ANNALEN

DER PHYSIK UND CHEMIE.

JAHRGANG 1828, NEUNTES STÜCK.

- I *Ueber den Gebrauch der analytischen Optik bei der Construction optischer Werkzeuge und die Uebereinstimmung der dadurch erhaltenen Resultate mit der Erfahrung;*

von L. Schleiermacher.

Großherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

Die Formeln der analytischen Optik werden gewöhnlich unter der Voraussetzung entwickelt, daß der Halbmesser der wegen der Helligkeit erforderlichen Oeffnung, die Tangente des halben Gesichtsfeldes und die Unterschiede zwischen den Brechungsverhältnissen der verschiedenen farbigen Strahlen kleine Größen sind, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können.

Hiebei berücksichtigt man gewöhnlich nur diejenigen Glieder, welche sich auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe beziehen, und von dem Quadrate oder der dritten Potenz des Oeffnungs-Halbmessers abhängen, je nachdem von der Längen- oder Seitenabweichung die Rede ist; sodann diejenigen Glieder, welche die erste Potenz von dem Unterschiede des Brechungsverhältnisses enthalten und die Farbenzerstreuung in und außerhalb der Axe mit Weglassung der Glieder höherer Ordnungen ausdrücken. Dagegen werden alle Glieder vernachlässigt, in welchen Potenzen von der Tangente des halben Ge-

sichtsfeldes oder Producte derselben mit Potenzen des Oeffnungs-Halbmessers als Factoren vorkommen, und welche die Abweichung wegen der Gestalt auferhalb der Axe angeben. Die Vernachlässigung der letzteren Glieder gründet sich auf eine Betrachtung, welche vorzüglich bei den achromatischen Objectiven ihre Anwendung findet. Drückt man nämlich den Oeffnungs-Halbmesser in Theilen der Brennweite des zusammengesetzten Objectivs aus, so ist er, obgleich selbst eine kleine Gröfse, doch viel bedeutender, als die Tangente des halben Gesichtsfeldes, wodurch man veranlaßt wird, die Potenzen dieser Tangente zu vernachlässigen, wenn man blos die bedeutendsten Glieder berücksichtigen will. Die hierdurch erhaltenen Formeln sind zur approximativen Berechnung der Objective brauchbar, sie bestimmen aber nur zwei von der bei einem zweifachen Objective vorkommenden drei willkürlichen Gröfsen, daher es nothwendig ist, noch eine andere Betrachtung hinzuzufügen, um die erforderliche Anzahl von Gleichungen zu erhalten, welches in den letzten Zeiten auf verschiedene Arten geschehen ist. Da außerdem bei den achromatischen Objectiven eine möglich vollständige Vernichtung der Abweichungen in der Axe wünschenswerth ist, so hat man seit Klügel eine genaue trigonometrische Berechnung der Objective an die Stelle der Näherungsformeln gesetzt, wobei aber immer die dritte willkürliche Gröfse auf eine andere Weise bestimmt werden mufs.

Wenn daher auch die bei der Entwicklung der Näherungsformeln angenommenen Grundsätze in Bezug auf die Objective als richtig anerkannt werden, so tritt doch der umgekehrte Fall ein, sobald jene Formeln auf die Berechnung der Oculare angewandt werden sollen. Bei jedem derselben kann das von den vorhergehenden Gläsern oder Spiegeln hervorgebrachte Bild als der Gegenstand betrachtet werden, dessen Gröfse und Entfernung vom Oculare das Gesichtsfeld bestimmt. Da nun

die Bilder meistens sehr nahe bei den Ocularen liegen, so wird das hiernach bestimmte Gesichtsfeld bei diesen sehr groß, und bringt in den Formeln Glieder hervor, die weit bedeutender sind, als diejenigen, welche von dem Oeffnungs-Halbmesser abhängen.

Nach der oben angeführten Verfahrensart werden daher bei den Abweichungen der Oculare wegen der Gestalt gerade die bedeutendsten Glieder, welche die Tangente des halben Gesichtsfeldes enthalten, vernachlässigt, die minder bedeutenden, von dem Oeffnungs-Halbmesser abhängenden, dagegen beibehalten. Dasselbe findet auch bei den meisten übrigen Instrumenten statt; kein Wunder also, wenn die hiernach berechnete Gestalt der Gläser mit der durch die Erfahrung gefundenen nicht übereinstimmt.

Man umgeht diese Anstände, wenn man sich bei der Berechnung der optischen Werkzeuge keiner Näherungsformeln, sondern der genauen trigonometrischen oder der analytischen Formeln bedient, welche Malus in seiner vortrefflichen Optik gegeben hat. Ob aber gleich diese in Ansehung ihrer Genauigkeit und Allgemeinheit nichts zu wünschen übrig lassen, so sind sie doch für den beständigen Gebrauch, welcher davon in der Optik gemacht werden muß, zu complicirt, als daß es nicht wünschenswerth wäre, Näherungsformeln zu erhalten, welche bei einer einfachen Form eine für die Ausübung hinlängliche Genauigkeit gewähren.

Diese Betrachtungen haben mich schon vor geraumer Zeit veranlaßt, die Formeln der analytischen Optik von Neuem und unter der Voraussetzung zu berechnen, daß die Tangente des halben Gesichtsfeldes eben so, wie der Oeffnungs-Halbmesser berücksichtigt und diejenigen Glieder der höheren Ordnungen beibehalten werden, welche nicht als unbedeutend zu betrachten sind. Ich habe ferner diese Formeln auf die gebräuchlichsten Instrumente angewandt, und hierbei Resultate erhalten, welche mei-

stens mit den Erfahrungen nahe übereinstimmen, und welche ich nebst den analytischen Untersuchungen in einer besonderen Schrift bekannt machen werde. Da dies jedoch wegen verschiedener Hindernisse nicht sobald geschehen kann, als ich es wünsche, die erhaltenen Resultate aber vielleicht für die Ausübung nicht ohne Interesse sind, so habe ich mich entschlossen, in den nachfolgenden Abhandlungen nicht nur die Grundsätze anzugeben, nach welchen die Formeln entwickelt worden sind, sondern auch die vorzüglichsten Resultate beizufügen, welche die Anwendung der allgemeinen Formeln auf spezielle Fälle gegeben hat.

1) Ich betrachte ein System von Kugelflächen, deren Mittelpunkte in einer geraden Linie, der Axe derselben, liegen, und nehme an, daß die Zwischenräume mit durchsichtigen Körpern von verschiedenem Brechungsvermögen angefüllt sind.

In einer bestimmten Entfernung von der ersten Kugelfläche befindet sich ein Gegenstand, welcher als eine auf der Axe senkrecht stehende Ebene betrachtet wird.

Von jedem leuchtenden Punkte des Gegenstandes fallen unzählige Lichtstrahlen auf die erste Kugelfläche, deren Lage durch die Coordinaten des leuchtenden Punktes und des Einfallpunktes auf jener Fläche bestimmt werden. Sind diese Coordinaten für einen beliebigen Strahl gegeben, so läßt sich der Weg desselben nach den Brechungen, welche er bei dem Durchgange durch die verschiedenen Kugelflächen erleidet, vermittelst der von Malus gegebenen Formeln berechnen, und man erhält dadurch die Gleichung des Strahles nach jeder Brechung in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z .

Die so gefundenen Formeln sind auf dioptrische und katoptrische Werkzeuge anwendbar. Denkt man sich nämlich die Zwischenräume der Kugelflächen abwechselnd mit Glas und Luft ausgefüllt, so verwandelt sich das System in ein System von Linsengläsern, wird dagegen das

Brechungsverhältniß $= -1$ gesetzt, so erhält man die Formeln für ein System von sphärischen Spiegeln.

2) Um nun hieraus hinlänglich genaue Näherungsformeln abzuleiten, ist es nothwendig, diejenigen Größen zu bestimmen, welche bei der Entwicklung der Formeln als klein betrachtet werden können, sodann die rechtwinkligen Coordinaten in andere zu verwandeln, welche für diesen Zweck bequemer sind.

Betrachtet man zuerst nur einen leuchtenden Punkt L des Gegenstandes *), nimmt bei den rechtwinkligen Coordinaten als Axe der z die Axe der brechenden Flächen, als Ebene der yz eine durch jene Axe und den leuchtenden Punkt gelegte Ebene, und nennt

a die Entfernung des Gegenstandes auf der Axe z , und von dem Scheitel der ersten brechenden Fläche an gezählt,

ψ den Winkel, welchen die Axe der z und eine von dem leuchtenden Punkte nach dem Scheitel der ersten brechenden Fläche gezogene Linie mit einander bilden, so kann ψ als eine kleine GröÙe der ersten Ordnung betrachtet werden, da das Gesichtsfeld bei allen optischen Werkzeugen klein ist und der leuchtende Punkt sich innerhalb desselben befindet. Es ist jedoch bequemer den Winkel ψ nicht unmittelbar, sondern statt dessen eine andere GröÙe zu gebrauchen, welche eine Function davon ist. Zu diesem Ende bezeichne ich durch

g die Vergrößerung des Instrumentes, ohne Rücksicht darauf berechnet, daß die Gegenstände bei dem Gebrauche desselben in eine andere Entfernung, als bei der Betrachtung mit dem bloßen Auge gehalten werden müssen.

Denkt man sich nun an der Stelle des Gegenstandes

*) Siehe die hiezu gehörige Figur, Taf. I. Fig. 1., in welcher jedoch der Einfachheit wegen nur die erste und die m te brechende Fläche (1) und (m) vorgestellt sind.

einen ihm ähnlichen, g mal vergrößerten, Gegenstand, und nennt in Bezug auf diesen ψ' denselben Winkel, welcher bei dem wirklichen Gegenstande durch ψ bezeichnet worden ist, so hat man

$$tg.\psi' = g \, tg.\psi.$$

Man kann daher in den Formeln $tg.\psi$ durch $tg.\psi'$ ausdrücken, wofür ich zur Abkürzung ϕ schreibe, so daß

$$\phi = tg.\psi' = g \, tg.\psi$$

ist. Hiernach ist die Lage des leuchtenden Punktes durch die Größen α und ϕ bestimmt, welche die Stelle der Coordinaten desselben vertreten.

3) Ferner nehme ich an, daß die in das Instrument fallenden Strahlen durch eine kreisförmige Blending (C) beschränkt werden, welche die *Hauptblending* genannt werden soll und an einer beliebigen Stelle angebracht seyn kann, jedoch so, daß ihr Umfang in einer auf der Axe senkrecht stehenden Ebene liegt, und daß ihr Mittelpunkt mit einem Punkte der Axe zusammenfällt. Denjenigen Strahl, welcher durch den Mittelpunkt der Hauptblending geht, nenne ich den *Hauptstrahl*. Er bleibt nach allen Brechungen stets in der Ebene der yz und schneidet die erste brechende Fläche in einem Punkte H , welcher der *Hauptpunkt* genannt werden kann.

