2}} \varphi_1 = e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} \left(z^{-1/4} - \frac{5}{48} i z^{-7/4} \right),$$

$$(64) \quad f_1 = e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} \left\{ \frac{\kappa^{-1/4}}{\kappa - \kappa^2} \left(1 - \frac{5}{48} i z^{-3/2} \right) - \frac{2 i \kappa^{1/4}}{(\kappa - \kappa^2)^2} \right\}$$

Die Funktionen

$$\frac{1}{(\alpha R)^{3/2}} \varphi_2 \quad \text{und} \quad f_2$$

erhält man daraus, wenn man nur $+i$ durch $-i$ ersetzt. Geht man mit diesen Ausdrücken in die Gleichung (21) ein, so erhält man eine sehr lange, aber nicht unübersichtliche Gleichung, die für kleine αR keine instabilen Wurzeln mehr hat. Diese Gleichung ist trotzdem nicht zur Berechnung der kritischen Zahl geeignet. Mit fallendem αR fallen nämlich die vorkommenden z -Werte rasch und nähern sich der reellen Achse (s. Gleichung (34)); anderseits wächst κ^2 auf der reellen Achse, so daß die Wurzeln immer näher an den Punkt κ^2 herandrücken, wo die Entwicklung versagt. Die Reihe (63) konvergiert sehr gut und ist bis zu Werten $z = 2$ sicher zu benutzen; die Reihe (64) konvergiert aber sehr schlecht, so daß $z - \kappa^2$ sicher keine so kleinen Werte mehr annehmen darf.

Daraus folgt, daß unsere Entwicklungen nur brauchbar sind, wenn die vorkommenden z -Werte erheblich größer als κ^2 sind. Für diesen Fall ist es aber nicht nötig, die Ausdrücke (63) und (64) zu benutzen; man erleichtert sich die rechnerische Arbeit bedeutend, wenn man erst nach Potenzen von κ^2/z entwickelt und die Glieder mit $(\kappa^2/z)^2$ wegläßt.

$$\text{Nun ist} \quad z \sim (\alpha R)^{1/2} \quad \text{und} \quad \kappa^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha R)^{2/3}},$$

also, da wir uns nur für den Bereich instabiler Schwingungen, d. h. für $\alpha < 2,4$ interessieren,

$$\frac{\kappa^2}{z} \sim z^{-3}.$$

Da die Entwicklungen (63) und (64) nach Potenzen von $z^{-3/2}$ gehen, könnte man erwarten, daß in zweiter Ordnung κ^2/z noch gar keine Rolle spielt. Die Durchführung zeigt jedoch, daß, solange κ^2/z vernachlässigt wird, eine Änderung der Wurzeln gegenüber der ersten Näherung nicht herauskommt, auch nicht, wenn man zu höheren Gliedern als denen mit $z^{-3/2}$ fortschreitet.

Aus der bekannten semikonvergenten Reihe der Zylinderfunktionen in Gleichung (22) und der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = - \frac{1}{(\alpha R)^{3/2}} \varphi$$

erhält man nämlich

$$\frac{1}{(\alpha R)^{3/2}} \varphi_1 = e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} z^{-1/4} (1 - 0,104 i z^{-3/2} - 0,0835 z^{-3} + 1,15 i z^{-9/2}),$$

$$f_1 = e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} z^{-3/4} (1 - 2,104 i z^{-3/2} - 7,79 z^{-3} + 41,8 i z^{-9/2})$$

und daraus

$$(65) \quad \frac{df_1}{dz} = e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} i z^{-3/4} (1 - 0,854 i z^{-3/2} - 2,00 z^{-3} + 8,7 i z^{-9/2}),$$

$$(66) \quad F_1 = e^{i \frac{2}{3} z^{3/2}} i z^{1/4} (1 - 0,854 i z^{-3/2} - 2,00 z^{-3} + 8,7 i z^{-9/2}).$$

Aus der Gleichheit der beiden Klammern in (65) und (66) folgt aber, daß durch Mitberücksichtigung der höheren Glieder nur jeder Summand in Gleichung (21) — außer dem letzten, der wegfällt — mit demselben Faktor multipliziert wird; die Wurzeln von (21) werden daher nicht geändert.

