Sulla trasformazione delle equazioni lineari, omogenee, a derivate parziali, con coefficienti costanti.

(Di CARLO SOMIGLIANA, a Pavia.)

Le regole ordinarie del calcolo differenziale danno il modo di trovare in generale la trasformata di una equazione lineare, omogenea, a derivate parziali, con coefficienti costanti, quando alle variabili indipendenti si sostituiscono nuove variabili, legate alle prime da relazioni qualsivogliano, e danno per la trasformata una nuova equazione lineare, in generale non più omogenea, nè a coefficienti costanti. Questi procedimenti però sono soggetti a due inconvenienti; in primo luogo conducono, specialmente per le equazioni di ordine elevato, a calcoli assai laboriosi, ed in secondo luogo lasciano completamente nell'ombra le relazioni, che pure devono esistere fra i coefficienti dell'equazione trasformata, poichè questa non è generale, ma gode evidentemente delle proprietà di essere, mediante la trasformazione inversa, ridotta omogenea, a coefficienti costanti. Tali relazioni poi sono di grande importanza, quando si tratta della integrazione delle equazioni; difatti, per citare un esempio notissimo, si sa come la forma concisa che si può dare alla trasformata della equazione di LAPLACE, in forza appunto di queste relazioni, permetta in molti casi di assegnarne degli integrali particolari con grandissima facilità.

La trasformazione della equazione di LAPLACE, o più in generale delle equazioni lineari, omogenee, a derivate parziali, del 2.^o ordine, con coefficienti costanti è stata oggetto di molte ricerche. Basti citare CAUCHY, LAMÉ e JACOBI fra i primi che si occuparono della questione; e, dei moderni, BRIOSCHI (*)

(*) *Teorica dei determinanti*, § 10. Pavia, 1854.

Annali di Matematica, tomo XVIII.

e specialmente BELTRAMI (*), che portò alla sua attuale generalità la teoria dei parametri differenziali, la quale comprende, come caso speciale, quella della trasformazione. È notissimo quale sia il risultato di queste ricerche, cioè che la trasformazione della equazione si può ridurre a quella di una forma differenziale quadratica, evitando così il calcolo diretto delle derivate di 2.° ordine delle variabili di un sistema rispetto a quelle dell'altro.

Ora rispetto alle equazioni di ordine superiore al secondo, per quanto so, non sono state stabilite ricerche analoghe a quelle ora ricordate, nè si è cercato se i risultati ottenuti per quelle di 2.° ordine si potessero estendere ad equazioni di ordine superiore, quantunque queste, come la equazione di LAPLACE, sebbene più raramente, si presentino in diversi problemi di fisica matematica. È questa appunto la questione, che mi sono proposto di trattare, e di cui, come si vedrà, mi pare di aver dato in via generale la soluzione.

Il problema della trasformazione si connette essenzialmente con un altro pure assai interessante: la determinazione di quelle espressioni invariabili rispetto ad una forma differenziale, che, estendendo la denominazione introdotta dapprima da LAMÉ, si possono chiamare *parametri differenziali*, anche quando la forma differenziale è di ordine superiore al secondo.

Nell'ultimo paragrafo di questo lavoro, generalizzando un teorema di CHRISTOFFEL, sul quale si può dire fondato un metodo elegantissimo dovuto al prof. RICCI per costruire i parametri differenziali delle forme quadratiche (**), ho ridotto la ricerca dei parametri delle forme di grado qualunque a quella degli invarianti algebrici simultanei di certi sistemi di forme differenziali, analogamente a quanto il prof. RICCI ha fatto per le forme quadratiche. Il problema algebrico essendo di gran lunga più semplice, e potendo in generale essere risoluto, ne viene che nello stesso modo anche la formazione dei parametri delle forme differenziali di grado qualsiasi potrà considerarsi, entro certi limiti, come un problema risoluto. Come applicazione del metodo generale ho trovato la espressione effettiva, per le forme del 4.° grado, di un gruppo di parametri che si presentano in certo modo come i corrispondenti di quelli noti delle forme quadratiche.

(*) *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1869.

(**) RICCI, *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali* (Annali di Mat., S. 2.^a, T. 14). — *Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1887).

§ 1. Principio di Jacobi.

