SULLE SUPERFICIE W APPLICABILI SOPRA UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE.

Nota di **Mineo Chini** (Genova).

Adunanza del 12 novembre 1905.

Quando una superficie sia applicabile sopra una di rotazione, lungo ogni deformata dei paralleli si mantiene costante la sua curvatura totale. Se inoltre i due raggi principali di curvatura sono, in ogni punto di quella superficie, legati da una medesima relazione, ciò vuol dire che la curvatura media è una determinata funzione della curvatura totale (nell'ipotesi che questa non sia costante su tutta la superficie). Per conseguenza, lungo ogni deformata dei paralleli sarà pure costante la curvatura media; e quindi saranno costanti i due raggi principali di curvatura della superficie. Reciprocamente, se in una superficie applicabile sopra una di rotazione sono costanti i due raggi principali di curvatura lungo ogni deformata dei paralleli, questi raggi saranno entrambi funzioni del parametro che individua tali deformate; e perciò risulteranno, su tutta la superficie, legati da una certa relazione.

Dunque :

Eccettuate le superficie a curvatura totale costante, tutte le altre superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione, sono date da quelle speciali superficie applicabili sopra una di rotazione che hanno costanti i due raggi principali di curvatura lungo ogni deformata dei paralleli.

Esse comprendono evidentemente le superficie elicoidali; mentre quelli che non sono elicoidi (e nemmeno superficie di rotazione) vennero incontrate per la prima volta dal BONNET, nella sua ben nota ricerca delle superficie che sono suscettibili di una deformazione continua la quale lasci costantemente invariati i due raggi principali di curvatura *). Tali superficie, non elicoidali, applicabili sopra una di rotazione formarono anche l'oggetto di una mia Nota **), nella quale (supposto che esse non siano a curvatura media costante) determino facilmente — in base allo studio del BONNET — le equazioni in termini finiti delle loro linee di curvatura, e dimostro poi che queste linee formano un sistema isoterma. Infine, dopo aver messo in rilievo le espressioni dei due raggi principali di curvatura per una qualunque delle dette superficie (la cui

*) Journal de l'École Polytechnique, 42^e cahier (1867), pp. 72-85.

**) *Sopra una classe di superficie* [Giornale di Matematiche, vol. XXVII (1889), pp. 265-273].

determinazione *intrinseca* dipende dall'integrazione di un'equazione differenziale del 3° ordine, stabilita dal BONNET), ne dò l'espressione dell'elemento lineare mediante i parametri isometrici delle linee di curvatura.

A motivo della conclusione a cui giungemmo precedentemente *) il problema di determinare tutte le possibili superficie W (oltre quelle a curvatura totale costante e gli elicoidi) che siano applicabili sopra una superficie di rotazione, è dunque risoluto implicitamente dal BONNET. Ma non credo inopportuno tornare ancora sull'argomento, per ritrovare dapprima, come caso speciale di superficie W , non elicoidali, applicabili sopra una superficie di rotazione, quelle che sono a curvatura media costante **); e per approfondire poi meglio la questione nel caso generale, aggiungendo pure qualche utile proprietà.

*
**

Supposto di riferire una superficie W , che sia applicabile sopra una superficie di rotazione, al doppio sistema di linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, costituito rispettivamente dalle deformate dei paralleli e dei meridiani (nell'ipotesi che la superficie non sia a curvatura totale costante), avremo pel quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

con λ funzione della sola variabile u . E la curvatura totale K avrà per espressione

$$(1) \quad K = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 \log \lambda}{du^2}.$$

Indicando coi noti simboli D , D' , D'' i coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie, e ponendo

$$(2) \quad \frac{D}{\lambda} = \mu + v \cos \omega, \quad \frac{D'}{\lambda} = v \sin \omega, \quad \frac{D''}{\lambda} = \mu - v \cos \omega,$$

ne seguirà

$$H = -2 \frac{\mu}{\lambda},$$

dove H rappresenta la curvatura media della superficie. Ed oltre a λ e K , anche H dovrà essere funzione della sola u .