Die Lage aller übrigen Strahlen ist durch ihre Durchschnitte mit der ersten brechenden Fläche gegeben. Zur Bestimmung derselben lege ich durch den Hauptpunkt eine auf der Axe der z senkrecht stehende Ebene (A), und projicire darauf jene Durchschnittspunkte durch Linien, welche parallel mit der Axe z gezogen sind. Die Lage der projicirten Durchschnittspunkte gegen den Hauptpunkt bestimme ich sodann durch die Polarcoordinaten r und Θ , so daß

r die Entfernung zwischen dem Hauptpunkte und dem projicirten Durchschnitte eines beliebigen Strahles mit der ersten brechenden Fläche,

⊙ den Winkel zwischen r und dem Durchschnitte der Ebene (A) mit der Ebene der yz bezeichnet.

Da nun die Oeffnung der optischen Werkzeuge immer nur klein ist, so kann r ebenfalls als eine kleine Gröfse der ersten Ordnung angesehen werden.

Vernachlässigt man die kleinen Gröfsen der dritten Ordnung, so drückt r auch die wirkliche Entfernung zwischen dem Hauptpunkte und dem Durchschnitte des Strahles mit der ersten brechenden Fläche aus.

Die Annahme einer Blendung begreift alle bei den Instrumenten vorkommende Einrichtungen in sich, wenn auch keine eigentliche Blendungen an denselben angebracht sind. Fällt nämlich der Hauptpunkt in die Axe des Instrumentes, wie es bei den meisten Fernröhren der Fall ist, bei welchen ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande kommen, so mufs angenommen werden, dafs die Ebene der Hauptblendung die erste brechende Fläche berührt, deren Fassung dann als Hauptblendung dient. Hat aber das Instrument eine so grofse Oeffnung, dafs die durch dasselbe gehenden Strahlen nicht alle durch die Pupille des hinter ihm befindlichen Auges gelassen werden, wie es bei dem Galileischen Fernrohre und den Loupen der Fall ist, so vertritt die Pupille die Stelle der Hauptblendung.

Aufser der Hauptblendung, welche die Lage des Hauptstrahles bestimmt, kommen bei den optischen Werkzeugen häufig noch andere Blendungen vor, von welchen aber hier keine Rede ist, da ihre Durchmesser nach dem der Hauptblendung und nach der Gröfse des Gesichtsfeldes bestimmt werden, so dafs sie keinen Einflufs auf die Lage des Hauptstrahles haben.

4) Der Hauptzweck der analytischen Untersuchungen in der Optik ist, diejenigen Einrichtungen der optischen Werkzeuge zu bestimmen, bei welchen das nach einer der Brechungen entstehende Bild so vollkommen als möglich wird. Es ist daher nothwendig die Lage der

gebrochenen Strahlen in der Nähe jenes Bildes zu betrachten. Denkt man sich einen leuchtenden Punkt in der Axe und in der Entfernung a von der ersten brechenden Fläche, so schneiden sich alle Strahlen, welche von demselben ausgehen und unendlich nahe bei der Axe in das Instrument fallen, nach der m ten Brechung in einem Punkte der Axe, welchen ich mit b bezeichne, und es entsteht daselbst ein Bild des leuchtenden Punktes.

Wären nun keine Abweichungen in dem Instrumente vorhanden, so würden sich alle Strahlen, welche von dem durch die Coordinaten a und φ bestimmten Punkte ausgehen, in einem und demselben Punkte schneiden und hierdurch ein vollkommenes Bild des leuchtenden Punktes hervorbringen.

Dieses Bild würde in derjenigen Ebene liegen, welche im Punkte b die Axe senkrecht durchschneidet. Wegen der Abweichungen erhalten die Strahlen eine etwas veränderte Lage, so daß sich die meisten derselben gar nicht durchschneiden. Denkt man sich in der Nähe des Punktes b eine auf der Axe senkrechte Ebene (B) parallel mit sich selbst fortbewegt, so sind in den verschiedenen Lagen derselben die Durchschnittspunkte sämtlicher Strahlen mit ihr in einem größeren oder kleineren Raume zerstreut, und es giebt eine Lage der Ebene, bei welcher jener Raum ein Minimum wird und als das Bild des leuchtenden Punktes zu betrachten ist.

Wählt man nun den Punkt b zum Ursprung der Coordinaten für die Strahlen nach der m ten Brechung, nennt

z die Abscisse der beweglichen Ebene (B),

y die Ordinate des Hauptstrahles, welche der Abscisse z zugehört,

ξ und υ die Coordinaten des Durchschnittes eines beliebigen Strahles mit der beweglichen Ebene (B) parallel mit den Axen der x und der y genommen, und von dem Durchschnitte des Hauptstrahles an

gezählt, so sind alle diese Coordinaten in der Nähe des Bildes kleine Gröſsen. Die Rechnung zeigt, daſs y von der ersten, z von der zweiten, ξ und ν dagegen von der dritten Ordnung sind.

5) Jeder Lichtstrahl besteht aus einer unzähligen Menge farbiger Strahlen von verschiedener Brechbarkeit.

Bezeichnet man für einen bestimmten brechenden Körper durch

n das Brechungsverhältniſs eines Strahles von mittlerer Brechbarkeit,

$(n + \nu)$ das Brechungsverhältniſs eines der farbigen Strahlen,

beide unter der Voraussetzung berechnet, daſs die Lichtstrahlen unmittelbar aus Luft in den brechenden Körper übergelien, so ist ν eine kleine Gröſſe, welche von der zweiten Ordnung angenommen werden kann, da sie Abweichungen hervorbringt, welche den mit r^2 oder φ^2 multiplicirten analog sind.

Unter den ν , welche sich auf die verschiedenen brechenden Körper beziehen, kann man eines als absolute veränderliche Gröſſe, die übrigen als Functionen derselben betrachten, welche wegen der Kleinheit von ν in Reihen entwickelt werden können. Bezeichnet man daher die Gröſſen n und ν in Bezug auf einen andern durchsichtigen Körper durch n' und ν' , so kann ν' unter die Form gebracht werden

$$\nu' = \alpha \nu + \beta \nu^2 + \dots$$

Hiernach ist das Brechungsverhältniſs eines farbigen Strahles oder $(n' + \nu')$ eine Function von den Gröſſen n' , α , β , welche von der Natur der brechenden Körper abhängen und als gegeben betrachtet werden, für alle farbigen Strahlen aber einerlei sind; sodann von ν , welches für alle brechende Körper einerlei, für die verschiedenen farbigen Strahlen dagegen verschieden ist.

Die GröÙe $\frac{\nu'}{\nu}$ werde ich das *Zerstreuungs-Verhältnis* nennen und durch ζ bezeichnen, so daÙ

$$\zeta = \alpha + \beta \nu$$

ist.

6) Entwickelt man nun die Gleichungen der Strahlen nach der m ten Brechung in Reihen, behält unter den Gliedern der 5. Ordnung nur diejenigen bei, welche r^5 , $r^3 \nu$, $r \nu^2$, $\varphi^3 \nu$, $\varphi \nu^2$, φ^5 enthalten und in besonderen Fällen von Wichtigkeit sind, so bekommt die Gleichung des Hauptstrahles von mittlerer Brechbarkeit die Gestalt:

$$y = \mathfrak{A} \varphi + \mathfrak{B} \varphi^3 + \mathfrak{C} \varphi^5 + \mathfrak{D} \varphi z \dots (A).$$

Wird dieser Strahl als Ursprung der ξ und ν gebraucht, so erhalten die Gleichungen eines farbigen Strahles von beliebiger Brechbarkeit die Gestalt:

$$\begin{aligned} \xi = & \mathfrak{A} [g(A + Br^2) r^3 \sin \ominus + Cr^2 \varphi \sin \ominus \cos \ominus \\ & + \frac{D}{g} r \varphi^2 \sin \ominus + g(E + Fr^2 + J\nu) r \nu \sin \ominus \\ & + gZr \sin \ominus]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = & \mathfrak{A} [g(A + Br^2) r^3 \cos \ominus + Cr^2 \varphi (\tfrac{1}{2} + \cos^2 \ominus) \\ & + \frac{D}{g} r \varphi^2 \cos \ominus + g(E + Fr^2 + J\nu) r \nu \cos \ominus \\ & + gZr \cos \ominus + (H + K \varphi^2 \\ & + L\nu + Mz) \varphi \nu] \dots (B) \end{aligned}$$

Die Coëfficienten in diesen Gleichungen sind Functionen von den Halbmessern und Entfernungen der brechenden Flächen, den GröÙen n' , α , β und der Stellung der Hauptblendung. Die Ausdrücke derselben werden am einfachsten, wenn man die Vereinigungsweiten der unendlich nahe bei der Axe einfallenden Strahlen einführt. Ihre Entwicklung giebt endliche Differenzengleichungen vom ersten Grade und der ersten Ordnung, deren Integrale man nach der bekannten Methode sehr leicht erhält. Hierbei kann bemerkt werden, daÙ die verschiedenen Glieder in den Ausdrücken von ξ und ν

die einzelnen Abweichungen der Strahlen abgesondert angeben.

Die mit $r^3 \sin \Theta$ und $r^3 \cos \Theta$ multiplicirten Glieder nämlich enthalten die Abweichung wegen der Kugelgestalt in der Axe.

Die mit $r \sin \Theta$ und $r \cos \Theta$ multiplicirten Glieder die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung in der Axe.

Das mit $\phi \nu$ multiplicirte Glied in dem Ausdrucke von ν den farbigen Rand, oder die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung außerhalb der Axe.

Diese drei Abweichungen sind in den optischen Schriften längst entwickelt, nur kommen die Glieder der 5. Ordnung hinzu, welche gewöhnlich vernachlässigt werden, hier aber um deswillen beibehalten worden sind, weil es oft nothwendig ist, jene Abweichungen so gut als möglich zu vernichten. So oft dieser Fall eintritt, muß die Einrichtung des Instrumentes so getroffen werden, daß die Glieder der 3. Ordnung denen der 5. gleich und entgegengesetzt sind, wodurch die Summe von beiden verschwindet. Hieraus folgt, daß die Glieder der 3. Ordnung alsdann wegen ihrer Kleinheit als Glieder der 5. Ordnung angesehen werden können. In allen übrigen Fällen ist die Betrachtung der Glieder der 5. Ordnung unnütz.

Die von r und ϕ zugleich abhängenden Glieder endlich geben die Abweichung wegen der Kugelgestalt, außerhalb der Axe, welche gewöhnlich in den optischen Schriften nicht berücksichtigt wird.

Obgleich der Hauptzweck der vorhergehenden Formeln der ist, die Lage der gebrochenen Strahlen in der Nähe der Bilder anzugeben, so sind dieselben doch auch in allen übrigen Fällen anwendbar, wenn man die Glieder der 3. Ordnung vernachlässigt. Sie ersetzen daher zugleich die Formeln, welche gewöhnlich zur Berechnung der Vergrößerung des Gesichtsfeldes, der Oeffnungshalbmesser und des Ortes des Auges gegeben werden.