Lautet daher die Gleichung (21) in erster Näherung ($\kappa^2/z = 0$ und $z^{-3/2} = 0$)

$$\Phi_0 = 0,$$

so erhält sie bei weiterer Entwicklung die Form

$$(67) \quad \Phi_0 (1 + a z^{-3/2} + \dots) + \frac{\kappa^2}{z} (b + c z^{-3/2} + \dots) + \dots = 0.$$

Solange wir die Glieder mit $z^{-3/2}$ vernachlässigen, bleiben wir vollkommen im Rahmen der Rechnungen von § 5. Eine Näherung darüber hinaus erhalten wir erst in der Gestalt

$$(68) \quad \Phi_0 + \frac{\kappa^2}{z} (b + c z^{-3/2} - a b z^{-3/2}) = 0.$$

Aus dieser schematischen Darstellung folgt, daß wir in der Entwicklung bis zur Größenordnung $z^{-9/2}$ gehen müssen, daß aber

nur die Glieder mit $z^{-3/2}$, x^2/z und $x^2/z \cdot z^{-3/2}$ von Bedeutung sind.

Wir setzen daher nun:

$$(69) \quad f_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} z^{-1/4} \left\{ 1 - 2,104 i z^{-1/2} + \frac{x^2}{z} (1 - 6,104 i z^{-1/2}) \right\},$$

was durch Entwicklung aus (64) erhalten werden kann. Dann werden

$$(70) \quad \frac{df_1}{dz} = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} i z^{-3/4} \left\{ 1 - 0,854 i z^{-1/2} + \frac{x^2}{z} (1 - 3,854 i z^{-1/2}) \right\},$$

$$(71) \quad F_1 = e^{i\frac{2}{3}z^{3/2}} i z^{1/4} \left\{ 1 - 0,854 i z^{-1/2} - i \frac{x^2}{z} z^{-3/2} \right\}.$$

Da df_2/dz und F_2 die konjugiert komplexen Ausdrücke zu (70) und (71) sind, erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} F_1(0) \cdot F_2(1) - F_2(0) \cdot F_1(1) &= 2 i \Im m \left[e^{i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})} z_0^{-1/4} z_1^{-1/4} (1 - 0,854 i z_0^{-1/2} - i x^2 z_0^{-3/2}) \right. \\ &\quad \left. (1 + 0,854 i z_1^{-1/2} + i x^2 z_1^{-3/2}) \right] \\ &= 2 i \Im m \left[e^{i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})} z_0^{-1/4} z_1^{-1/4} (1 - 0,854 i (z_0^{-1/2} - z_1^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. - i x^2 (z_0^{-3/2} - z_1^{-3/2})) \right] \\ &= 2 i z_0^{-1/4} z_1^{-1/4} \left[\sin \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) + \cos \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) \right. \\ &\quad \left. (-0,854 (z_0^{-1/2} - z_1^{-1/2}) - x^2 (z_0^{-3/2} - z_1^{-3/2})) \right]. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen diesen Ausdruck durch Einführung von Polarkoordinaten in der z -Ebene:

$$z_0 = r e^{i\varphi} \qquad z_1 = r e^{-i\varphi}.$$

Dann werden

$$\begin{aligned} z_0^n z_1^n &= r^{2n} \\ z_0^n - z_1^n &= 2 i r^n \sin n\varphi \\ z_0^n + z_1^n &= 2 r^n \cos n\varphi \end{aligned}$$

und daher

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} &F_1(0) F_2(1) - F_2(0) F_1(1) \\ &= -2 r^{1/2} \left[\Im m \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + \Re \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot r^{-3/2} \left(1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} + \frac{x^2}{r} \cdot 2 \sin \frac{5\varphi}{2} \right) \right], \end{aligned} \right.$$

ebenso:

$$(73) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 - \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 \\ &= 2i \Im m \left[e^{i \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2})} z_0^{-3/4} z_1^{-3/4} \{ 1 - 0,854 i z_0^{-3/2} \right. \\ &\quad \left. + \kappa^2 z_0^{-1} - 3,854 i \kappa^2 z_0^{-5/2} \} \cdot \{ 1 + 0,854 i z_1^{-3/2} + \kappa^2 z_1^{-1} \right. \\ &\quad \left. + 3,854 i \kappa^2 z_1^{-5/2} \} \right] \\ &= -2 r^{-3/2} \left[\Im m \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \left(1 + 2 \frac{\kappa^2}{r} \cos \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. + \Re f \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) r^{-3/2} \left(1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} + 7,71 \frac{\kappa^2}{r} \sin \frac{5\varphi}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 1,708 \frac{\kappa^2}{r} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