Ma si ha pure

$$(3) \quad K = \frac{DD'' - D'^2}{\lambda^4} = \frac{H^2}{4} - \left(\frac{v}{\lambda}\right)^2.$$

*) Tale conclusione forma invece l'oggetto di una recente Nota del dott. A. TAGLIAFERRI (Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, seduta del 18 giugno 1905). E non sarà inutile confrontare tutto il contenuto di quella Nota colle prime pagine della mia citata innanzi.

**) La loro ricerca, fatta direttamente, è contenuta nella mia Nota: *Sulle superficie a curvatura media costante* [Giornale di Matematiche, vol. XXVII (1889), pp. 107-123].

Quindi anche μ e ν saranno funzioni della sola u . Mentre ω , se escludiamo da qui innanzi che la superficie sia un elicoidale *), dipenderà almeno dalla variabile v .

Note le espressioni di λ , μ , ν , ω , la superficie sarà dunque determinata intrinsecamente; giacchè saranno note le sue due forme fondamentali.

Ma queste quattro quantità, a causa delle formule di CODAZZI, debbono risultare legate dalle seguenti relazioni **):

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\nu} \frac{dH}{du} \sin \omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = - \frac{d \log \lambda \nu}{du} - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\nu} \frac{dH}{du} \cos \omega.$$

Alle quali potremo subito soddisfare, se intanto consideriamo il caso che la curvatura media H sia costante su tutta la superficie.

E difatti, avremo allora

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = - \frac{d \log \lambda \nu}{du}.$$

Da cui ricaviamo

$$\log \lambda \nu = au + b, \quad \omega = -av + c,$$

con a , b , c costanti arbitrarie, ed a differente da zero ***).

Supposto che la superficie non sia ad area minima (poichè sono note, e mediante formule assai semplici, tutte le superficie ad area minima applicabili sopra una superficie di rotazione), potremo cambiare il parametro u nell'altro

$$u - \frac{1}{a} \left(b - \log \frac{H}{2} \right),$$

e v in

$$v + \frac{c}{a}.$$

Ed avremo

$$\lambda \nu = \frac{1}{2} H e^{au}, \quad \omega = -av.$$

Perciò, coll'uso della (3), si otterrà

$$K = \frac{H^2}{4} \left(1 - \frac{e^{2au}}{\lambda^4} \right).$$

Ma allora, a causa della (1), il coefficiente λ dovrà soddisfare all'equazione differenziale

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du^2} + \frac{H^2}{4} \left(\lambda^2 - \frac{e^{2au}}{\lambda^2} \right) = 0.$$

La quale, ponendo

$$\lambda^2 = e^{au+y},$$

*) E s'intende, neppure una superficie di rotazione: cioè un elicoidale col passo uguale a zero.

**) Cfr. la mia Nota: *Sopra una classe di superficie*.

***) Altrimenti si avrebbe $\omega = \text{cost.}$, e la superficie sarebbe elicoidale.

diventa

$$\frac{d^2 y}{d u^2} + H^2 e^{au} \sinh y = 0,$$

dove $\sinh$ è simbolo di funzione iperbolica.

Quest'ultima equazione differenziale può ancora trasformarsi, ponendo

$$H^2 e^{au} = a^2 e^{u_1},$$

con u_1 nuovo parametro delle deformate dei paralleli. Ed avremo così l'equazione

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{d u_1^2} + e^{u_1} \sinh y = 0.$$

Infine, dopo aver posto

$$av = v_1,$$

con v_1 nuovo parametro delle deformate dei meridiani, potremo concludere:

Il quadrato dell'elemento lineare di ogni superficie a curvatura media costante H (non nulla), applicabile sopra una superficie di rotazione, può sempre ridursi alla forma

$$(5) \quad ds^2 = \frac{1}{H^2} e^{u_1 + y} (du_1^2 + dv_1^2),$$

dove u_1 e v_1 sono, rispettivamente, i parametri isometrici delle deformate dei paralleli e dei meridiani, ed y è un integrale dell'equazione (4).