Bei der Anwendung jener Formeln auf Gläser erhält man unmittelbar die Resultate so, daß die Dicke der Gläser berücksichtigt ist, und jede beliebige GröÙe erhalten kann; durch Vernachlässigung derselben werden jedoch die Formeln einfacher. Da nun die Dicken in der Regel sehr klein sind, und als kleine GröÙen der zweiten Ordnung betrachtet werden können, so ist es erlaubt, sie in den Gliedern der dritten Ordnung zu vernachlässigen, wenn die dazu gehörigen Glieder der fünften Ordnung nicht beibehalten werden. Berücksichtigt man dagegen die letzteren Glieder, so muß man in denen der dritten Ordnung die Dicken beibehalten, weil dieselben Glieder der fünften Ordnung hervorbringen. Außerdem ist die Berücksichtigung der Dicken jedesmal nothwendig, sobald sie nicht als kleine GröÙen betrachtet werden können, wie es z. B. bei den prismatischen Gläsern zu Ocularen und zur Camera obscura der Fall ist.

7) Alle optische Werkzeuge können in zwei Classen getheilt werden. Einige, z. B. die Camera obscura, das Sonnenmicroscop etc., sind so eingerichtet, daß von den Gegenständen ein Bild auf einer Ebene entworfen wird, welche senkrecht auf der Axe steht und die Projectionsebene genannt werden soll. Bei anderen dagegen fallen die Strahlen nach ihrem Durchgange durch das Instrument in das hinter demselben befindliche Auge.

Im ersteren Falle finden die in No. 6. gegebenen Formeln unmittelbar ihre Anwendung, wenn man unter der Ebene (B) (No. 4.) die Projectionsebene versteht.

Im zweiten Falle dagegen muß man die Durchschnitte der Strahlen mit der Netzhaut auf eine ähnliche Art bestimmen, wie es in Bezug auf die Ebene (B) geschehen ist.

Nimmt man zuerst an, daß sich das Auge, ohne seinen Ort zu verändern, in der Axe des optischen Instrumentes befindet, so muß dieses so eingerichtet seyn, daß

das Bild, welches nach den verschiedenen Brechungen im Auge entsteht, auf die Netzhaut fällt. Wegen der Kleinheit von r und ϕ und der im Auge entstehenden Abweichungen kann man die brechenden Flächen des Auges und die Netzhaut als sphärisch betrachten. Die vorhergehenden Formeln können daher auf diesen Fall angewendet werden, wenn man das Instrument und Auge zusammengenommen als ein System von brechenden Flächen ansieht und die in No. 4. betrachtete bewegliche Ebene (B) mit der Netzhaut vertauscht, statt welcher eine bewegliche Kugelfläche genommen werden kann. Versteht man unter z nunmehr die Abscisse ihres Scheitels, so bleiben die für ξ und v gefundenen Ausdrücke der Gestalt nach ungeändert, die Coëfficienten derselben ändern sich aber ab und enthalten aufser den früher schon betrachteten Gröfsen die correspondirenden, welche sich auf das Auge beziehen und den Halbmesser der beweglichen Kugelfläche.

Dieser Fall begreift zugleich den vorhergehenden in sich, wenn man den Halbmesser der beweglichen Kugelfläche unendlich setzt.

Die so eben gemachte Voraussetzung, dafs sich das Auge bei dem Gebrauche optischer Instrumente unveränderlich in der Axe derselben befindet, ist jedoch strenge genommen nicht diejenige, welche der Natur entspricht. Die Erfahrung zeigt nämlich, dafs das Auge bei unveränderter Lage seiner Axe nur ein sehr kleines Gesichtsfeld deutlich sieht, und sich daher successiv nach den verschiedenen Punkten eines Gegenstandes richtet, welchen es betrachten will. Man wird folglich richtigere Resultate erhalten, wenn man annimmt, dafs das Auge bei dem Gebrauche optischer Werkzeuge zwar in einerlei Entfernung von der letzten brechenden Fläche bleibt, dagegen bei Betrachtung eines jeden Punktes des Gesichtsfeldes seine Axe so richtet, dafs sie mit dem, jenem Punkte entsprechenden, Hauptstrahle zusammenfällt. Auch

bei dieser Voraussetzung bleiben die für ξ und ν gefundenen Ausdrücke, wenn man sie auf die Netzhaut bezieht, der Form nach ungeändert, und erhalten nur etwas abgeänderte Coëfficienten.

Hieraus folgt, dafs die in No. 6. gegebenen Gleichungen der gebrochenen Strahlen auf alle optische Werkzeuge angewandt werden können, wenn man nur in jedem besonderen Falle diejenigen Coëfficienten gebraucht, welche sich auf denselben beziehen. Ich werde sie daher bei den folgenden Untersuchungen zu Grunde legen, und die Projectionsebene und die Netzhaut mit dem gemeinschaftlichen Namen: *Projectionsfläche* bezeichnen.

S) Eine nothwendige Bedingung bei allen optischen Werkzeugen ist die, dafs das Bild, welches auf der Projectionsfläche entsteht, so genau als möglich mit derselben zusammenfällt. Ist bei der Construction der Werkzeuge darauf Rücksicht genommen, dafs dieses sehr nahe der Fall ist, so kann eine vollkommene Erfüllung jener Bedingung auf zweierlei Art bewirkt werden. Es kann nämlich einmal eine Verschiebung der Projectionsfläche parallel mit sich selbst stattfinden, welche analytisch dadurch ausgedrückt wird, dafs man der Abscisse z einen veränderten Werth giebt. Sodann können aber auch kleine Abänderungen in den Entfernungen und Halbmessern der brechenden Flächen, sowohl bei dem Instrumente als dem Auge, z. B. durch Verschiebung der Oculareinsätze, durch Veränderung der Krümmungen und Entfernungen der brechenden Flächen im Auge etc. vorgenommen werden. Solche Abänderungen bringen in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen Glieder hervor, welche dieselben Coëfficienten wie z haben. Man kann sie daher mit denen vereinigen, welche z enthalten, und da es von keinem Interesse ist, beiderlei Glieder abgesondert zu kennen, so braucht man die letzteren nicht weiter zu berücksichtigen, wenn man nur unter z nicht mehr die Abscisse, sondern eine Gröfse versteht, welche

von der Verschiebung der Projectionsfläche und den Aenderungen im Instrumente und Auge abhängt, und so bestimmt werden muß, daß die Undeutlichkeit des Bildes so klein als möglich wird.

9) Das Bild eines leuchtenden Punktes ist desto deutlicher, je näher die Durchschnittspunkte der dazu gehörigen Strahlen mit der Projectionsfläche bei einander liegen, und würde vollkommen deutlich seyn, wenn dieselben in einen Punkt zusammenfielen. Man kann sich daher der folgenden Methode zur Bestimmung der Deutlichkeit bedienen.

Nennt man ϱ die auf die Ebene der xy projectirte Entfernung zwischen den Durchschnittspunkten eines beliebigen farbigen Strahles und des Hauptstrahles, so drückt ϱ die Seitenabweichung des Strahles aus, und würde bei einer vollkommenen Deutlichkeit verschwinden. Bei unvollkommener Deutlichkeit kann daher ϱ als ein Fehler des Strahles betrachtet werden, welcher Undeutlichkeit hervorbringt.

Um nun die vortheilhafteste Einrichtung des Instrumentes zu finden, kann man die Methode der kleinsten Quadrate anwenden; nach dieser wird nämlich diejenige Einrichtung in Bezug auf die Deutlichkeit die beste seyn, bei welcher die Summe der ϱ^2 für sämmtliche Strahlen so klein als möglich wird. Da aber unzählig viele Strahlen vorhanden sind, so unterscheidet sich dieser Fall von der gewöhnlichen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate dadurch, daß die Summe der ϱ^2 , welche bei den gewöhnlichen Anwendungen eine endliche Summe ist, hier wegen der unzähligen Menge der ϱ durch die Integralrechnung gesucht werden muß. Hierbei ist jedoch die Bemerkung nothwendig, daß die verschiedenen farbigen Strahlen, aus welchen ein einfallender Strahl besteht, eine ungleiche Wirkung in unserm Auge hervorbringen, z. B. die gelben eine stärkere als die violetten. Um auf diesen Umstand Rücksicht zu nehmen, darf man

nur das, einem jeden farbigen Strahle zugehörige ϱ^2 mit einem Factor multipliciren, welcher eine Function von der Lage des Strahles im Farbenbilde, d. h. von ν , ist, und hier die Stelle der bei der Methode der kleinsten Quadrate gebräuchlichen Gewichte vertritt. Nennt man ihn V , so ist die Summe der ϱ^2 , welche einem einfallenden Strahle zugehören $= \int V \varrho^2 d\nu$. Die Grenzen dieses Integrals sind diejenigen Werthe von ν , welche den äußersten rothen und violetten Strahlen des Farbenbildes entsprechen.

Mit Vernachlässigung der Größen, welche nach den angenommenen Grundsätzen nicht beibehalten werden, ist die Menge der Strahlen, welche von dem leuchtenden Punkte auf ein Element der ersten brechenden Fläche fallen, jenem Elemente proportional, und kann daher durch $P d.r^2 d\Theta$ ausgedrückt werden, wenn P einen beständigen Factor bezeichnet. Jedem dieser Strahlen gehört ein $\int V \varrho^2 d\nu$ zu. Bezeichnet man daher durch R' die Summe der ϱ^2 für alle Strahlen, welche von dem leuchtenden Punkte auf die erste brechende Fläche fallen, so erhält man dieselbe mittelst des Ausdruckes:

$$R' = P \int d.r^2 \int d\Theta \int V \varrho^2 d\nu$$

von $r=0$ bis zu seinem äußersten Werthe und von $\Theta=0$ bis $\Theta=2\pi$ genommen.

Denkt man sich den Gegenstand, welcher durch das Instrument betrachtet werden soll, als eine kreisförmige Ebene, welche senkrecht auf der Axe der z steht und gleichförmig mit leuchtenden Punkten übersät ist, so kann die Menge der leuchtenden Punkte, welche in einem unendlich schmalen kreisförmigen Ringe desselben vom Halbmesser $atg.\psi$ enthalten sind, durch $Q d.\varphi^2$ ausgedrückt werden, wenn Q eine Constante bezeichnet. Jedem dieser leuchtenden Punkte gehört eine R' zu, nennt man daher $\mathfrak{N}$ die Summe der ϱ^2 für alle Strahlen, welche von sämmtlichen Punkten des Gegenstandes in das Instrument fallen, so ist

$\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{R} = Q \int R' d.\varphi^2$$

von $\varphi=0$ bis zum äußersten Werthe desselben genommen.

Da es bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf beständige Factoren nicht ankommt, so kann man statt der Gröſsen R' und $\mathfrak{R}$ andere anführen, welche von den unbekannten Factoren P und Q unabhängig sind.

Dividirt man nämlich R' durch die Anzahl sämmtlicher Strahlen, welche von dem durch die Coordinaten a und φ bestimmten leuchtenden Punkte in das Instrument fallen, multiplicirt mit ihrer jedesmaligen Wirksamkeit, so erhält man das arithmetische Mittel aus allen ϱ^2 , welche jenem leuchtenden Punkte zugehören, mit Rücksicht auf die verschiedene Wirksamkeit der Strahlen.

Dieses arithmetische Mittel soll zur Abkürzung die *Undeutlichkeit* des durch die Coordinaten a und φ bestimmten Punktes genannt und durch R bezeichnet werden. Sie ist durch den Ausdruck

$$R = \frac{\int d.r^2 \int d\varphi \int V \varrho^2 d\varphi}{\int d.r^2 \int d\varphi \int V d\varphi}$$

gegeben.