$$(74) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ F_1(0) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_1 - F_2(1) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_0 \right\} - \left\{ F_2(0) \left(\frac{df_1}{dz} \right)_1 - F_1(1) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 \right\} \\ &= 2i \Im m \left[e^{i \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2})} z_0^{-3/4} z_1^{-3/4} \{ z_0 (1 - 0,854 i z_0^{-3/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i \kappa^2 z_0^{-5/2}) (1 + 0,854 i z_1^{-3/2} + \kappa^2 z_1^{-1} + 3,854 i \kappa^2 z_1^{-5/2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - z_1 (1 + 0,854 i z_1^{-3/2} + i \kappa^2 z_1^{-5/2}) (1 - 0,854 i z_0^{-3/2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa^2 z_0^{-1} - 3,854 i \kappa^2 z_0^{-5/2}) \} \right] \\ &= -2 r^{-3/2} \left[\Im m \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot \frac{i\alpha}{\kappa} \left(1 + 2 \frac{\kappa^2}{r} \cos \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. + \Re f \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \cdot r^{-3/2} \left(1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} \cdot \frac{i\alpha}{\kappa} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \kappa^2 2 \cos \frac{3\varphi}{2} - i \kappa^2 \cdot 7,71 \cos \frac{7\varphi}{2} + i \kappa^2 \cdot 1,708 \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Der letzte Summand der Gleichung (21),

$$F_1(0) \left(\frac{df_2}{dz} \right)_0 \dots,$$

enthält keine Faktoren

$$\Re f \left(\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right);$$

er ist, da r groß ist, und $\sin 3\varphi/2$ im betrachteten Bereich nicht klein wird, gegenüber den anderen Gliedern zu vernachlässigen. Auch wird

$$\mathfrak{Cof} \left(\frac{4}{3} r^{1/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) = \mathfrak{Sin} \left(\frac{4}{3} r^{1/2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$$

zu setzen sein, und dieser Faktor aus der Gleichung heraustreten. Wir erhalten schließlich durch Einsetzen der Ausdrücke (72), (73) und (74) in (21), wenn wir die Glieder gleich nach dem Schema (67) anordnen:

$$(75) \left\{ \begin{aligned} & [(\kappa^2 r^2 + 1) \mathfrak{Sin} \alpha - \alpha \mathfrak{Cof} \alpha] \left(1 + r^{-1/2} \cdot 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \\ & + \frac{\kappa^2}{r} \left[2 \cos \varphi (\mathfrak{Sin} \alpha - \alpha \mathfrak{Cof} \alpha) + r^{-1/2} \left\{ \left(\kappa^2 r^2 \cdot 2 \sin \frac{5\varphi}{2} \right. \right. \right. \\ & + 7,71 \sin \frac{5\varphi}{2} + 1,708 \sin \frac{\varphi}{2} \Big) \mathfrak{Sin} \alpha - \frac{\alpha \mathfrak{Cof} \alpha}{\sin \varphi} \left(\cos \frac{3\varphi}{2} \right. \\ & \left. \left. \left. + 0,854 \cos \frac{\varphi}{2} - 3,854 \cos \frac{7\varphi}{2} \right\} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Die erste Näherung ist durch die erste eckige Klammer gegeben; in den Rechnungen von § 5 ist aber auch noch das erste Glied mit κ^2/r berücksichtigt; die Abweichung von dem Verhalten reibungsloser Flüssigkeiten rührt nur von den Gliedern mit $r^{-1/2}$ her. Berücksichtigen wir nun noch, daß

$$2 r \sin \varphi = (a R)^{2/3},$$

also

$$\kappa^2 r^2 = \frac{a^2}{4 \sin^2 \varphi},$$

so werden die einzelnen Glieder in der schematischen Form (68) unserer Gleichung:

$$(76) \quad \Phi_0 = \left(\frac{a^2}{4 \sin^2 \varphi} + 1 \right) \mathfrak{Sin} \alpha - \alpha \mathfrak{Cof} \alpha$$

$$(77) \quad b = 2 \cos \varphi (\mathfrak{Sin} \alpha - \alpha \mathfrak{Cof} \alpha)$$

$$(78) \left\{ \begin{aligned} c - a b &= \left(\alpha^2 \cdot \frac{\sin \frac{5\varphi}{2}}{2 \sin^2 \varphi} + 7,71 \sin \frac{5\varphi}{2} + 1,708 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ & \mathfrak{Sin} \alpha - \frac{1}{\sin \varphi} \left(\cos \frac{3\varphi}{2} + 0,854 \cos \frac{\varphi}{2} \right. \\ & \left. - 3,854 \cos \frac{7\varphi}{2} \right) \cdot \alpha \mathfrak{Cof} \alpha - 1,708 \sin \frac{3\varphi}{2} \\ & \cdot 2 \cos \varphi (\mathfrak{Sin} \alpha - \alpha \mathfrak{Cof} \alpha) \\ & = (\alpha^2 A + B) \mathfrak{Sin} \alpha - C \alpha \mathfrak{Cof} \alpha - D (\mathfrak{Sin} \alpha - \alpha \mathfrak{Cof} \alpha). \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck (76) geht mit wachsendem φ von positiven zu negativen Werten. Der Nullpunkt gibt die erste Näherung der Hauptgleichung (75); solange κ^2/r vernachlässigt ist, haben wir Instabilität bei jedem positiv reellem Teil von z , also für $\varphi < 90^\circ$. Fig. 11 zeigt φ in Abhängigkeit von a ; bei $a = 2,4$ wird φ gerade $= 90^\circ$, und zwar ist dies eine Doppelwurzel; für größere a gibt es kein reelles φ mehr.