Il metodo più semplice ed elegante che si conosca per la trasformazione dell'equazione di LAPLACE è quello che è stato dato da JACOBI nella Memoria: *Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (Crelle, Bd. 36, G. W., Bd. 2) e che è fondato sopra un principio di trasformazione che egli deduce dal calcolo delle variazioni. Questo principio non è esclusivamente applicabile alle equazioni di 2.^o ordine, ma possiede una assai maggiore generalità. Noi, traducendo in formule l'enunciato di JACOBI, possiamo esprimerlo nel seguente modo.

Si abbia una espressione F formata in modo qualunque con una funzione U di n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ e colle sue derivate parziali fino a quelle di un certo ordine; costruiamo l'espressione:

$$G = \frac{\partial F}{\partial U} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)} \right) + \sum_{is} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_s} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_s} \right)} \right) - \dots$$

e supponiamo che della F si conosca la trasformata Φ in un certo sistema di variabili $y_1, y_2, \dots, y_n$, che sarà una funzione di U e delle sue derivate parziali rispetto alle $y_1, y_2, \dots, y_n$. Se ora si pone:

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial U} - \frac{1}{\Delta} \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} \right)} \right) + \frac{1}{\Delta} \sum_{is} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_s} \left(\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_s} \right)} \right) - \dots$$

ove Δ rappresenta il determinante funzionale:

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)},$$

Γ è la trasformata della G , ossia si ha identicamente:

$$G = \Gamma, \quad (1)$$

in virtù delle formule che legano le x alle y .

La eguaglianza precedente si dimostra assai facilmente coi principii del calcolo delle variazioni. Difatti, fissato un campo finito di integrazione nello spazio ad n dimensioni delle variabili x , per la formula di trasformazione

degli integrali multipli si ha:

$$\int^{(n)} F dx_1 \dots dx_n = \int^{(n)} \Phi \Delta dy_1 \dots dy_n,$$

ove il primo integrale è esteso al campo fissato, ed il secondo al campo corrispondente nello spazio delle variabili y . Se ora calcoliamo le variazioni di questi due integrali quando U diviene $U + \partial U$, e riduciamo coi procedimenti soliti le espressioni sotto i segni d'integrazione ad essere funzioni lineari di ∂U , troviamo, poichè le variazioni al contorno del campo sono indipendenti da quelle all'interno,

$$\int^{(n)} \partial U G dx_1 \dots dx_n = \int^{(n)} \partial U \Delta \Gamma dy_1 \dots dy_n.$$

Da questa equazione osservando che nel primo integrale, se si mutano le variabili x nelle y , l'elemento $dx_1 \dots dx_n$ si muta in $\Delta dy_1 \dots dy_n$, e che il campo d'integrazione è arbitrario, si ottiene subito la (1), ammessa naturalmente la continuità delle espressioni G , Γ .

È questa la dimostrazione di JACOBI. Se per F prendiamo la espressione:

$$F = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} = \Delta_1 [U, V],$$

ove U , V sono due funzioni arbitrarie, e le a_{ih} sono costanti, la sua trasformata sarà:

$$\Phi = \sum_{ih} b_{ih} \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial V}{\partial y_h},$$

ove le b_{ih} sono funzioni delle y , e troviamo:

$$G = - \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_h} = - \Delta_2 [U],$$

considerando F , Φ come dipendenti dalla V ; e quindi:

$$\Gamma = - \frac{1}{\Delta} \sum_{ih} \frac{\partial}{\partial y_h} \left(\Delta b_{ih} \frac{\partial U}{\partial y_i} \right). \quad (2)$$

Le formule di trasformazione delle $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, $\frac{\partial V}{\partial x_h}$ nelle $\frac{\partial U}{\partial y_i}$, $\frac{\partial V}{\partial y_h}$ sono lineari, quindi la espressione $\Delta_1 [U, V]$ considerata come forma bilineare di questi due sistemi di variabili ammette come invariante il discriminante:

$$a = \sum \pm a_{11} \dots a_{nn},$$

rispetto alle trasformazioni lineari il cui modulo è il determinante funzionale:

$$\nabla = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)};$$

indicando con b il discriminante della forma trasformata:

$$b = \sum \pm b_{11} \dots b_{nn},$$

avremo quindi, poichè il discriminante è d'indice 2,

$$b = \nabla^2 a,$$

ossia:

$$\frac{1}{\Delta} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Sostituendo questo valore di Δ nella (2) il secondo membro viene ad essere formato unicamente colle b_{ih} , le loro derivate prime e le derivate della U . La trasformazione della espressione $\Delta_2[U]$ richiede quindi unicamente la conoscenza dei coefficienti b_{ih} .