Dividirt man dagegen $\mathfrak{R}$ durch die Anzahl sämmtlicher Strahlen, welche von *allen* Punkten des Gegenstandes in das Instrument fallen, multiplicirt mit ihrer Wirksamkeit, so erhält man das arithmetische Mittel aus den ϱ^2 , welche den *sämmtlichen* Punkten des Gegenstandes zugehören. Das letztere arithmetische Mittel soll zur Abkürzung die *mittlere Undeutlichkeit* des Instruments genannt werden. Bezeichnet man sie durch $\mathfrak{R}$, so ist sie vermittelt des Ausdrucks:

$$\mathfrak{R} = \frac{\int d.\varphi^2 \int d.r^2 \int d\varphi \int V \varrho^2 d\varphi}{\int d.\varphi^2 \int d.r^2 \int d\varphi \int V d\varphi}$$

gegeben.

Die Integration dieser Ausdrücke wird durch die folgenden Bemerkungen erleichtert.

Nach No. 5. bezeichnet n das Brechungsverhältniß desjenigen farbigen Strahles, dessen Brechbarkeit als die mittlere angenommen wird, ν dagegen die Veränderung des Brechungsverhältnisses für einen beliebigen farbigen Strahl. Welcher unter denselben als der von mittlerer Brechbarkeit angenommen wird, ist hiernach willkürlich. Man kann daher in dieser Hinsicht diejenige Voraussetzung machen, welche die Rechnung am meisten erleichtert.

Denkt man sich für die verschiedenen farbigen Strahlen ν als Abscisse, die dazu gehörigen V dagegen als Ordinaten einer krummen Linie aufgetragen, und nimmt für n das Brechungsverhältniß desjenigen Strahles, welcher dem Schwerpunkte der durch die krumme Linie und die Abscissenlinie begrenzten Figur entspricht, so ist

$$\int V \nu d\nu = 0.$$

Bei der Entwicklung von ϱ^2 können daher alle Glieder weggelassen werden, welche die erste Potenz von ν enthalten.

Alle übrige Brechungsverhältnisse n' muß man alsdann so bestimmen, daß sie genau derselben Farbentinte zugehören wie n .

Da ferner die Integrale in Bezug auf Θ innerhalb der Grenzen $\Theta=0$ und $\Theta=2\pi$ genommen werden müssen, so kann man zuerst die Summe von denjenigen vier Elementen der Integrale nehmen, welche den Winkeln Θ , $(\pi-\Theta)$, $(\pi+\Theta)$ und $(2\pi-\Theta)$ entsprechen, diese Summe, sodann von $\Theta=0$ bis $\Theta=\frac{\pi}{2}$ integrieren. Hierdurch fallen alle Glieder von ϱ^2 weg, welche ungerade Potenzen von $\sin\Theta$ oder $\cos\Theta$ enthalten, die übrigen Glieder dagegen werden viernmal genommen.

Führt man nach diesen Bemerkungen die angedeuteten Integrationen aus, nachdem man statt ϱ^2 seinen Werth

$$\varrho^2 = \xi^2 + \nu^2$$

substituirt hat, und gebraucht zur Abkürzung die Buchstabe γ , δ , S , T und N in der Bedeutung, dafs

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\int V \varphi^2 d\varphi}{\int V d\varphi} \\ \delta &= \frac{\int V \varphi^3 d\varphi}{\int V \varphi^2 d\varphi} \\ S &= \frac{3D' - D}{8} \\ T &= \frac{D - 3D}{8}\end{aligned}$$

ist, N dagegen eine Gröfse der zweiten Ordnung bezeichnet, deren nähere Kenntnifs unnöthig ist, so kann der Ausdruck von $\mathfrak{R}$ mit Vernachlässigung einiger unmerklicher Glieder unter die Form gebracht werden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} = \mathfrak{U}^2 & \left[\frac{r^6 g^2}{36} (A + \frac{5}{3} B r^2)^2 + \frac{5}{24} r^4 \varphi^2 C^2 \right. \\ & + \frac{r^2 \varphi^4}{3 g^2} (S^2 + T^2) + \frac{\gamma r^2 g^2}{2} (E + \frac{2}{3} F r^2 + J \delta)^2 \\ & + \frac{\gamma \varphi^2}{2} [H + \varphi^2 (\frac{2}{3} K - M(S - T) + L \delta)]^2 \\ & \left. + \frac{r^2 g^2}{2} (N + z)^2 \right] \dots \dots \dots (C)\end{aligned}$$

worin sich φ und r auf die äufsersten Punkte des Gesichtsfeldes und der Blendung beziehen, $\mathfrak{U}^2$, γ und δ aber gegebene, positive Gröfsen sind. Den Ausdruck für R erhält man hieraus, wenn man die von φ abhängenden Glieder entwickelt, φ^2 , φ^4 und φ^6 mit $2\varphi^2$, $3\varphi^4$ und $4\varphi^6$ verwechselt, und φ nicht auf die äufsersten Punkte des Gesichtsfeldes, sondern auf denjenigen leuchtenden Punkt bezieht, welchem R zugehört.

10) Der Ausdruck von $\mathfrak{R}$ ist unter der Voraussetzung berechnet, dafs alle Punkte des Gesichtsfeldes gleich berücksichtigt werden. Soll diese Voraussetzung nicht stattfinden, z. B. mehr Rücksicht auf die Mitte des Gesichtsfeldes als auf den Rand desselben genommen werden, so ist weiter nichts nöthig, als den Zähler und Nen-

ner von $\mathfrak{R}$ vor der Integration nach φ mit einem Factor Φ zu multipliciren, welcher eine Function von φ ist und das Gewicht ausdrückt, welches man den verschiedenen Punkten beilegt. Hierdurch entsteht in dem Ausdruck von $\mathfrak{R}$ die Aenderung, daß φ^2 , φ^4 und φ^6 nach vorheriger Entwicklung der von φ abhängigen Glieder mit den Größen $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(4)}$ und $\varphi^{(6)}$ verwechselt werden, welche durch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= \frac{2\int\Phi\varphi^2 d.\varphi^2}{\int\Phi d.\varphi^2} \\ \varphi^{(4)} &= \frac{3\int\Phi\varphi^4 d.\varphi^2}{\int\Phi d.\varphi^2} \\ \varphi^{(6)} &= \frac{4\int\Phi\varphi^6 d.\varphi^2}{\int\Phi d.\varphi^2}\end{aligned}$$

gegeben sind.

Da jedoch die Function Φ der Willkür überlassen bleibt, und es nicht sowohl darauf ankommt, welche Gewichte den verschiedenen Punkten beigelegt werden sollen, als darauf, daß die Deutlichkeit so groß wird, als es die Umstände gestatten, so gelangt man auf einen einfacheren und sicheren Wege zum Ziele, wenn man den Ausdruck von $\mathfrak{R}$ (No. 9. C) ungeändert beibehält, und bei der Bestimmung der willkürlichen Größen desselben darauf Bedacht nimmt, daß die Coëfficienten der verschiedenen Glieder keine bedeutende Werthe erhalten, wobei es leicht ist, nach Willkür entweder die Mitte oder den Rand des Gesichtsfeldes mehr zu berücksichtigen.

Außerdem erleiden die Ausdrücke von R und $\mathfrak{R}$ bei Spiegeltelescopcn eine Modification, wenn der Objectivspiegel in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung hat, wie es bei den Gregorianischen und Cassegrainischen Telescopcn der Fall ist; bezeichnet man durch

r_1 den Halbmesser dieser Oeffnung,

r den Halbmesser des Spiegels,

so müssen alsdann die Integrale, welche sich auf r be-

ziehen, von $r=r_1$ bis $r=r$ genommen werden. Hierdurch entsteht in den Ausdrücken von R und $\Re$ nur die Aenderung, dafs die Potenzen r^2 , r^3 , etc. mit den Gröfsen $r^{(2)}$, $r^{(4)}$, etc. verwechselt werden müssen, welche durch die Ausdrücke:

$$r^{(2)} = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2 - r_1^2}$$

$$r^{(4)} = \frac{r^4 - r_1^4}{r^2 - r_1^2}$$

und so weiter gegeben sind.

11) Die dem Ausdrucke von $\Re$ gegebene Form, wonach er aus der Summe mehrerer, mit positiven Factoren multiplicirter, Quadrate besteht, zeigt, dafs keine vollkommene Deutlichkeit erhalten werden kann, wenn nicht jedes dieser Quadrate für sich verschwindet. Vergleicht man sie mit den Coefficienten in den Ausdrücken von ξ und ν (No. 6.), so sieht man, dafs sie quadratische Factoren enthalten, welche sich auf eine der Abweichungen abgesondert beziehen, und aus den Coefficienten der correspondirenden Glieder von ξ und ν durch Combinationen und Anbringung von Correctionen erhalten werden. Es bezieht sich nämlich

$(A + \frac{1}{2}Br^2)$ auf die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe,

C , S und T auf die Abweichung wegen der Gestalt aufser der Axe,

$(E + \frac{1}{2}Fr^2 + J\delta)$ auf die Farbenzerstreuung in der Axe,

$[H + \phi^2(\frac{1}{2}K - M(S - T)) + L\delta]$

auf den farbigen Rand.

Zu einer vollkommenen Deutlichkeit würde daher erfordert werden, dafs jede dieser Gröfsen für sich verschwände, welches jedoch nicht bei allen möglich ist.

Hierzu kommt noch das letzte Glied, welches von den mit z bezeichneten willkührlichen Veränderungen im Auge und Instrumente abhängt. Die folgende Betrachtung

tung zeigt aber, daß dieses Glied in jedem einzelnen Falle für sich verschwindet, und daher nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht. Die Instrumente werden nämlich eben so wie das Auge bei dem jedesmaligen Gebrauche durch Probiren so gestellt, daß man die größtmögliche Deutlichkeit erhält, es ist daher anzunehmen, daß man hierdurch z practisch so bestimmt, wie es der größten Deutlichkeit entspricht, wodurch $z = -N$ wird und das letzte Glied in dem Ausdruck von $\mathfrak{R}$ wegfällt.

12) Da die einzelnen Glieder in dem Ausdrücke von $\mathfrak{R}$ nicht alle abgesondert verschwinden können, so bleibt nichts anderes übrig, als diesen ganzen Ausdruck durch die Bestimmung der darin enthaltenen willkürlichen Größen zu einem Minimum zu machen, so wie es die Methode der kleinsten Quadrate erfordert, indem $\mathfrak{R}$ weiter nichts ist, als die Summe der Quadrate der Fehler, welche von sämmtlichen Strahlen hervorgebracht werden, mit einem beständigen Factor multiplicirt.