(77) ist stets negativ; berücksichtigten wir also, in § 5 nur (76) und (77), wie es zur Annäherung an den reibungslosen Zustand geboten war, so rückten die Wurzeln gegenüber unserer jetzigen Näherung zu etwas kleinerem φ , d. h. physikalisch zu größeren logarithmischen Inkrementen der Schwingung, also zu stärker anwachsenden Schwingungen.

Ist nun (78) gleichfalls negativ, so rückt φ gegenüber der Näherung des § 5 zu noch kleineren Werten, als es den reibungslosen Flüssigkeiten entspricht; ist (78) positiv, so wird φ gegenüber den reibungslosen Flüssigkeiten größer, die Strömung also weniger instabil. Es entspräche dem physikalischen Gefühl, nur das letztere Verhalten zu erwarten; die Rechnung zeigt aber etwas anderes.

Die folgende Tabelle gibt die numerischen Werte der in (78) stehenden Funktionen von φ :

φ	A	B	C	D
55°	0,502	6,01	5,56	1,94
60°	0,333	4,71	4,71	1,71
65°	0,183	3,24	3,51	1,43
70°	0,049	1,65	2,19	1,13
75°	− 0,070	0,03	0,82	0,82
80°	− 0,176	− 1,54	− 0,53	0,52
85°	− 0,270	− 3,06	− 1,82	0,24
90°	− 0,354	− 4,24	− 2,83	0,00

Berechnet man daraus den Ausdruck (78), so erweist er sich für alle vorkommenden a zwischen $\varphi = 60^\circ$ und $\varphi = 80^\circ$ negativ. Es zeigt sich also das paradoxe Resultat, daß für alle Störungen von $a = 0$ bis etwa $a \sim 2$ zunächst bei fallendem R eine noch höhere Neigung zur Instabilität vorhanden ist, als bei reibungslosen Flüssigkeiten. Je mehr R fällt, um so mehr rückt infolge des Wachsens von κ^2 , φ zu kleineren Werten und kommt schließlich in ein Bereich, wo (78) positiv wird; doch liegt dies weit außerhalb der Gültigkeitsgrenze unserer Gleichung.

Es gelingt daher nicht, mit Hilfe dieser Näherung die kritische Zahl im Bereich $\alpha < 2$ zu berechnen.

Unser Ergebnis ist paradox; da aber eine Strömung reibender Flüssigkeit prinzipiell etwas ganz anderes ist als eine Strömung reibungsloser Flüssigkeit, kann man es nicht als absurd ansehen; absurd wäre es wohl, wenn eine Störung in reibender

Fig. 11.

Flüssigkeit zur Instabilität führen würde, die in reibungsloser Flüssigkeit nicht dazu imstande ist. Dies ist nun nicht der Fall; Fig. 11 zeigt, daß für $\alpha \sim 2,4$ φ in die Nähe von 90° rückt; dort aber wird (78) positiv; solche Störungen zeigen also das besprochene paradoxe Verhalten nicht. Wir können sogar in diesem Bereich die kritische Zahl berechnen:

Wir entwickeln zu diesem Zweck in (75) die trigonometrischen Funktionen in der Umgebung von $\varphi = 90^\circ$, setzen also

$$\varphi = 90^\circ - \varepsilon,$$

dann wird

$$\cos \varphi = \varepsilon \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{usw.}$$

$$r = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2 \sin \varphi} = \frac{(\alpha R)^{1/2}}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \right).$$

Entwickeln wir die Ausdrücke (76) und (77), so erhalten wir:

$$(79) \quad \Phi_0 = \left(\frac{\alpha^2}{4} + 1 \right) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \varepsilon^2 \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha$$

$$(80) \quad b = \varepsilon \cdot 2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

Bleiben wir im Rahmen des § 5, indem wir (78) vernachlässigen, so ergibt sich:

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 \cdot \frac{\alpha^2}{4} \sin \alpha + \left(\frac{\alpha^2}{4} + 1 \right) \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \\ + \varepsilon \cdot 4 \frac{\kappa^2}{(\alpha R)^{1/2}} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(82) \quad \varepsilon = \frac{4}{\alpha^2} \left(\alpha \cotg \alpha - 1 \right) \cdot \frac{2 \kappa^2}{(\alpha R)^{1/2}} \pm \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

also in Übereinstimmung mit früher stets zwei reelle Werte von ε .