Ciò posto, la maggiore generalità del principio di JACOBI, a cui abbiamo accennato, fa subito pensare se, mediante di esso, non sia possibile in generale ridurre la trasformazione delle espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine qualunque ν :

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\nu U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\nu}},$$

alla trasformazione delle espressioni del 1.° ordine:

$$\Delta_1[U_1, U_2, \dots, U_\nu] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}},$$

come avviene nel caso di $\nu = 2$.

Ora è facile persuadersi che questa riduzione mediante il principio di JACOBI non è possibile appena si oltrepassano le espressioni del 2.° ordine; soltanto si può ridurre la trasformazione a quella di certe espressioni di ordine inferiore a ν , ma maggiore di 1, come ora vedremo. Intanto una delle ragioni che rendono impossibile la riduzione accennata sta nel fatto che ad espressioni come la $\Delta_1[U_1, U_2, \dots, U_n]$ il principio di JACOBI non può essere applicato due volte. Se infatti prendiamo per F questa espressione e la consideriamo come dipendente dalla funzione U_1 , per la G corrispondente, che possiamo indicare con G_1 , troviamo:

$$G_1 = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}} \right),$$

per cui il principio di JACOBI ci insegna a trasformare G_1 ; ma se ora prendiamo per F la G_1 , e la consideriamo come dipendente da U_2 , osservando che si può scrivere:

$$G_1 = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \left\{ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \frac{\partial U_3}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}} + \frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}} \right) \right\},$$

troviamo per la G corrispondente:

$$G_2 = - \sum_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial G_1}{\partial \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \right)} + \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \frac{\partial G_1}{\partial \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \right)} = 0,$$

quindi è zero anche la Γ corrispondente.

Vediamo ora quali sono invece le riduzioni che il principio di JACOBI permette di fare. La espressione $\Delta_\nu[U]$ può essere scritta:

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \frac{\partial^\lambda}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\lambda}} \sum_{i_{\lambda+1} \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^{\nu-\lambda} U}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_\nu}},$$

e questa espressione può considerarsi come la G corrispondente alla F definita da:

$$F = (-1)^\lambda \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\lambda V}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\lambda}} \frac{\partial^{\nu-\lambda} U}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_\nu}},$$

e considerata come dipendente da V . Quindi se ν è pari possiamo prendere:

$$\lambda = \nu - \lambda = \frac{\nu}{2},$$

e se ν è dispari:

$$\lambda = \frac{\nu+1}{2} \quad \nu - \lambda = \frac{\nu-1}{2}.$$

Nel primo caso la trasformazione si riduce a quella di una espressione di ordine $\frac{\nu}{2}$, nel secondo di ordine $\frac{\nu+1}{2}$. In ogni caso poi potremo sempre prendere per λ uno qualunque dei valori 1, 2, ..., $\nu-1$.

Visto adunque che il principio di JACOBI non basta per eseguire la riduzione indicata, cerchiamo per altra via di decidere se tale riduzione non sia effettivamente possibile in modo assoluto, oppure se la difficoltà incontrata si debba al metodo, che abbiamo seguito. Osserviamo che nella trasformata (2) della espressione $\Delta_\nu[U]$ fra i coefficienti delle derivate del 1.º ordine e quelli delle derivate del 2.º esistono delle relazioni, per cui i primi si possono espri-

mere in funzione dei secondi, e che la stessa riduzione alla forma (2) si potrebbe ottenere qualora si trovassero per altra via le relazioni che esistono fra le due serie di coefficienti. Noi ci proporremo quindi la ricerca diretta delle relazioni fra i coefficienti di una equazione lineare che sia la trasformata di una equazione lineare, omogenea, a coefficienti costanti. Alcune di queste relazioni intanto ci sono fornite dalle riduzioni che si deducono dal principio di JACOBI; noi però col metodo, che ora indicheremo, arriveremo a trovare anche queste relazioni indipendentemente dal principio stesso.

§ 2. Proprietà delle funzioni $H_{qr,p}$, $K_{qr,p}$.

Prima di indicare il metodo generale che seguiremo per eseguire la trasformazione, tenendo conto delle relazioni fra i coefficienti, è necessario stabilire alcune proprietà di certe espressioni, che ora definiremo e che godono di una importanza notevolissima in tutta la teoria della trasformazione.