Inoltre le espressioni dei coefficienti D , D' , D'' della seconda forma fondamentale della superficie saranno

$$(6) \quad D = -\frac{1}{2H} e^{u_1} (e^y - \cos v_1), \quad D' = -\frac{1}{2H} e^{u_1} \sin v_1, \quad D'' = -\frac{1}{2H} e^{u_1} (e^y + \cos v_1).$$

Reciprocamente, se y è un integrale dell'equazione (4), la (5) e le (6) individueranno, a meno di movimenti nello spazio, una superficie a curvatura media costante H , applicabile sopra una superficie di rotazione *).

Le espressioni dei suoi due raggi principali di curvatura saranno poi date dalle formule

$$\frac{1}{r_1} = \frac{H}{2} (1 - e^{-y}), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{H}{2} (1 + e^{-y}).$$

Notiamo infine che l'angolo ω , che figura nella (2), rappresenta il doppio dell'angolo che un sistema di linee di curvatura della superficie W formano colle $v = \text{cost.}$,

*) Nella mia Nota *Sulle superficie a curvatura media costante*, come equazione da cui dipende la determinazione di tutte quelle, non elicoidali, che sono applicabili sopra una superficie di rotazione, detti l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + e^{2x} \sinh y = 0,$$

a cui evidentemente può ridursi la (4), facendo in essa

$$x = \frac{1}{2} u_1 + \log 2.$$

cioè colle deformate dei meridiani. E poichè, nel caso in cui H sia costante (ed anche se fosse $H = 0$), esso è risultato uguale ad una funzione (lineare) della sola variabile v , concludiamo:

In ogni superficie a curvatura media costante (nulla o non) applicabile sopra una superficie di rotazione, le deformate dei meridiani risultano traiettorie sotto angolo costante dei due sistemi di linee di curvatura.

*
* *

Circa poi le rimanenti superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione, abbiamo il seguente risultato *).

Oltre le superficie elicoidali od a curvatura totale costante, e la classe speciale di superficie a curvatura media costante trovata innanzi, nonchè l'altra ben nota di superficie ad area minima, le uniche superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione sono quelle i cui raggi principali di curvatura possono esprimersi mediante le formule

$$(7) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{k}(\theta + \theta' \sin u), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{k}(\theta - \theta' \sin u),$$

dove θ è una funzione della variabile u (e θ' ne è la derivata) che soddisfa all'equazione differenziale del 3° ordine

$$(8) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 \log \theta'}{du^2} + \theta' = \frac{1}{\sin^2 u} \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta'} \right).$$

Mentre il quadrato dell'elemento lineare di tali superficie è riducibile alla forma

$$(9) \quad ds^2 = \frac{k^2}{\theta' \sin^2 u} (du^2 + dv^2),$$

essendo $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ le deformate dei paralleli e dei meridiani della superficie, e k una costante arbitraria, differente da zero.

Inoltre l'angolo $\frac{1}{2}\omega$, sotto cui un sistema di linee di curvatura della superficie taglia le $v = \text{cost.}$, è dato dalla formula

$$(10) \quad \tan \frac{1}{2}\omega = \cot \frac{1}{2}u \tanh \frac{1}{2}v.$$

Ed ora osservando che, per ogni superficie di elemento lineare

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

si ha evidentemente

$$\frac{2D}{\lambda^2} = -H + \sqrt{H^2 - 4K} \cos \omega,$$

$$\frac{2D'}{\lambda^2} = \sqrt{H^2 - 4K} \sin \omega,$$

$$\frac{2D''}{\lambda^2} = -H - \sqrt{H^2 - 4K} \cos \omega,$$

*) Cfr. la mia Nota: *Sopra una classe di superficie.*

e che nel caso presente risulta

$$\lambda^2 = \frac{k^2}{\theta' \sin^2 u}, \quad H = \frac{2}{k} \theta, \quad \sqrt{H^2 - 4K} = \frac{2}{k} \theta' \sin u$$