Hierbei ist jedoch die Bemerkung nothwendig, daß die willkürlichen Größen zum Theil auf eine sehr complicirte Weise in dem Ausdrücke von $\mathfrak{R}$ enthalten sind, daß ferner außer der Deutlichkeit noch andere Rücksichten eintreten, von welchen weiter unten die Rede seyn wird. Da man nun, wie im Allgemeinen aus der Natur des Minimums bekannt ist, sich innerhalb gewisser Grenzen davon entfernen kann, ohne den Werth der Function, welche ein Minimum wird, beträchtlich zu vergrößern, so wird es hierdurch möglich, ohne bedeutende Vermehrung der Undeutlichkeit zugleich andere Bedingungen zu erfüllen, welche in manchen Fällen sogar wichtiger als die Deutlichkeit sind. Man gelangt dann gewöhnlich am leichtesten zum Ziele, wenn man nicht den analytischen Ausdruck für das Minimum sucht, sondern verschiedene Einrichtungen numerisch berechnet, welche nahe bei dem Minimum liegen, und durch die Veränderung einer der willkürlichen Größen von einander

verschieden sind. Hierdurch wird der Vortheil erhalten, dafs man eine Uebersicht über die in dem Ausdrucke von $\mathfrak{R}$ enthaltenen Gröfsen nahe bei dem Minimum bekommt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, nicht nur zu beurtheilen, wie weit man sich aus anderen Rücksichten ohne Nachtheil von dem Minimum entfernen kann, sondern auch die verschiedenen Abweichungen mehr oder weniger zu berücksichtigen.

Auch läfst sich hieraus das Minimum selbst mit hinlänglicher Genauigkeit finden, wenn man die in der Nähe desselben berechneten numerischen Werthe als Glieder einer arithmetischen Reihe vom zweiten Grade betrachtet.

Bei zusammengesetzten Instrumenten werden diese Rechnungen oft bedeutend erleichtert, wenn man das Instrument in mehrere Systeme, z. B. Objective und Oculare, theilt, und jedes System abgesondert berechnet, indem es leicht ist, die Resultate dieser abgesonderten Rechnungen zu verbinden, und dadurch zu dem ganzen Instrumente überzugehen.

Diejenigen willkürlichen Gröfsen in dem Ausdrucke von $\mathfrak{R}$, welche auf eine einfache Weise darin vorkommen und keine weitem Rücksichten erfordern, bestimmt man am leichtesten dadurch, dafs man das Minimum auf die gewöhnliche Weise sucht.

Welche dieser Methoden in jedem einzelnen Falle am zweckmäfsigsten angewandt wird, läfst sich erst dann beurtheilen, wenn die Ausdrücke, welche sich auf denselben beziehen, gehörig entwickelt sind. Es können jedoch im Allgemeinen einige Resultate gefunden und einige Regeln über die Anwendung der vorhergehenden Methode gegeben werden, welche hier nicht am unrichtigen Orte zu seyn scheinen.

13) Die Coëfficienten in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen enthalten eine Constante, welche durch die Integration der endlichen Differenzen-Gleichungen eingeführt wird und von der Stellung der Hauptblending

abhängt. Ist daher diese willkürlich, so kann man sie so bestimmen, daß $\mathfrak{R}$ so klein als möglich wird. Man erhält hierdurch in manchen Fällen ein sehr wirksames, bisher noch wenig beachtetes Mittel, um die Deutlichkeit beträchtlich zu vernehmen, wozu das Auge, die Wolaston'sche Camera obscura und manche schon früher construirte Microscope mit Blendungen in der Nähe der Objective Beispiele geben. Ist in dem Instrumente keine Blending angebracht und die Oeffnung desselben so groß, daß nicht alle Strahlen, welche durch das Instrument gehen, zugleich durch die Pupille des hinter ihm befindlichen Auges gelassen werden, so vertritt die Pupille die Stelle der Hauptblending, wie bereits in No. 3. angeführt worden ist; die vorhergehende Methode bestimmt daher in diesem Falle denjenigen Ort des Auges, bei welchem die größte Deutlichkeit stattfindet. In der Ausführung muß man dann denselben eben so, wie es bei Fernröhren gewöhnlich geschieht, durch eine vor dem Auge angebrachte Blending fixiren. Die einfachen und zusammengesetzten Loupen bieten Beispiele einer solchen Bestimmung dar, und werden dadurch beträchtlich verbessert.

Bei denjenigen Fernröhren, in welchen ein oder mehrere wirkliche Bilder zu Stande kommen, kann durch die vorhergehende Methode nichts bezweckt werden, weil die Stellung der Hauptblending, welche durch die Fassung des Objectives ersetzt wird, nicht willkürlich ist.

14) Bei denjenigen Instrumenten, welche aus einem Objective und Ocularen bestehen, können die Glieder in dem Ausdrucke von $\mathfrak{R}$, welche die verschiedenen Abweichungen enthalten, in mehrere Classen getheilt werden, die eine besondere Behandlung erfordern. Einige derselben hängen nämlich größtentheils von den Ocularen, andere dagegen von dem Objective, und noch andere von beiden zusammen ab. Sollen nun bei unverändertem Objective mehrere Oculareinsätze angebracht werden, wie es

bei Fernröhren und zusammengesetzten Microscopen häufig der Fall ist, so muß man die Oculare so construiren, daß die von ihnen hauptsächlich abhängenden Abweichungen für jeden Oculareinsatz abgesondert so klein als möglich werden. Durch die Einrichtung des Objectivs dagegen muß man diejenigen Abweichungen zu heben oder zu vermindern suchen, auf welche die Oculare wenig Einfluß haben, wobei es leicht ist, zugleich auf diejenigen Abweichungen Rücksicht zu nehmen, welche von dem Objectiv und den Ocularen gemeinschaftlich hervorgebracht werden. Zu diesem Ende ist es nothwendig, die verschiedenen Abweichungen einzeln zu betrachten.

Der farbige Rand wird fast allein von den Ocularen hervorgebracht, indem die Glieder in dem Ausdrucke desselben, welche von dem Objectiv abhängen, mit der Dicke der Objectivlinsen multiplicirt, folglich sehr unbedeutend sind. Wenn daher die Oculare eine solche Einrichtung haben, daß der farbige Rand gehoben werden kann, so muß dies für jeden Oculareinsatz abgesondert geschehen, und es ist zweckmäßig, hierbei mit möglicher Sorgfalt zu Werke zu gehen, weil das Auge gegen den farbigen Rand, wegen der dadurch abgesonderten Farbe, sehr empfindlich ist. Man erhält daher in Beziehung auf den farbigen Rand die Gleichung:

$$H + \phi^2 \left[\frac{2}{3} K - M(S - T) \right] + \alpha \delta = 0,$$

welche auf jeden Oculareinsatz besonders angewandt werden muß.

Bei denjenigen Ocularen, bei welchen aus anderen Rücksichten der farbige Rand nicht gehoben wird, muß man wenigstens dahin Bedacht nehmen, daß die Größe H , welche das bedeutendste Glied in dem Ausdruck des farbigen Randes ist, so klein wird, als es die Umstände gestatten.

Die Abweichung wegen der Gestalt außerhalb der Axe wird durch die beiden Glieder

$$\frac{\frac{5}{24} \mathcal{U}^2 r^4 \varphi^2 C^2}{+ \mathcal{U}^2 r^2 \varphi^4 [S^2 + T^2]} \\ 3g^2$$

ausgedrückt, von welchen ich zuerst das letzte betrachte, da es das bedeutendste ist. Die Gröfse T kann bei denjenigen Einrichtungen des Instrumentes, welche denselben Zweck erfüllen, als constant angesehen werden, und bedarf daher keiner weiteren Betrachtung. Die Gröfse S hingegen erleidet sehr beträchtliche Veränderungen. Sie besteht aus zwei Theilen, welche sich abgesondert auf das Objectiv und die Oculare beziehen. Da nun bei den gewöhnlichen Einrichtungen S nicht verschwinden kann, so muß diejenige Einrichtung ausgesucht werden, bei welcher S ein Minimum wird, oder wenigstens nicht weit davon entfernt ist, wenn man noch andere Rücksichten zu nehmen genöthigt ist. Bei Fernröhren ist der von dem Objective herrührende Theil constant und durch die Vergrößerung dividirt, folglich sehr klein in Vergleich mit demjenigen Theile, welcher sich auf die Oculare bezieht. Das Minimum kann daher bloß durch den letzteren Theil bestimmt werden. Bei Microscopen dagegen ist der Theil, welcher von dem Objective hervorgebracht wird, bedeutender als bei Fernröhren, man muß daher die Einrichtung so zu treffen suchen, daß beide Theile, und zwar jeder für sich, so viel als möglich vermindert werden, wobei es in manchen Fällen nothwendig ist, andere minder wichtige Abweichungen weniger zu berücksichtigen, als es sonst geschehen könnte.

Im Allgemeinen nimmt S ab, wenn die Oculare so construirt werden, daß das Auge sich so nahe als möglich hinter dem letzten Glase befindet. Da aber eine Unbequemlichkeit daraus entsteht, wenn die Entfernung des Auges von dem Instrumente allzu gering ist, so kann man hierin eine gewisse Grenze nicht überschreiten, und muß daher bei der Bestimmung des Minimums nur solche Einrichtungen mit einander vergleichen, bei welchen

die Entfernung des Auges dieselbe ist. Auch ist es nothwendig, bei der Berechnung des Ortes des Auges auf die Abweichung wegen der Gestalt Rücksicht zu nehmen, welche denselben sehr bedeutend verändert.

15) Nachdem auf diese Art diejenigen Glieder in dem Ausdrücke von $\mathfrak{R}$ so klein als möglich gemacht worden sind, bei welchen dieses abgesondert für jedes Ocular geschehen kann, so bleiben noch folgende drei übrig, welche von dem Objective und den Ocularen zugleich abhängen, jedoch so, daß die Oculare auf die beiden ersten nur wenig Einfluß haben. Diese Glieder sind nämlich die Farbenzerstreuung in der Axe, oder das Glied

$$\frac{\mathfrak{U}^2 V r^2 g^2 (E + \frac{2}{3} F r^2 + J \delta)^2}{2}$$

Die Abweichung wegen der Gestalt in der Axe oder das Glied

$$\frac{\mathfrak{U}^2 r^6 g^2 (A + \frac{6}{5} B r^2)^2}{36}$$

und endlich der noch nicht berücksichtigte Theil von der Abweichung wegen der Gestalt außerhalb der Axe oder das Glied

$$\frac{5}{24} \mathfrak{U}^2 r^4 \varphi^2 C^2.$$

Ist das Objectiv achromatisch, so können diese drei Glieder zwar für einen Oculareinsatz verschwinden, sollen aber mehrere Oculareinsätze zu demselben Objective gebraucht werden, so ist dieß nicht mehr möglich, weil die von den Ocularen herrührenden Theile in den vorhergehenden Ausdrücken für jeden Oculareinsatz andere Werthe erhalten.