Berücksichtigen wir aber (78), so kommt davon in erster Ordnung nur das Glied ohne ε in Betracht; dieses ist:

$$(83) \quad c - a b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ - \left(\frac{\alpha^2}{2} + 6,00 \right) \sin \alpha + 4,00 \alpha \cos \alpha \right\}.$$

Das von ε freie Glied in (81) wird nun vermehrt durch das Glied

$$+ \frac{\kappa^2}{r} r^{-1/2} (c - a b) = \frac{2 \alpha}{R} \cdot \frac{2 \sqrt{2}}{(\alpha R)^{1/2}} (c - a b).$$

Unter der Wurzel in (82) erscheint der Ausdruck:

$$(84) \quad \alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{4 \alpha^{1/2}}{R^{3/2}} \left(\frac{\alpha^2}{2} + 6,00 - 4,00 \alpha \cotg \alpha \right).$$

Der Klammerausdruck ist für $\alpha > 2$ negativ; daher geht der Radikant in (82), wenn R fällt, von positiven zu negativen Werten über. Dann wird aber ε komplex; es gibt also keine reellen φ mehr, welche unsere Hauptgleichung lösen. Je mehr man die Wurzel als von erster Ordnung gegenüber dem Glied mit $\kappa^2/(\alpha R)^{1/2}$ ansehen kann, um so mehr wird ε rein imaginär und damit der reelle Teil von $z_{0,1}$ Null. Das bedeutet physikalisch, daß die Schwingung gedämpft und in ihrem Charakter den in § 5 beschriebenen Schwingungen mit großem α ähnlich ist. Somit gibt das Verschwinden des Ausdrucks (84) eine Abschätzung für die kritische Zahl. Die folgende Tabelle gibt einige Zahlenwerte:

α	$\alpha \cotg \alpha - 1 - \frac{\alpha^2}{4}$	$\frac{\alpha^2}{2} + 6,00 - 4,00 \alpha \cotg \alpha$	R_{κ}
2,4	0,000	- 0,88	∞
2,35	0,0125	- 0,81	54
2,30	0,0242	- 0,74	32
2,25	0,0350	- 0,67	24
2,20	0,0442	- 0,60	19

Die Abschätzung dürfte bei $a = 2,35$ gut sein, vielleicht auch noch bei $a = 2,30$; bei den anderen wird $(aR)^{1/2}$ bereits zu klein. Wir sehen also, daß sich die kritischen Zahlen in der Größenordnung gut an die in § 6 gerechneten für kleine a an-

Fig. 12.

schließen (s. Fig. 12). In der Lücke, welche wir im Bereich zwischen $a = 1$ und $a = 2,3$ lassen mußten, werden kaum andere Werte auftreten; wir sind daher wohl berechtigt, den in § 6 gefundenen kritischen Wert $R_z = 11$ als den niedrigsten anzusehen.

§ 8. Die Oberschwingungen.

Bezüglich der Oberschwingungen, von welchen in den drei letzten Paragraphen nicht die Rede war, können wir uns hier sehr kurz fassen; denn ihre Diskussion geht in nichts über die frühere Arbeit hinaus.

Wir sahen, daß die zu den Oberschwingungen gehörigen z -Werte für kleine aR in unmittelbarer Nähe der negativ reellen z -Achse liegen; diese Achse bildet die Grenze der Gebiete II und III auf der z -Ebene, in welchen die Ausdrücke für die Zylinderfunktionen verschieden lauten (Fig. 4). Infolge des in § 2 der früheren Arbeit Gesagten werden dieselben Funktionen für das Argument z_1 anders ausgedrückt als für

das Argument z_0 . Wir müssen hier ganz in der gleichen Weise vorgehen, wie bei den Formeln (28) in § 3 der früheren Arbeit. Danach werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha R)^{2/3}} \varphi_1(0) &= z_0^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & \frac{1}{(\alpha R)^{2/3}} \varphi_1(1) &= z_1^{-1/4} (e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} + i e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}) \\ \frac{1}{(\alpha R)^{2/3}} \varphi_2(0) &= z_0^{-1/4} (e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & \frac{1}{(\alpha R)^{2/3}} \varphi_2(1) &= z_1^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \\ & - i e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}}) \end{aligned}$$