$$\sin \omega = \frac{2p}{1+p^2}, \quad \cos \omega = \frac{1-p^2}{1+p^2}, \quad \text{con } p = \cot \frac{1}{2} u \tanh \frac{1}{2} v,$$

ne seguiranno subito le formole

$$(11) \quad \begin{cases} D = \frac{k}{\sin u} \left(-\frac{\theta}{\theta' \sin u} + \frac{1-p^2}{1+p^2} \right), \\ D' = \frac{k}{\sin u} \cdot \frac{2p}{1+p^2}, \\ D'' = \frac{k}{\sin u} \left(-\frac{\theta}{\theta' \sin u} - \frac{1-p^2}{1+p^2} \right). \end{cases}$$

Le uguaglianze (11), insieme alla (9), servono dunque a determinare intrinsecamente tutte le rimanenti superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione; quando per θ si pongano in esse formole tutti i possibili integrali dell'equazione differenziale (8).

Osserviamo ora che, in queste superficie, l'angolo $\frac{1}{2}\omega$, a causa della relazione (10), dipende simultaneamente dalle variabili u e v ; epperò:

Le uniche superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione, per le quali le deformate dei meridiani risultino traiettorie sotto angolo costante dei sistemi di linee di curvatura, sono quelle che hanno costante la curvatura media (e sia poi essa nulla o non).

Ogni integrale dell'equazione (8), a causa della costante arbitraria k che figura nella (9) e nelle (11), ci dà dunque un'infinità di superficie W applicabili sopra una superficie di rotazione *), ed aventi i raggi principali di curvatura legati dalla relazione che si otterrebbe eliminando il parametro u fra le due equazioni (7). La natura di questa relazione dipenderà quindi dalla scelta che faremo per l'integrale della (8). E fra i due raggi principali di curvatura di qualsivoglia superficie applicabile sopra una di rotazione (supposto di riferirci a superficie non elicoidali, nè che abbiamo costante la curvatura totale o media) non sarà possibile — se pure esiste — che una dalle infinite relazioni che possono ottenersi nel modo predetto.

Ora, stabilita a priori una certa relazione fra i raggi principali di curvatura, ci pos-

*) Si aggiunga però che la funzione θ , integrale dell'equazione differenziale (8), deve esser tale che la sua derivata non risulti sempre negativa, per valori reali della variabile u (cioè deve avere derivata positiva almeno per u compreso fra certi limiti). Altrimenti le corrispondenti superficie non sarebbero reali.

Così, ad esempio, un integrale particolare della (8) è evidentemente

$$\theta = \frac{1}{u};$$

ma ad esso non corrispondono superficie reali.

siamo proporre di determinare, fra le infinite superficie per cui detta relazione rimane soddisfatta *), quelle non elicoidali che siano applicabili sopra una superficie di rotazione.

A tale scopo, si osservi che, se con ρ_1 e ρ_2 indichiamo le inverse dei due raggi principali di curvatura di una qualunque delle superficie richieste (nell'ipotesi — beninteso — che esistano), il sistema di equazioni (7) equivarrà all'altro

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2}{k} \theta, \quad \rho_1 - \rho_2 = \frac{2}{k} \theta' \sin u.$$

Od anche

$$(12) \quad \theta = \frac{k}{2} (\rho_1 + \rho_2), \quad \frac{d}{du} (\rho_1 + \rho_2) = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\sin u}.$$

Per conseguenza, se la relazione prestabilita fra i due raggi principali di curvatura **) è della forma

$$(13) \quad \rho_2 = f(\rho_1),$$

si ricaverà

$$(14) \quad \int \frac{1 + f'(\rho_1)}{\rho_1 - f(\rho_1)} d\rho_1 = \log \tan \frac{1}{2} u + C,$$

con C costante arbitraria.