In diesem Falle muß daher das Objectiv so construirt werden, daß $\mathfrak{R}$ für sämtliche Oculareinsätze zusammen genommen ein Minimum wird. Nach der Methode der kleinsten Quadrate gelangt man hierzu, wenn man das einem jeden Oculareinsatze zugehörige $\mathfrak{R}$ mit einem Factor G multiplicirt, welcher das dem Oculareinsatze beigelegte Gewicht ausdrückt, und als eine Function

der Vergrößerung g betrachtet werden kann, die Summe der so erhaltenen Producte hierauf zu einem Minimum macht. Trennt man in E , A und C die Theile, welche von dem Objective abhängen, von denen, welche sich auf die Oculare beziehen, bezeichnet die letzteren mit Accenten, so daß nunmehr $(E+E')$ statt E gesetzt wird u. s. w., gebraucht das Zeichen Σ , um die Summe ähnlicher Ausdrücke für alle Oculareinsätze anzudeuten, und bemerkt, daß die Größen der fünften Ordnung bei den Ocularen vernachlässigt werden können, so erhält man hierdurch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} E + \frac{2}{3}Fr^2 + J\delta + \frac{\Sigma Gg^2 E'}{\Sigma Gg^2} &= 0 \\ A + \frac{2}{3}Br^2 + \frac{\Sigma Gg^2 A'}{\Sigma Gg^2} &= 0 \\ C + \frac{\Sigma G\phi^2 C}{\Sigma G\phi^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (D)$$

Da bei einer zweifachen achromatischen Objective drei Größen willkürlich sind, so reichen jene Gleichungen zur Bestimmung derselben hin.

Die von den Ocularen herrührenden Glieder können als die Abweichungen eines *mittleren* Oculares betrachtet werden, welches statt der wirklichen Oculare bei der Berechnung des Objectivs zu Grund gelegt werden muß.

Diejenigen Glieder, welche sich auf das hinter dem Instrumente befindliche Auge beziehen, werden in den vorhergehenden Formeln unter denjenigen begriffen, welche die Oculare angehen.

Statt das Glied $J\delta$, welches in der ersten Gleichung (D) . . . vorkommt, abgesondert zu berechnen, ist es bequemer, eine Correction an dem Zerstreuungsverhältnisse anzubringen. Nennt man ζ' das so corrigirte Zerstreuungsverhältniß, so erhält man

$$\zeta' = \alpha + \beta\delta$$

Wird dieser Werth bei der Berechnung von E an-

gewandt, so fällt das Glied $J\delta$ aus der genannten Gleichung ganz weg.

16) Durch die beiden ersten Gleichungen (D) werden die Farbenzerstreuung und die Abweichung wegen der Kugelgestalt in der Axe für das mittlere Ocular und sämtliche Strahlen im Mittel so gut als möglich aufgehoben. Bei den einzelnen Strahlen dagegen ist eine vollkommene Vernichtung dieser Abweichungen nicht möglich. Bringt man jene Gleichungen unter die Gestalt:

$$\left[E + F(r\sqrt{\frac{2}{3}})^2 + J\delta + \frac{\Sigma Gg^2 E}{\Sigma Gg^2} \right] (r\sqrt{\frac{2}{3}})\delta = 0$$

$$[A + B(r\sqrt{\frac{2}{3}})^2] (r\sqrt{\frac{2}{3}})^3 = 0,$$

so zeigt die Vergleichung mit den Ausdrücken von ξ und ν (No. 6.), daß die Farbenzerstreuung nur für denjenigen Strahl vollkommen gehoben ist, welcher in der Entfernung $r\sqrt{\frac{2}{3}}$ einfällt, und bei welchem

$$\nu = \delta \text{ ist,}$$

die Abweichung wegen der Kugelgestalt in der Axe dagegen nur für denjenigen Strahl, welcher in der Entfernung $r\sqrt{\frac{2}{3}}$ einfällt, wegen der geringeren Oeffnung der Blendung aber nicht durch das Instrument geht. Hiernach bleiben in dem Ausdrucke von $\mathfrak{R}$, wenn man alle Glieder beibehält, kleine unaufgehobene Theile von beiden Abweichungen übrig, welche F^2 und B^2 proportional sind.

Berücksichtigte man bloß die Abweichungen in der Axe, so fiel die dritte Gleichung (D) weg, und man könnte eine der willkürlichen Größen des Objectivs so bestimmen, daß die nicht aufgehobenen Theile der Farbenzerstreuung und Abweichung wegen der Kugelgestalt, mithin F und B so klein als möglich würden. Die Minima beider Größen liegen aber sehr nahe bei demjenigen Werthe, welcher durch die dritte Gleichung (D) bestimmt wird. Das daselbst gefundene Objectiv hat daher noch außerdem den Vorzug, daß die nicht aufgeho-

benen Theile der Abweichungen in der Axe sehr nahe ihren kleinsten Werth erhalten.

Es muß hierbei noch bemerkt werden, daß wegen des Coëfficienten J eben so wie wegen F ein kleiner nicht aufgehobener Theil der Farbenzerstreuung in der Axe übrig bleibt, welcher jedoch nur durch die Wahl schicklicher Glasarten vermindert werden kann.

17) Bei Fernröhren kommt hierzu noch ein anderer Umstand, auf welchen zuerst Herschel aufmerksam gemacht hat *). Die Fernröhre werden nämlich gewöhnlich so berechnet, wie es ihr Gebrauch in der Astronomie erfordert, daß die Entfernung des Gegenstandes, welche in No. 2. mit a bezeichnet worden ist, als unendlich angesehen wird.

Soll nun ein solches Fernrohr zu terrestrischen Gegenständen gebraucht werden, so sind die Abweichungen, deren Coëfficienten Functionen von a sind, nicht so genau aufgehoben als bei unendlich entfernten Gegenständen. Da jedoch die Entfernung der terrestrischen Gegenstände, welche durch solche Fernröhre betrachtet werden, immer sehr groß ist, so kann man die Coëfficienten in Reihen entwickeln, welche nach $\frac{1}{a}$ fortlaufen.

Sieht man $\frac{1}{a}$ als eine Größe der zweiten Ordnung an, so entsteht hierdurch in den beiden ersten Gleichungen (D) nur die Aenderung, daß sich $\mathcal{A}$ in einen Ausdruck von der Form $\mathcal{A} + \mathcal{A}'\left(\frac{1}{a}\right)$ verwandelt, wenn nunmehr unter $\mathcal{A}$ der für unendlich entfernte Gegenstände berechnete Werth verstanden wird. Unter den verschiedenen Objectiven, welche man erhält, wenn man eine der drei willkürlichen Größen desselben nach Gefallen annimmt, und die beiden andern durch die zwei ersten Gleichungen (D) bestimmt, giebt es eines, bei welchem

*) *Phil. transact.* 1821, *part. II. pag.* 222.

der Coëfficient A' verschwindet, und welches daher für astronomische und terrestrische Gegenstände gleich gut ist. Man erhält die Dimensionen desselben, wenn man die Gleichung

$$A' = 0$$

statt der dritten Gleichung (D) gebraucht.

Dieses Objectiv ist von dem oben gefundenen sehr wenig verschieden, man kann daher, wenn man die Dimensionen desselben etwas verändert, ein Objectiv erhalten, welches sehr nahe die Bedingungen erfüllt, daß die Abweichungen in und außer der Axe so klein als möglich werden, und daß das Objectiv für astronomische und terrestrische Gegenstände gleich brauchbar ist. Wie weit man sich von den gefundenen Dimensionen entfernen darf, sieht man am besten, wenn man für mehrere in der Nähe liegende Objective den Werth der nicht völlig aufgehobenen Glieder von $\mathfrak{R}$ berechnet. Man kann dann die Dimensionen des Objectivs leicht so bestimmen, daß keines dieser Glieder bedeutend wird.

18) Ist das Objectiv nicht achromatisch, so können die ersten beiden Gleichungen (D) nicht erfüllt werden, und es bleibt dann nichts anders übrig, als die Einrichtung des Objectives so zu bestimmen, daß dadurch der ganze Ausdruck von $\mathfrak{R}$ so klein als möglich wird.

Bei zusammengesetzten Microscopen muß in diesem Falle noch auf einen anderen Umstand Rücksicht genommen werden. Bekanntlich besteht die gesammte Vergrößerung eines Microscops aus zwei partiellen Vergrößerungen, deren Product die gesammte Vergrößerung bildet. Nach der in No. 2. gebrauchten Bezeichnung würden nämlich die Gegenstände schon g mal vergrößert erscheinen, wenn man sie in derselben Entfernung mit dem Instrument und mit bloßem Auge betrachten könnte. Sodann befinden sich aber gewöhnlich die Gegenstände näher bei dem Objective des Microscops, als sie an das bloße Auge gebracht werden können, wenn dasselbe noch

deutlich sehen soll, wodurch selbst in dem Falle eine Vergrößerung entsteht, wenn $g=1$ ist. Wird daher die gesammte Vergrößerung des Microscops als gegeben betrachtet, so ist die Zerlegung derselben in die beiden genannten partiellen Vergrößerungen willkürlich, d. h. g ist eine willkürliche Gröfse. Da nun einige Glieder von $\mathfrak{X}$ mit g multiplicirt, andere dagegen dadurch dividirt sind, so giebt es einen Werth von g , welcher $\mathfrak{X}$ zu einem Minimum macht, mithin als der vortheilhafteste zu betrachten ist.

Bei Fernröhren fällt diese Bestimmung weg, weil bei ihnen g die gesammte Vergrößerung ist, welche als gegeben angesehen wird.

19) Bei dem Gebrauche der vorhergehenden Formeln müssen die Coëfficienten γ und δ , mithin die Gröfse V bekannt seyn, da jene Functionen der letzteren sind. Wären alle Strahlen von einerlei Art, so würde das Natürlichste seyn, die Gröfse V dem Quadrate der Lichtstärke der verschiedenen Strahlen gleich zu setzen, welche ich mit l bezeichnen werde. Nach dieser Voraussetzung ist nämlich der Fehler, welcher von jedem Strahle hervorgebracht wird, mit Rücksicht auf das ihm beigelegte Gewicht, dem Producte aus der Seitenabweichung ϱ in die Lichtstärke l proportional, welches der einfachste Ausdruck für denselben ist, da er mit ϱ und l zugleich verschwinden muß.

Diese Betrachtung giebt zu der Idee Veranlassung auch bei den verschiedenen farbigen Strahlen

$$V=l^2$$

zu setzen, und die hierdurch erhaltenen Resultate mit den Beobachtungen zu vergleichen, um zu sehen, ob jene Hypothese zulässig ist. Da jedoch die Erfahrung zeigt, dafs die violetten Strahlen bei gleicher Lichtstärke eine geringere Wirkung im Auge hervorbringen als die rothen, so wird es rüthlich seyn, die Function V etwas zu modificiren, so dafs sie im Wesentlichen das Quadrat der

Licht-

Lichtstärke ausdrückt, nach der Seite der violetten Strahlen aber etwas mehr als jenes abnimmt.

Ich wähle hierzu die Beobachtungen von Fraunhofer, welche in den Denkschriften der Academie der Wissenschaften zu München für die Jahre 1814 und 1815, p. 193., und in Gilbert's Ann. d. Phys. Bd. 56, p. 264. abgedruckt sind.

Er hat an sieben Stellen des prismatischen Farbenbildes, welche durch die von ihm entdeckten Linien leicht kenntlich sind, und mit den Buchstaben *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* bezeichnet werden, nicht nur die Brechungsverhältnisse für verschiedene Glasarten, sondern auch die Lichtstärke und das Maximum derselben aus sorgfältig angestellten Beobachtungen hergeleitet.