Dalle formule ordinarie per il cambiamento delle variabili indipendenti si ha:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} &= \varepsilon_{pq} & (p, q = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} + \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} &= 0 & (p, q, r = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove ε_{pq} è zero quando p è differente da q , ed 1 quando $p = q$. Altre formule analoghe alle precedenti si hanno scambiando le x colle y . Noi potremo ora porre:

$$H_{qr,p} = \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} = - \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial y_p}{\partial x_i},$$

e derivando queste due espressioni equivalenti di $H_{qr,p}$ troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{qr,p}}{\partial y_s} &= \sum_{ihl} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} \frac{\partial x_l}{\partial y_s} + \\ &\quad + \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_s} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} + \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial^2 x_h}{\partial y_r \partial y_s} \right) \\ \frac{\partial H_{qr,p}}{\partial y_s} &= - \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r \partial y_s} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} - \sum_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_s}. \end{aligned}$$

Noi porremo:

$$H_{qrs,p} = \sum_{ihl} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} \frac{\partial x_l}{\partial y_s}$$

$$K_{qrs,p} = \sum_i \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_q \partial y_r \partial y_s} \frac{\partial y_p}{\partial x_i},$$

e poichè si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_s} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} &= \sum_{ihj} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_q \partial y_s} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \\ &= - \sum_k H_{rk,p} H_{qs,k} \\ \sum_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_s} &= \sum_{ihj} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_s} \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \\ &= - \sum_k H_{sk,p} H_{qr,k}, \end{aligned}$$

troviamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{qr,p}}{\partial y_s} &= H_{qrs,p} - \sum_k (H_{rk,p} H_{qs,k} + H_{qk,p} H_{rs,k}) \\ \frac{\partial K_{qr,p}}{\partial y_s} &= K_{qrs,p} - \sum_k K_{sk,p} K_{qr,k} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ove, per simmetria, abbiamo introdotto anche il simbolo:

$$K_{qr,p} = \sum_i \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial y_p}{\partial x_i}.$$

Da queste relazioni si ricava la seguente:

$$-K_{qrs,p} = H_{qrs,p} - \sum_k (H_{qk,p} H_{rs,k} + H_{rk,p} H_{sq,k} + H_{sk,p} H_{qr,k}),$$

la quale non è altro che quella che risulta dalla seconda delle (3) derivando rispetto ad y_s .

Dalle (4) si possono ricavare le $H_{qrs,p}$, $K_{qrs,p}$ in funzione delle $H_{qr,p}$ e delle loro derivate prime; questa proprietà non è che un caso particolare di una assai più generale. Poniamo infatti:

$$H_{q_1 q_2 \dots q_\mu, p} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\mu} \frac{\partial^\mu y_p}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\mu}} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{q_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_{q_2}} \dots \frac{\partial x_{i_\mu}}{\partial y_{q_\mu}},$$

e deriviamo rispetto ad $y_{q_{\mu+1}}$. Con un artificio analogo a quello che ci ha

servito a stabilire le (4) troviamo subito:

$$\left. \begin{aligned} H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu+1}, p} &= \frac{\partial H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p}}{\partial y_{q_{\mu+1}}} + \\ &+ \sum_k (H_{q_1 q_{\mu+1}, p} H_{q_2 q_3 \dots q_{\mu}, k, p} + \dots + H_{q_{\mu} q_{\mu+1}, p} H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu-1}, k, p}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Questa formula dimostra che, se $H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p}$ è esprimibile in funzione delle $H_{qr, p}$ e delle loro derivate, anche $H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu+1}, p}$ gode della stessa proprietà; da ciò, e dalla prima delle (4), segue che tutte le $H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p}$ con qualsiasi numero di indici sono funzioni razionali intere delle $H_{qr, p}$ e delle loro derivate rispetto alle y .

Il primo membro della (5) è simmetrico rispetto ai $\mu + 1$ indici $q_1, q_2, \dots, q_{\mu+1}$, non così il secondo; questa formula ci dà quindi $\mu + 1$ espressioni equivalenti di $H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu+1}, p}$.