In tal modo resterà fissata dapprima l'espressione di ρ_1 , e poi — per mezzo della (13) — anche quella di ρ_2 , in funzione del parametro u ; e dette espressioni conterranno la costante arbitraria C .

Ma l'equazione (8), tenendo conto delle (12), può essere sostituita dall'altra

$$\frac{d^2 \log (\rho_1 - \rho_2)}{du^2} - \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{4k\rho_1\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2) \sin u}.$$

Od anche

$$(15) \quad \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{4KH'} \cdot \frac{d^2 \log (\rho_1 - \rho_2)}{du^2} - \frac{H'}{4K} = k,$$

essendo H' la derivata rispetto ad u della curvatura media H .

Dunque le espressioni di ρ_1 e ρ_2 ottenute precedentemente dovranno soddisfare a questa uguaglianza; cioè dovranno ridurre il primo membro della (15) ad una costante (diversa da zero). Se ciò effettivamente accade, la funzione

$$\theta = \frac{k}{2} (\rho_1 + \rho_2),$$

dove k indica allora il primo membro della (15), rappresenterà quell'integrale dell'equazione (8) a cui corrispondono le superficie, non elicoidali, applicabili sopra una su-

*) Esse — come è noto — sempre esistono, e la loro effettiva determinazione dipende dall'integrazione di un'equazione a derivate parziali del 2° ordine (veggasi per es.: DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*; Parte III, pag. 318).

**) S'intende che escludiamo il caso in cui si uguagli ad una costante la curvatura totale o media, e quindi anche che si ponga $\rho_2 = \rho_1$; perchè allora la superficie sarebbe necessariamente una sfera.

perficie di rotazione, che hanno i raggi principali di curvatura legati dalla relazione (13). Esse risultano determinate intrinsecamente mediante la (9) e le (11); e sono in numero infinito, a causa della costante arbitraria C che figura nell'espressione del suddetto integrale (ed anche in quella di k).

Quando invece il primo membro della (15), pei valori di ρ_1 e ρ_2 ricavati dalla (14) e dalla (13), non si riducesse ad una costante, ciò significherebbe che non è possibile, per nessun valore di k , far coesistere colla (13) le due equazioni (7) insieme alla (8); e quindi concluderemmo che, fra le infinite superficie aventi i raggi principali di curvatura legati dalla relazione (13), non ne esistono — eccetto il caso che siano elicoidi — di quelle applicabili sopra una superficie di rotazione.

Per esempio, nel caso delle superficie canali, la (13) è

$$\rho_2 = c,$$

con c quantità costante. Epperò dalla (14) si ricava

$$\rho_1 = c + C \operatorname{tang} \frac{1}{2} u.$$

Quindi:

$$\rho_1 - \rho_2 = C \operatorname{tang} \frac{1}{2} u, \quad H' = \frac{C}{2 \cos^2 \frac{1}{2} u}, \quad K = c \left(c + C \operatorname{tang} \frac{1}{2} u \right).$$

Per conseguenza, il primo membro della (15) diventa

$$-\frac{C}{4c(c + C \operatorname{tang} \frac{1}{2} u)}.$$

Ed esso non si riduce mai ad una costante diversa da zero. Dunque:

*Le superficie canali applicabili sopra una superficie di rotazione sono necessariamente degli elicoidi (il toro e il cilindro di rotazione compresi) *).*

Genova, settembre 1905.

MINEO CHINI.

*) Naturalmente, per talune classi di superficie, si potrà giungere alla conclusione in modo più spiccio. Così, ad esempio, è noto — per averlo dimostrato il BELTRAMI e il DINI — che le uniche superficie rigate (reali e non sviluppabili), aventi i raggi principali di curvatura funzioni l'uno dell'altro, sono necessariamente degli elicoidi (fra cui si deve anche includere l'iperboloide di rivoluzione ad una falda). Quindi:

Non esistono superficie W rigate, che siano applicabili sopra una superficie di rotazione, all'infuori degli elicoidi rigati.