Die Grenzen des Farbenbildes, welche ich mit *A* und *J* bezeichne, sind nicht angegeben, ich nehme sie daher nach der Figur, welche sich bei der ersten Abhandlung befindet.

Die folgende Tafel enthält hiernach die Brechungsverhältnisse $(n + \nu)$ und $(n' + \nu')$ für diejenigen Gattungen von Crown Glas und Flint Glas, welche Fraunhofer mit No. 13. und No. 30. bezeichnet, sodann die Lichtstärke *l*, wobei das Maximum derselben = 1000 gesetzt ist. Nimmt man das Crown Glas No. 13. als diejenige Glasart an, bei welcher nach No. 5. die Veränderung des Brechungsverhältnisses, ν , als die absolute veränderliche Größe betrachtet wird, so bedürfen die von Fraunhofer angegebenen Lichtstärken einer unbedeutenden Correction, da sie an einer anderen Glasart beobachtet und bei verschiedenen Glasarten der Zerstreuung umgekehrt proportional sind. In der folgenden Tafel ist diese Correction bereits angebracht.

Die beobachteten Lichtstärken sind das arithmetische Mittel aus vier Beobachtungen. Um die Genauigkeit derselben beurtheilen zu können, füge ich in den beiden

letzten Columnen den größten und kleinsten beobachteten Werth der Lichtstärke hinzu.

	Crown Glas ($n + \nu$)	Flintglas ($n' + \nu'$).	Lichtstärke im Mittel l	Größter beobacht. Werth.	kleinster beob. Werth.
<i>A.</i>	1,52232		0	0	0
<i>B.</i>	1,52131	1,62357	30	50	9
<i>C.</i>	1,52530	1,62548	90	143	46
<i>D.</i>	1,52798	1,63059	634	713	584
Max.			1000	1000	1000
<i>E.</i>	1,53137	1,63736	485	616	384
<i>F.</i>	1,53434	1,64347	174	256	85
<i>G.</i>	1,53991	1,65541	33	56	11
<i>H.</i>	1,54468	1,66607	6	9	1
<i>J.</i>	1,54884		0	0	0

Um die Coefficienten γ und δ berechnen zu können, muß l durch eine experimentelle Formel ausgedrückt werden, da der eigentliche analytische Ausdruck jener Größe nicht bekannt ist. Zu dem Ende theile ich das prismatische Farbenbild in zwei Theile, von *A* bis zum Maximum der Lichtstärke und von dem Maximum bis zu *J*. Hierauf suche ich l für jeden dieser Theile durch eine besondere Formel darzustellen, jedoch so, daß diese nach der Seite der violetten Strahlen etwas kleinere Werthe giebt als die unmittelbare Beobachtung. Setzt man für einen beliebigen Punkt des ersten Theils

$$x = 100(n + \nu - 1,52232),$$

für einen beliebigen Punkt des zweiten Theils dagegen

$$y = 100(1,54884 - (n + \nu)),$$

so wird l durch die beiden Formeln

$$l = 3493 x^3$$

$$l = 22,53 y^{1/2}$$

dargestellt, wenn man jede derselben bis zu demjenigen Punkte gebraucht, wofür sie einerlei Werth von l , nämlich $l = 1000$ geben.

Die Vergleichung der hiernach berechneten Werthe

von l mit den beobachteten ist in der folgenden Tafel enthalten:

	$n + \nu.$	l Berechnet.	l Beobachtet.
<i>A.</i>	1,52232	0	0
<i>B.</i>	1,52431	28	30
<i>C.</i>	1,52530	92	90
<i>D.</i>	1,52798	633	634
Max.	1,52891	1000	1000
<i>E.</i>	1,53137	484	485
<i>F.</i>	1,53434	174	174
<i>G.</i>	1,53991	12	33
<i>H.</i>	1,54468	0,2	6
<i>J.</i>	1,54884	0	0

Die oben angegebenen größten und kleinsten beobachteten Werthe von l zeigen, daß die Fehler der angenommenen Formeln mit Ausnahme der zwischen *G* und *J* befindlichen Strahlen bei weitem innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Bei den letzteren dagegen, d. i. in der Gegend der violetten Strahlen, sind die berechneten Werthe von l kleiner als die beobachteten.

Setzt man daher

$$V = l^2$$

und legt dabei die beiden oben gefundenen experimentellen Formeln zu Grunde, so wird das Gewicht der verschiedenen farbigen Strahlen von den rothen bis zu den blauen dem Quadrate der Lichtstärke proportional gesetzt, von den blauen bis zu den letzten violetten Strahlen dagegen nimmt es stärker ab, als jenes Quadrat, so wie es beabsichtigt wurde.

Jedes der Integrale, welche sich auf ν beziehen, muß nunmehr in zwei Integrale zerlegt werden. Die Grenzen des ersten sind diejenigen Werthe von ν , welche den äußersten rothen Strahlen und dem Maximum der Lichtstärke entsprechen, die Grenzen des zweiten

Integrals dagegen die dem Maximum der Lichtstärke und den äußersten violetten Strahlen zugehörigen Werthe von ν .

Nach den oben entwickelten Grundsätzen erhält man hierdurch die Brechungsverhältnisse der mittleren Strahlen für die beiden zur Vergleichung gewählten Glasarten, nämlich für Crown Glas

$$n = 1,52993,$$

für Flintglas

$$n' = 1,63447,$$

ferner die Coëfficienten in dem Ausdrücke von $\Re$, welche von ν abhängen, nämlich

$$\gamma = +0,0000043$$

$$\delta = +0,00039.$$

20) In No. 5. ist für das Zerstreuungsverhältniß $\frac{\nu'}{\nu}$ oder ζ der Ausdruck angenommen worden:

$$\zeta = \alpha + \beta \nu.$$

Bestimmt man die Coëfficienten α und β durch die von Fraunhofer beobachteten Brechungsverhältnisse, so findet man:

$$\alpha = 1,994$$

$$\beta = 10,2$$

Um die vorhergehende Formel mit den Beobachtungen zu vergleichen, lege ich die von Fraunhofer am Crown Glase beobachteten Brechungsverhältnisse ($n + \nu$) zu Grunde, und berechne daraus die correspondirenden Brechungsverhältnisse ($n' + \nu'$) des Flintglases, welche durch den Ausdruck

$$n' + \nu' = n' + \alpha \nu + \beta \nu^2$$

gegeben sind. Die folgende Tafel enthält die Vergleichung der so gefundenen Resultate mit den Beobachtungen.

	Brechungsverhältniß des Flintglases.		Diff.
	Berechnet.	Beobachtet.	
<i>B.</i>	1,62358	1,62357	+ 0,00001
<i>C.</i>	1,62546	1,62548	— 2
<i>D.</i>	1,63062	1,63059	+ 3
<i>E.</i>	1,63736	1,63736	0
<i>F.</i>	1,64346	1,64347	— 1
<i>G.</i>	1,65539	1,65541	— 2
<i>H.</i>	1,66609	1,66607	+ 2

Die Beobachtungen, welche Fraunhofer an zwei Prismen von einerlei Glasart (Flintglas No. 23.) mit verschiedenen brechenden Winkeln angestellt hat, geben größere Unterschiede, als die in der vorhergehenden Tafel enthaltenen, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich ist.

	Brechungsverhältniß nach dem		Diff.
	Prisma von 60°.	Prisma von 45°.	
<i>B.</i>	1,62660	1,62657	+ 0,00003
<i>C.</i>	1,62847	1,62845	+ 2
<i>D.</i>	1,63367	1,63367	0
<i>E.</i>	1,64019	1,64054	— 5
<i>F.</i>	1,64676	1,64678	— 2
<i>G.</i>	1,65885	1,65885	0
<i>H.</i>	1,66969	1,66968	+ 1

Die für ζ angenommene Formel stellt daher die Beobachtungen so genau dar, daß es unnütz seyn würde, noch mehrere Glieder der Reihe beizubehalten, selbst in dem Falle, wenn die hier vernachlässigten höheren Potenzen von ν beibehalten würden.

Nach No. 15. ist das zur Berechnung der achromatischen Objective corrigirte Zerstreuungsverhältniß ζ' durch den Ausdruck gegeben:

$$\zeta' = \alpha + \beta \delta.$$

Substituirt man hierin statt α , β und δ die oben gefundenen Werthe, so wird

$$\zeta' = 1,998.$$

Dagegen findet Fraunhofer, daß die aus den genannten Glasarten construirten Objective dann am besten werden, wenn

$$\zeta' = 1,98$$

angenommen wird, welches wenig von dem vorhergehenden Resultate der Rechnung abweicht.

Sieht man das von Fraunhofer gefundene Resultat als genau an, so folgt daraus, daß die Gewichte nach der Seite der violetten Strahlen noch mehr abnehmen müssen, als bei der vorhergehenden Rechnung vorausgesetzt wurde. Die wiederholte Vergleichung der Erfahrungen mit der Theorie, wobei jedoch alle durch dieselbe gegebene Correctionen berücksichtigt werden müssen, ist wohl der sicherste Weg, um in dieser für die Construction der achromatischen Objective so wichtigen Sache zu einem sicheren Resultate zu gelangen.

Will man bei allen Strahlen das Gewicht dem Quadrate der Lichtstärke proportional setzen, so hat dieses keine Schwierigkeit, als eine etwas weitläufigere Rechnung. Man braucht dann nur für den zweiten Theil von l^2 oder l einen Ausdruck von der Form

$$Ay^a + By^b$$

anzunehmen, und die unbestimmten Coëfficienten und Exponenten desselben so zu bestimmen, daß dadurch die vier Beobachtungen in den Punkten *E*, *F*, *G*, *H* dargestellt werden.

Führt man hiernach die Rechnung aus, so erhält man

$$\zeta' = 2,004.$$

Setzte man V der einfachen Lichtstärke proportional, so fände man nach derselben Methode

$$\zeta' = 2,052,$$

welches Resultat zu weit von der Erfahrung abweicht, als daß es angenommen werden könnte.

Da übrigens der Coëfficient δ bei der oben zu Grund gelegten Hypothese, deren Resultate nahe mit der Erfahrung übereinstimmen, außerordentlich klein wird, so

können alle damit multiplicirten Glieder in dem Ausdrucke von $\mathfrak{N}$ als unbedeutend vernachlässigt werden.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$\zeta' = \alpha,$$

d. h. das Zerstreuungsverhältniß muß eben so wie die Brechungsverhältnisse bestimmt werden, daß es nämlich dem Schwerpunkte der in No. 9. erwähnten Figur entspricht, welcher sehr nahe in die Mitte zwischen die mit D und E bezeichneten Punkte fällt.

21) Aufser der Undeutlichkeit kommt bei den optischen Werkzeugen noch ein anderer Fehler in Betracht, welcher von jener unabhängig ist, und eine besondere Untersuchung erfordert, nämlich der, daß im Allgemeinen die Gegenstände durch die optischen Werkzeuge mehr oder weniger verzerrt erscheinen. Nach demjenigen, was bereits oben angeführt worden ist, hängt die Deutlichkeit allein davon ab, wie nahe die Durchschnittspunkte der von einem und demselben Punkte des Gegenstandes ausgehenden Strahlen mit der Projectionsfläche bei einander liegen. Dagegen hat es auf die Deutlichkeit keinen Einfluß, welche Lage die den verschiedenen Punkten des Gegenstandes zugehörigen Bilder auf der Projectionsfläche gegen einander haben. Diese letztere Lage bestimmt die Gestalt des auf der Projectionsfläche entworfenen Bildes, man kann daher aus demselben nicht nur beurtheilen, ob der Gegenstand durch das Instrument verzerrt erscheint, sondern auch die Größe der Verzerrung berechnen, wenn sie stattfindet.