Similmente se si pone:

$$K_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p} = \sum_i \frac{\partial^{\mu} x_i}{\partial y_{q_1} \partial y_{q_2} \dots \partial y_{q_{\mu}}} \frac{\partial y_p}{\partial x_i},$$

si trova:

$$K_{q_1 q_2 \dots q_{\mu+1}, p} = \frac{\partial K_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p}}{\partial y_{q_{\mu+1}}} + \sum_k K_{q_{\mu+1}, k, p} K_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, k}. \quad (5')$$

Questa formula, insieme alla seconda delle (4), dimostra per le $K_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p}$ una proprietà analoga a quella dimostrata per le $H_{q_1 q_2 \dots q_{\mu}, p}$.

Queste proprietà sono importanti nella teoria della trasformazione, poichè da esse risulta che una volta calcolate le $H_{qr, p}$ in funzione delle nuove variabili indipendenti, tutte le altre quantità H e K con un numero qualsiasi di indici, si potranno avere dalle prime senza ricorrere alle formule, che legano le antiche variabili alle nuove.

Indicando ancora con Δ il determinante funzionale delle x rispetto alle y , come nel § 1, si ha:

$$\frac{\partial y_h}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_h} \right)},$$

e quindi:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_s} = \sum_{ih} \frac{\partial \Delta}{\partial \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_h} \right)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_s} = \Delta \sum_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_s} \frac{\partial y_h}{\partial x_i},$$

Ora osserviamo che, ricorrendo al solito artificio, possiamo scrivere nel secondo membro della (10) al posto di

$$a_{i_1 i_2 \dots i_r} \frac{\partial^r y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}},$$

l'espressione:

$$\sum_{j_1 \dots j_\lambda} a_{j_1 \dots j_\lambda i_{\lambda+1} \dots i_r} \frac{\partial^r y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} \sum_{h_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{h_1}} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \sum_{h_\lambda} \frac{\partial x_{i_\lambda}}{\partial y_{h_\lambda}} \frac{\partial y_{h_\lambda}}{\partial x_{j_\lambda}},$$

e quel secondo membro diverrà:

$$\sum_{j_1 \dots j_\lambda} \sum_{h_1 \dots h_\lambda} H_{h_1 \dots h_\lambda, l_1} \sum_{i_{\lambda+1} \dots i_r} a_{j_1 \dots j_\lambda i_{\lambda+1} \dots i_r} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial y_{h_\lambda}}{\partial x_{j_\lambda}} \cdot \frac{\partial^r y_{l_1}}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_{\lambda+r-\lambda}}}$$

Eseguendo una riduzione analoga rispetto a tutte le altre derivate di ordine $\mu, \dots, \rho, \sigma$ troveremo al fine per la $\Delta[y_{l_1} | y_{l_2} | \dots | y_{l_r}]$ la espressione:

$$\sum_{h_1 \dots h_\lambda} \sum_{k_1 \dots k_\mu} \dots \sum_{t_1 \dots t_\sigma} H_{h_1 \dots h_\lambda, l_1} H_{k_1 \dots k_\mu, l_2} \dots H_{t_1 \dots t_\sigma, l_r} b_{h_1 \dots h_\lambda, k_1 \dots k_\mu, t_1 \dots t_\sigma} \quad (10')$$

Quindi, ricordando la proprietà dimostrata nel paragrafo precedente per le funzioni $H_{q_1 \dots q_\mu, p}$, possiamo enunciare il seguente teorema:

I coefficienti $b_{l_1 \dots l_r}$ della trasformata della espressione (7) sono funzioni lineari delle $b_{l_1 \dots l_r}$ a ν indici, cioè dei coefficienti delle derivate di ordine ν , e di certe espressioni razionali intere delle $H_{qr, p}$ e delle loro derivate rispetto alle y .

Da ciò segue, che se noi potremo esprimere le $H_{qr, p}$ in funzione delle $b_{l_1 \dots l_r}$, tutti i coefficienti della (8) si potranno esprimere in funzione unicamente di queste quantità, e delle loro derivate; ossia dei coefficienti (9) basterà conoscere, in funzione delle y , quelli dati dalla prima eguaglianza per poterne dedurre tutti i rimanenti.

Ora i coefficienti $b_{l_1 \dots l_r}$ sono anche quelli della trasformata di:

$$\Delta_1[U_1, \dots, U_r] = \sum_{i_1 \dots i_r} a_{i_1 \dots i_r} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial U_r}{\partial x_{i_r}},$$

sicchè la quistione, che ci siamo proposti al § 1, è ora ridotta a vedere se le funzioni $H_{qr, p}$ possono essere espresse mediante i coefficienti $b_{l_1 \dots l_r}$ e le loro derivate.