Wir haben daher in der Gleichung (21) anstatt der Ausdrücke (32) die folgenden einzusetzen:

$$(85) \quad \begin{cases} F_1(0) = i z_0^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & F_1(1) = i z_1^{-1/4} (e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} - i e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}) \\ F_2(0) = i z_0^{-1/4} (e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & F_2(1) = i z_1^{-1/4} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \\ & + i e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}}) \end{cases}$$

$$(86) \quad \begin{cases} \left(\frac{d f_1}{d z} \right)_0 = \frac{i z_0^{-1/4}}{z_0 - z^2} e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & \left(\frac{d f_1}{d z} \right)_1 = \frac{i z_1^{-1/4}}{z_1 - z^2} (e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} - i e^{-i \frac{2}{3} z_1^{3/2}}) \\ \left(\frac{d f_2}{d z} \right)_0 = \frac{i z_0^{-1/4}}{z_0 - z^2} (e^{i \frac{2}{3} z_0^{3/2}} & \left(\frac{d f_2}{d z} \right)_1 = \frac{i z_1^{-1/4}}{z_1 - z^2} e^{i \frac{2}{3} z_1^{3/2}} \\ & + i e^{-i \frac{2}{3} z_0^{3/2}}) \end{cases}$$

Daraus folgt die Gleichung

$$(87) \quad \left\{ \left[\left\{ 1 + \frac{1}{z^2 (z_0 - z^2) (z_1 - z^2)} \right\} \operatorname{Sin} \alpha + \frac{i}{z} \left\{ \frac{1}{z_1 - z^2} - \frac{1}{z_0 - z^2} \right\} \operatorname{Cos} \alpha \right] \cdot [2 \sin \frac{2}{3} (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) + e^{-i \frac{2}{3} (z_0^{3/2} + z_1^{3/2})}] = 0 \right.$$

Die erste Klammer ist dieselbe, wie in (33); daraus folgt, daß die Diskussion der ersten Oberschwingung in § 5 auch zurecht besteht, wenn z_0 und z_1 in den Gebieten II und III liegen.

Die Wurzeln der zweiten Klammer haben alle Eigenschaften der Wurzeln in der früheren Arbeit. Für kleine αR , wenn z_0 und z_1 in der Nähe der negativ reellen z -Achse liegen, wird der Summand $e^{-i \frac{2}{3} (z_0^{3/2} + z_1^{3/2})}$ sehr klein, und wir kommen auf die Gleichung (29) zurück. Für größere αR rücken z_0 und z_1 tiefer in die Gebiete II und III der Fig. 4 hinein. Es können dann 2 Fälle eintreten: Entweder sind z_0 und z_1 konjugiert komplex, dann bleibt der Sinus von der Größenordnung 1, und die Schwingungen gehören dem 2. Typus an; oder das Argu-

ment des Sinus wird komplex; dann überwiegt entweder $e^{i\frac{4}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})}$ bei weitem $e^{-i\frac{2}{3}(z_0^{3/2} - z_1^{3/2})}$ oder umgekehrt. Dann haben wir den 3. Typus von Schwingungen, bei welchem sich die ganze Schwingung mit wachsendem αR mehr und mehr in eine bestimmte Schicht konzentriert. Die Gleichungen lauten dann

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \\ e^{i\frac{4}{3}z_0^{3/2}} = -i \\ e^{i\frac{4}{3}z_1^{3/2}} = +i. \end{array} \right.$$

Sie stimmen vollständig überein mit den Gleichungen (37) und (38) in § 4 der alten Arbeit; nur daß diese bloß für kleine α galten, die jetzigen allgemein. Für große αR finden wir also alle Oberschwingungen unabhängig von der veränderten Grenzbedingung wieder, was nach dem Charakter des 3. Schwingungstypus auch zu erwarten war.

Es ist nun noch zu zeigen, daß wirklich die 3. und 4. Oberschwingung unseres jetzigen Systems die Rolle der früheren Grundschwingung und 1. Oberschwingung übernehmen, also für unendliche αR zu den Werten

$$\frac{4}{3} z_0^{3/2} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{4}{3} z_1^{3/2} = \frac{5\pi}{2}$$

gehören, während die jetzige Grundschwingung und erste Oberschwingung mit wachsendem R zu kleinen Werten von $z_{0,1}$ rücken, wo die Gleichung versagt.

Dies geschieht durch numerische Verfolgung der Wurzeln. Zu diesem Zweck führen wir wieder Polarkoordinaten in der z -Ebene ein, müssen aber diesmal setzen (siehe alte Arbeit Gleichung (33)).

$$z_0 = r e^{i\varphi} \quad z_1 = r e^{i(2\pi - \varphi)}.$$

Es wird dann:

$$(89) \quad \Phi = 2 \sin \left\{ \frac{4}{3} r^{3/2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right\} + e^{\frac{4}{3} r^{3/2} \sin \frac{3\varphi}{2}} = 0.$$

Der Verlauf des Ausdrucks (89) ist in Fig. 13 für $(\alpha R)^{1/2} = 1, 1.5, 2, 2.5$ und 3 dargestellt; man sieht daraus, wie die beiden ersten Wurzeln in einem Gebiet zusammenrücken, in welchem die Gleichung keine Gültigkeit mehr hat. Die anderen Wurzeln

rücken auf der reellen Achse bei größerem $(\alpha R)^{1/3}$ zusammen und gehen in die Wurzeln von (88) über.