Ich betrachte bei dieser Untersuchung zuerst diejenigen Instrumente, bei welchen die Lichtstrahlen nach ihrem Durchgange in das hinter denselben befindliche Auge fallen, und nehme an, daß sich das Auge unverändert in der Axe befindet, so wie es zuerst in No. 7. vorausgesetzt worden ist. Von diesem Falle ist es dann leicht, auf die anderen Fälle überzugehen. Da die bei dem Instrumente vorkommenden willkürlichen Größen

durch die vorhergehende Methode so bestimmt werden, daß die Durchschnittspunkte aller von demselben Punkte des Gegenstandes ausgehender Strahlen mit der Projectionsfläche so nahe wie möglich bei dem Durchschnittspunkte des Hauptstrahles liegen, so kann dieser nunmehr als das Bild jenes Punktes angesehen werden.

Substituirt man nun in der Gleichung des Hauptstrahles (No. 6. *A.*) statt z denjenigen Werth, welcher der größten Deutlichkeit entspricht, und schreibt zur Abkürzung $\mathfrak{E}$ statt $(\mathfrak{A} + \mathfrak{D}z)$, so erhält man die Ordinate des Durchschnittspunktes zwischen dem Hauptstrahle und der Netzhaut oder die Ordinate des Bildes von demjenigen Punkte, welcher durch die Coordinaten α und φ bestimmt wird, durch den Ausdruck:

$$y = \mathfrak{E}\varphi + \mathfrak{B}\varphi^3 + \mathfrak{C}\varphi^5.$$

Denkt man sich das Instrument und den Gegenstand, welcher durch dasselbe betrachtet wird, weg, und nimmt an deren Stelle in einer beliebigen Entfernung einen anderen vergrößerten Gegenstand an, welcher dem wirklichen ähnlich ist und mit bloßem Auge betrachtet wird, so kann die Ordinate des Bildes von einem Punkte desselben ebenfalls durch den vorhergehenden Ausdruck berechnet werden, wenn man nur in den Coëfficienten die brechenden Flächen des Auges allein berücksichtigt. Accentuirt man alle Größen, welche sich auf den letzteren Fall beziehen, und bemerkt, daß wegen der Aehnlichkeit des hypothetischen Gegenstandes mit dem wirklichen y und y' sich in einer und derselben Ebene befinden, welche durch die Axe und den entsprechenden Punkt des Gegenstandes gelegt ist, und daß außerdem

$$\varphi' = n\varphi$$

ist, wenn n eine unbestimmte Constante bezeichnet, so kann der Ausdruck von y' unter die Form gebracht werden:

$$y' = \mathfrak{E}'\varphi + \mathfrak{B}'\varphi^3 + \mathfrak{C}'\varphi^5$$

bestimmt man η , wovon die Coëfficienten $\mathfrak{E}'$ etc. Functionen sind, durch die Gleichung

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}$$

und setzt

$$\begin{aligned} Y &= \mathfrak{E} \varphi \\ U &= \mathfrak{B} - \mathfrak{B}' \\ &\quad \mathfrak{E} \\ W &= \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}}, \end{aligned}$$

so giebt die Vergleichung der Ausdrücke von y und y'

$$y = y' + Y[U \varphi^2 + W \varphi^4].$$

Wäre $y = y'$, so fielen die beiden Bilder auf der Netzhaut zusammen, der Gegenstand erschiene daher durch das Instrument betrachtet eben so, wie ein ihm ähnlicher, vergrößerter, dem bloßen Auge erscheinen würde, d. h. dem wirklichen Gegenstande ähnlich.

Die folgenden Glieder in dem Ausdrucke y zerstören diese Aehnlichkeit, und veranlassen daher eine Verzerrung der Gegenstände.

Y bezeichnet die Ordinate auf der Netzhaut ohne Rücksicht auf jene Verzerrung, $\left(\frac{y - y'}{Y} \right)$ ist daher die Verzerrung in aliquoten Theilen der dazu gehörigen Ordinate ausgedrückt. Nennt man sie Z , so ist

$$Z = U \varphi^2 + W \varphi^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Der Coëfficient U kann in den meisten Fällen nicht verschwinden; es bleibt alsdann nichts anders übrig, als bei der Bestimmung der willkürlichen Gröfsen darauf Rücksicht zu nehmen, dafs U so klein wird, als es geschehen kann, ohne der Deutlichkeit bedeutend zu schaden. Man erreicht dieses am leichtesten, wenn man U eben so wie es bereits in Bezug auf die Deutlichkeit gesagt worden ist, für mehrere Einrichtungen berechnet, welche nahe bei dem Minimum $\mathfrak{R}$ liegen.

Ist das Instrument so beschaffen, dafs $U = 0$ werden kann, wie es z. B. bei dem Galileischen Fernrohre

der Fall ist, so kann man dieselbe Methode gebrauchen, welche oben angewandt worden ist, um die grösste Deutlichkeit zu erhalten. Man findet dadurch diejenige Einrichtung des Instruments, bei welcher die Gegenstände so wenig, als möglich, verzerrt erscheinen. Sieht man nämlich $y - y'$ als einen Fehler an, welcher dem durch die Coordinaten α und ϕ bestimmten Punkte des Gegenstandes zugehört, und nennt Z die Summe der Quadrate der Fehler für sämtliche Punkte des Gegenstandes, so ist

$$Z = Qf(y - y')^2 d.\phi^2.$$

Die kleinste Verzerrung findet bei derjenigen Einrichtung statt, bei welcher Z ein Minimum wird. Sie ist durch die Gleichung

$$U + \frac{1}{3} W\phi^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F)$$

gegeben, in welcher für ϕ derjenige Werth genommen werden muß, welcher den äussersten Punkten des Gegenstandes entspricht. Hieraus folgt, dafs die Verzerrung nur bei denjenigen Punkten des Gegenstandes vollkommen vernichtet wird, deren Abstand von der Axe

$$= \alpha\phi\sqrt{\frac{1}{3}}$$

ist.

Diese Resultate bleiben auch in dem Falle ungeändert, wenn sich das Auge nicht, wie es vorausgesetzt wurde, unverändert in der Axe des Instruments befindet, sondern sich jedesmal so richtet, dafs seine Axe mit dem Hauptstrahle zusammenfällt. Hiedurch werden nämlich in y und y' gleiche Veränderungen hervorgebracht, so dafs $(y - y')$, worauf es bei dieser Untersuchung allein ankommt, ungeändert bleibt.

Diejenigen Instrumente, bei welchen von dem Gegenstande ein Bild auf einer Ebene entworfen wird, sind in den vorhergehenden Formeln begriffen, wenn man den Halbmesser der Projectionsfläche unendlich setzt, und alle Glieder wegläfst, welche sich auf die brechenden Flächen des Auges beziehen, wodurch $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}' = 0$ werden.

Soll bei einem Instrumente ein innerer Micrometer angebracht werden, so ist ein wesentliches Erforderniß, daß in der Ebene des Micrometers ein Bild entsteht, und daß dieses dem Gegenstande ähnlich ist, weil sonst die Angaben des Micrometers unrichtig werden. In diesem Falle finden daher die zuletzt gefundenen Resultate ihre Anwendung, wenn man die Ebene des Micrometers als Projectionsebene annimmt. Es wird dann oft nothwendig, etwas von der Deutlichkeit aufzuopfern, um die Verzerrung so klein als möglich zu machen.

22) Die vorhergehenden Untersuchungen können, strenge genommen, nicht auf das Auge angewandt werden.

Einmal hat das Auge ein so beträchtliches Gesichtsfeld, daß die Größe ϕ nicht als eine kleine Größe der ersten Ordnung betrachtet werden kann, wie es bei der Entwicklung der vorhergehenden Formeln geschehen ist.

Sodann besteht die Krystalllinse aus Schichten von verschiedenem Brechungsvermögen, deren Gestalt, eben so wenig wie die der Netzhaut, mit der zur Rechnung erforderlichen Genauigkeit bekannt, jedenfalls aber nicht sphärisch ist, wie es jene Formeln voraussetzen.

Da jedoch das Brechungsvermögen im Innern der Krystalllinse nur wenig veränderlich ist, so kann man, wenn man diese als homogen annimmt und sich auf den mittleren Theil des Gesichtsfeldes beschränkt, durch die vorhergehenden Formeln approximative Resultate erhalten, deren Kenntniß in jedem Falle interessant ist, da sie den bei den Instrumenten gefundenen analog sind. Außerdem kommt aber noch die Gestalt der Netzhaut in Betracht.

Nach No. 7. sind die Coëfficienten in den Gleichungen der gebrochenen Strahlen und folglich auch in dem Ausdrücke von $\mathfrak{R}$ Functionen von dem Halbmesser der als sphärisch betrachteten Netzhaut. Wird daher dieser Halbmesser als nicht gegeben betrachtet, so kann man ihn so bestimmen, daß $\mathfrak{R}$ ein Minimum oder die

Deutlichkeit so groß als möglich wird, wodurch man eine neue Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung erhält

(Die Fortsetzung folgt.)

II. Ueber den Fall einer Linse längs einer geneigten Ebene.

Wenn man eine Glaslinse, die man in Wasser getaucht hat, so daß daran ein großer Tropfen hängen geblieben ist, auf eine horizontal liegende Glasplatte setzt, und nun, nachdem sich das Wasser rings um den Berührungspunkt gleichförmig ausgebreitet hat, die Platte sanft gegen dem Horizont neigt; so wird die Linse, statt längs der Platte ruhig hinabzugleiten, in eine schnelle Drehung gerathen, und in einer geraden Linie hinabsinken, die verschieden ist von der, welche sie bei freiem Hinabgleiten eingeschlagen haben würde. Diese sonderbare Erscheinung, deren Erklärung übrigens nicht schwer fallen kann, läßt sich auch mit einem Uhrglase erhalten (*Correspondance mathematique et physique*, T. III, p. 207., deren Herausgeber Hr. Quetelet die Beobachtung von Hrn. Stratford, Secretair der astronomischen Gesellschaft zu London, mitgetheilt erhielt) *).

*) Am sichersten gelingt der Versuch, wenn man die Glasplatte ganz mit Wasser benetzt, und der Linse gleich beim Darauflegen eine Drehung mittheilt; bei schicklichem Neigen der Platte setzt dann die Linse ihre Rotation beliebig lange fort. Etwas modificirt kann man mit diesem Versuch auch die Dauer der Lichteindrücke beweisen. Setzt man nämlich auf eine horizontale trockne Glasplatte eine Glaslinse in eine schwankende Drehung, so bildet jeder Lichtpunkt, der sich in der Linse reflectirt, einen leuchtenden Ring. P.