Ora osserviamo che derivando la prima delle (9) ed introducendo col l'artificio solito le $H_{qr, p}$ si trova:

$$\frac{\partial b_{l_1 l_2 \dots l_r}}{\partial y_l} = \sum_h (H_{h l_1 l_1} b_{h l_2 \dots l_r} + \dots + H_{h l_1 l_r} b_{l_1 l_2 \dots l_{r-1} h}). \quad (11)$$

Queste identità sono in numero di

$$M = n \cdot \frac{n(n+1) \cdots (n+v-1)}{1 \cdot 2 \cdots v},$$

quindi da esse, in generale, si potranno ricavare le

$$N = n \cdot \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2},$$

quantità $H_{qr,p}$, che vi compariscono linearmente, in funzione delle $b_{l_1 l_2 \dots l_v}$ e delle loro derivate prime.

Possiamo quindi dire: *la riduzione della trasformazione della $\Delta_v[U]$ a quella della $\Delta_1[U_1, \dots, U_v]$ è effettuabile, compatibilmente colla possibilità di risolvere le equazioni lineari (11) rispetto alle $H_{qr,p}$.*

Nella maggior parte dei casi però, invece delle (11), si possono considerare altre equazioni, la cui risoluzione è assai più semplice, poichè da esse si possono dedurre dei gruppi di n equazioni, ciascuno dei quali contiene linearmente soltanto n delle $H_{qr,p}$; la determinazione di queste funzioni si riduce quindi alla risoluzione successiva di questi sistemi di n equazioni soltanto. Ciò avviene tutte le volte che la espressione $\Delta_1[U_1, \dots, U_v]$ può essere considerata come un invariante assoluto di una forma differenziale di un grado qualsiasi ρ , maggiore di 1. Sia infatti:

$$\varphi = \sum_{r_1 r_2 \dots r_\rho} \alpha_{r_1 r_2 \dots r_\rho} dx_{r_1} dx_{r_2} \dots dx_{r_\rho},$$

questa forma, ove le α sono funzioni delle a . Sostituendo alle variabili x le y , essa diverrà:

$$\varphi = \sum_{s_1 s_2 \dots s_\rho} \beta_{s_1 s_2 \dots s_\rho} dy_{s_1} dy_{s_2} \dots dy_{s_\rho},$$

e, per ipotesi, le β saranno formate colle b in modo identico a quello con cui le α sono formate colle a . Avremo poi:

$$\beta_{s_1 s_2 \dots s_\rho} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_\rho} \alpha_{r_1 r_2 \dots r_\rho} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{s_1}} \cdots \frac{\partial x_{r_\rho}}{\partial y_{s_\rho}}.$$

Derivando rispetto ad y_s troviamo:

$$\frac{\partial \beta_{s_1 s_2 \dots s_\rho}}{\partial y_s} = \sum_k (K_{ss_1, k} \beta_{ks_2 \dots s_\rho} + \cdots + K_{ss_\rho, k} \beta_{s_1 s_2 \dots s_{\rho-1} k}), \quad (11')$$

equazioni che sono analoghe alle (11). Noi porremo, per semplicità,

$$\sum_k K_{ss_i, k} \beta_{s_1 \dots s_{i-1} k s_{i+1} \dots s_\rho} = (s s_i) [s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_\rho],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ts_1 \dots s_\rho}}{\partial y_{s_1}} &= (t s_1) [s_2 \dots s_\rho] + (s_2 s_1) [t s_3 \dots s_\rho] + \dots + (s_\rho s_1) [t s_2 \dots s_{\rho-1}] \\ \frac{\partial \beta_{s_1 t s_3 \dots s_\rho}}{\partial y_{s_2}} &= (s_1 s_2) [t s_3 \dots s_\rho] + (t s_2) [s_1 s_3 \dots s_\rho] + \dots + (s_\rho s_2) [s_1 t s_3 \dots s_{\rho-1}] \\ &\vdots \\ \frac{\partial \beta_{s_1 \dots s_{\rho-1} t}}{\partial y_{s_\rho}} &= (s_1 s_\rho) [s_2 \dots s_{\rho-1} t] + (s_2 s_\rho) [s_1 s_3 \dots s_{\rho-1} t] + \dots + (t s_\rho) [s_1 \dots s_{\rho-1}] \\ \frac{\partial \beta_{s_1 s_2 \dots s_\rho}}{\partial y_t} &= (s_1 t) [s_2 \dots s_\rho] + (s_2 t) [s_1 s_3 \dots s_\rho] + \dots + (s_\rho t) [s_1 \dots s_{\rho-1}]; \end{aligned}$$
$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_{ts_2 \dots s_p}}{\partial y_{s_1}} + \dots + \frac{\partial \beta_{s_1, \dots, s_{p-1} t}}{\partial y_{s_p}} - \frac{\partial \beta_{s_1 \dots s_p}}{\partial y_t} \right) = \beta_{s_1 \dots s_p, t}, \quad (12)$$
$$\beta_{s_1 \dots s_\rho, t} = \sum_{(ih)} (s_i s_h) [t s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_{h-1} s_{h+1} \dots s_\rho], \quad (13)$$