Fig. 13.

§ 9. Erzwungene Schwingungen.

Wir können den physikalischen Inhalt der vorgetragenen Theorie auch in etwas anderer Weise aussprechen, wenn wir die Störung nicht als eine freie Schwingung ansehen, deren zeitlicher Verlauf zu diskutieren ist, sondern als eine erzwungene Schwingung, deren Amplitude wir berechnen wollen. Wenn die Wand Erschütterungen ausgesetzt ist, so überträgt sie Druckkräfte auf die äußerste Schicht der Flüssigkeit; dabei ist diese äußerste Schicht aber nicht mehr die ungestörte gerade Wand, sondern irgendwie deformiert. Wir haben dann, wie in der Wellenlehre, nicht mehr 2 Grenzbedingungen an einer bestimmten Stelle, sondern 3 Grenzbedingungen an einer noch unbekannten Stelle, die eben durch die eine überschüssige Grenzbedingung bestimmt wird. An der Grenze Wand-Flüssigkeit muß 1. die Geschwindigkeitskomponente längs der Wand verschwinden, 2. die Geschwindigkeitskomponente normal zur Wand gleich der Bewegung der Wand selbst sein, 3. der Flüssigkeitsdruck gleich dem von der Wand ausgeübten Druck sein. Die erste Bedingung führt auf

$$(90) \quad \frac{df}{d\eta} = 0$$

an der ungestörten Wand, da die Abweichung dieser Komponente von der x -Geschwindigkeit nur einen $\cos$ -Fehler bedeutet. Die beiden andern Bedingungen lauten, wenn der Index w sich auf die Wand bezieht,

$$(91) \quad \begin{aligned} p &= p_w \\ f &= f_r \end{aligned}$$

Nun gibt die Beschaffenheit der Wand eine Beziehung zwischen p_w und f_r — etwa $p_w + c f_r = 0$, aber möglicherweise auch komplizierter —; ferner gibt die Hydrodynamik die Beziehung (10) zwischen p und f ; daraus folgt eine Grenzbedingung — etwa $p + c f = 0$ —, in der nur f mit seinen Ableitungen vorkommt.

Die Beziehung zwischen p_w und f_r und damit die richtige Grenzbedingung, welche die Wandbeschaffenheit berücksichtigt, ist unbekannt; der früher behandelte Grenzfall entsprach einer ganz starren Wand — $c = \infty$ —, der jetzige einer ganz leicht beweglichen — $c = 0$.

Nun setzen wir p_w und f_r als gegebene äußere Störungen gleiche

$$(92) \quad 1 \cdot e^{i(\beta_0 \tau - \alpha \xi)}$$

an, wobei β_0 eine rein reelle Konstante ist. Mit den Bezeichnungen des § 3 wird dann eine Bewegung, welche (90) erfüllt und (91) im früheren Grenzfall gerecht wird, dargestellt durch

$$(93) \quad f = \frac{(f_1^*(0) - f_1^*(1)) f_2^*(\eta) - (f_2^*(0) - f_2^*(1)) f_1^*(\eta)}{f_1^*(0) f_2^*(1) - f_2^*(0) \cdot f_1^*(1)}.$$

Da es kein reelles β_0 gibt, für welches der Nenner in (93) verschwindet, wird f in allen Fällen für alle η einen endlichen Wert haben und je nach der Größe von α und R eine Bewegung vom 1., 2., oder 3. Typus darstellen.

Im Grenzfall dieser Arbeit, in welchem an den beiden Wänden

$$p = 1 e^{i(\beta_0 \tau - \alpha \xi)}$$

ein muß, wird:

$$94 \quad f = \frac{(F_1^*(0) - F_1^*(1)) f_2^*(\eta) - (F_2^*(0) - F_2^*(1)) f_1^*(\eta)}{F_1^*(0) F_2^*(1) - F_2^*(0) F_1^*(1)}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks wird aber dann Null, wenn $\beta_0 = \alpha/2$, wenn sich also die Störung mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortpflanzt, wenn ferner $\alpha < 2,4$ und R den zu dem betreffenden α gehörigen kritischen Wert hat.

In diesem Falle führt eine unendlich kleine Erschütterung der Wände zu einer endlichen Bewegung im Innern der Flüssigkeitsströmung und somit zur Entstehung der Turbulenz.