Delle (13) possiamo servirci per ricavare le $H_{qr,p}$; difatti facciamo dapprima $s_1 = s_2 = \dots = s_\rho = s$ e sostituiamo alle parentesi del secondo membro le loro espressioni effettive. Avremo:

$$\beta_{ss \dots s, t} = -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sum_k H_{ss, k} \beta_{kts \dots s}.$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11s} \dots s & \beta_{12s} \dots s \dots & \beta_{1ns} \dots s \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1s} \dots s & \beta_{n2s} \dots s \dots & \beta_{nns} \dots s \end{pmatrix}, \quad (14)$$
$$H_{ss,p} = -\frac{1.2}{n(n-1)} \sum_t \beta_{s \dots s,t} B_{pt,s}. \quad (15)$$

Otteniamo così, quando gli n determinanti che si hanno dal precedente facendo $s = 1, 2, \dots, n$ sono differenti da zero, la espressione delle $H_{qr,p}$, i cui due primi indici sono uguali, in funzione delle β e delle loro derivate prime, quindi anche delle b e delle loro derivate.

Per ottenere ora anche le espressioni delle $H_{qr,p}$, i cui due primi indici sono disuguali, facciamo nella (13) $s_1 = s_2 = \dots = s_{\rho-1} = s$, $s_\rho = r$; avremo:

$$\beta_{s \dots sr, t} = - \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \sum_k H_{ss, k} \beta_{tkrs \dots s} - (n-1) \sum_k H_{sr, k} \beta_{tk s \dots s},$$

da cui ponendo per le $H_{ss, k}$ i valori dati dalle (15) si ha:

$$(n-1) \sum_k H_{sr, k} \beta_{tk s \dots s} = - \beta_{s \dots sr, t} + \frac{n-2}{n} \sum_{hk} \beta_{s \dots s, h} B_{hk, s} \beta_{tkrs \dots s},$$

e risolvendo:

$$H_{sr, p} = - \frac{1}{n-1} \sum_t \beta_{s \dots sr, t} B_{pt, s} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{n-2}{n(n-1)} \sum_{hkt} \beta_{s \dots s, h} B_{hk, s} B_{pt, s} \beta_{tkrs \dots s} \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

La condizione perchè questa formula abbia sempre un significato è, come per la (15), che siano differenti da zero gli n determinanti (14). Osserviamo che nel solo caso in cui $\rho = 2$, questi n determinanti si riducono ad uno solo.

Notiamo infine che, se scriviamo tutte le M equazioni (11) e formiamo la matrice dei coefficienti delle $H_{qr,p}$, la quale conterrà N colonne ed M linee, basterà che uno almeno dei determinanti di ordine N , che se ne possono dedurre sia differente da zero, perchè si possano risolvere le equazioni stesse rispetto alle $H_{qr,p}$. Per $\nu = 2$ si ha $M = N$.

Riguardo a tutte queste condizioni si presenta una questione interessante: se cioè può avvenire che esistano trasformazioni per le quali esse sono soddisfatte, mentre per altre non lo sono; se così fosse, ne verrebbero delle limitazioni circa le trasformazioni per le quali è possibile determinare le $H_{qr,p}$ nel modo indicato. Non sembra però facile stabilire in proposito una discussione generale, ma conviene esaminare, caso per caso, il significato delle condizioni enunciate; noi ne vedremo qualche esempio in seguito.