Jede beliebige Störung des Druckes an der Wand, die mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortschreitet, kann in Partialschwingungen (92) zerlegt werden. Bei bestimmter Reynoldsscher Zahl wird aber der Ausdruck (94) nur für ein bestimmtes a unendlich. Man könnte also nach dieser Auffassung erwarten, daß bei bestimmtem R nur Störungen von bestimmter räumlicher Frequenz herausgehoben werden, daß also in der turbulenten Strömung ganz bestimmte periodische Erscheinungen hervortreten; solche periodische Erscheinungen sind ja in den Kármánschen Wirbelstraßen¹⁾ bekannt, welche sich hinter festen Körpern in der Flüssigkeit ausbilden. Stellt man sich vor, daß auch die Turbulenz bei Strömungen die Form solcher Wirbelstraßen annimmt, so kann man auch verstehen, daß der Widerstand nicht einfach proportional dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit geht. Nach v. Kármán ist der Widerstand nämlich $\sim v^2/a$; nach unsrer Auffassung wäre aber a nicht konstant, wie bei der Bewegung hinter festen Körpern, sondern um so größer, je größer R ist. Danach müßte der Widerstandskoeffizient bei wachsendem R fallen, was tatsächlich der Fall ist.

Zusammenfassung.

1. Früher wurde die Stabilität einer laminaren Strömung reibender Flüssigkeit gegen eine unendlich kleine Schwingung, die an der Wand verschwindet, festgestellt.

2. Nun wird eine von der Wand ausgehende Störung behandelt; dabei ist es nicht eindeutig, welche Grenzbedingung eine solche Störung an der Wand erfüllen muß. Die frühere wird als der eine Grenzfall — unendlich widerstehende Wand — angesehen; der entgegengesetzte Grenzfall — unendlich nachgiebige Wand — wird durch die Grenzbedingung verschwindenden Drucks gegeben. Dieser Fall wird durchgeführt. Dabei kann man die Störung als freie oder als erzwungene Schwingung auffassen.

1) Th. von Kármán u. H. Rubach, Phys. Zeitschrift, 13. Jahrgang 1912. p. 49.

3. Es zeigt sich dabei absolute Stabilität der Hauptströmung bei kleiner Reynoldsscher Zahl, Instabilität bei großer Reynoldsscher Zahl, wenn die räumliche Frequenz α der Störung nicht einen Grenzwert ($\alpha = 2,4$) übersteigt, also Instabilität gegen Störungen von großer Wellenlänge.

4. Die kritische Reynoldssche Zahl hängt von α ab; sie liegt um so tiefer, je kleiner α ist; ihr kleinster Wert ist 11. Daß dieser Wert unter dem beobachteten (~ 400) liegt, entspricht dem Charakter des Ansatzes, der einen Grenzfall darstellt.

5. Der Verlauf der Stromlinien wird beschrieben: Bei kleiner Reynoldsscher Zahl ergibt sich ein System von Schwingungen, wie bei der ruhenden Flüssigkeit; die Strömung führt als Ganzes eine Grundschwingung aus, in ein- und mehrfacher Unterteilung Oberschwingungen. Bei großer Reynoldsscher Zahl verlaufen die Schwingungen genau wie in einer reibungslosen Flüssigkeit; nur in einer Grenzschicht, die mit wachsender Reynoldsscher Zahl immer kleiner wird, weicht die Bewegung so davon ab, daß die Grenzbedingungen richtig erfüllt sind.

6. Bei kleiner Reynoldsscher Zahl weicht das hier beschriebene System physikalisch nicht von dem im anderen Grenzfall errechneten ab; bei großer Reynoldsscher Zahl übernimmt aber die 2. Oberschwingung die Rolle der Grundschwingung im anderen Grenzfall. Die 2. und die höheren Oberschwingungen stellen Bewegungen dar, die mit wachsender Reynoldsscher Zahl mehr und mehr in bestimmten Strömungsschichten konzentriert sind. Die Grundschwingung und erste Oberschwingung geben ein ähnliches Bild bei großer Frequenz der Störung, bei $\alpha < 2,4$ hingegen sind sie Schwingungen der ganzen Strömung, von welchen die eine im Sinn des Geschwindigkeitsanstiegs in der Hauptströmung verzerrt und gedämpft ist, die andere im entgegengesetzten Sinn verzerrt ist, der Hauptströmung gewissermaßen widerstrebt und zur Instabilität führt.

7. Bei großen Reynoldsschen Zahlen findet man das paradoxe Ergebnis, daß die instabilisierende Störung unter Umständen auf einer reibenden Flüssigkeit stärker anwächst als auf einer reibungslosen. Aber nie kann eine Störung die reibende Strömung instabil machen, die nicht auch bei reibungsloser Flüssigkeit dazu imstande ist.

(Eingegangen 14. März 1919.)