Riassumendo possiamo dire che per trovare la trasformata di una espressione $\Delta, [U]$, in funzione soltanto dei coefficienti delle derivate di ordine ν , noi dovremo dapprima trovare colle formule ordinarie come i coefficienti di tutte le derivate che compaiono nella trasformata siano composti colle espres-

sioni $\Delta[y_1 | y_2 | \dots | y_r]$; poi costruire le corrispondenti espressioni (10') e ridurre a dipendere soltanto dalle $H_{qr,p}$ colle formule del paragrafo precedente; infine sostituire per le $H_{qr,p}$ i valori (15) (15'), oppure i valori che si deducono dalle (11), secondo che esiste o no una forma differenziale covariante della $\Delta_1[U_1, \dots, U_r]$.

Le espressioni $\Delta[U_1 | U_2 | \dots | U_r]$ godono di una importanza notevole quando si studiano le equazioni:

$$\Delta_r[U] = 0,$$

come in parte abbiamo già visto. Di esse ne esistono tante quante sono le partizioni possibili del numero r ; i coefficienti delle loro trasformate sono della stessa forma (10) dei coefficienti della $\Delta_r[U]$; quindi la loro trasformazione si riduce, come per questa espressione, al calcolo dei coefficienti $b_{l_1 \dots l_r}$, a r indici. Noi, per questa ragione, diremo che costituiscono il *gruppo dei covarianti dell'equazione*.

Applicheremo ora il metodo generale esposto ad alcuni casi speciali.

§ 4. Equazioni di 2.^o ordine.

Per le equazioni del 2.^o ordine le nostre formule conducono immediatamente ai risultati conosciuti. Si ha infatti per la trasformata della

$$\Delta_2[U] = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_h}, \quad (\alpha)$$

la espressione:

$$\Delta_2[U] = \sum_{pq} b_{pq} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_p b_p \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

ove:

$$b_{pq} = \Delta_1[y_p, y_q] \quad b_p = \Delta_2[y_p].$$

Le formule (10') ci danno:

$$b_p = \sum_{rs} H_{rs,p} b_{rs}, \quad (\beta)$$

e le (11):

$$\frac{\partial b_{pq}}{\partial y_r} = \sum_h (H_{hr,p} b_{hq} + H_{hr,q} b_{hp}),$$

relazioni, la cui verifica è inoltre semplicissima. Se in quest'ultima fac-

ciamo $r = q$ e sommiamo rispetto a q , ricordando la (6) troviamo:

$$\sum_q \frac{\partial b_{pq}}{\partial y_q} = \sum_{hq} H_{hq.p} b_{hq} - \frac{1}{\Delta} \sum_h \frac{\partial \Delta}{\partial y_h} b_{hp},$$

ossia:

$$b_p = \frac{1}{\Delta} \sum_q \frac{\partial (\Delta b_{pq})}{\partial y_q}.$$

Sostituendo questa espressione nella (α) troviamo:

$$\Delta_1[U] = \frac{1}{\Delta} \sum_{pq} \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\Delta b_{pq} \frac{\partial U}{\partial y_p} \right),$$

che è la formula a cui si arriva col principio di JACOBI; in essa poi, come abbiamo visto nel § 1, al posto di Δ si può sostituire $\frac{1}{\sqrt{b}}$, ove $b = \sum \pm b_{11} \dots b_{nn}$.

La espressione:

$$\Delta_1[U, V] = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h},$$

è in questo caso il solo covariante dell'equazione. Formiamo ora le due forme differenziali:

$$dU dV = \sum_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} dx_i dx_h$$

$$\varphi = \sum_{ih} a_{ih} dx_i dx_h,$$

ove, posto $a = \sum \pm a_{11} \dots a_{nn}$, $\alpha = \sum \pm \alpha_{11} \dots \alpha_{nn}$, si ha:

$$a_{ih} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial a_{ih}} \quad \text{e quindi} \quad \alpha_{ih} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ih}},$$

considerando come distinti a_{ih} e a_{hi} , α_{ih} e α_{hi} . Queste forme, considerate come forme algebriche dei differenziali, hanno l'invariante simultaneo assoluto:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{ih} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ih}} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h},$$

e quindi $\Delta_1[U, V]$ può considerarsi come un invariante di φ .

La trasformata di φ sia:

$$\varphi = \sum_{rs} \beta_{rs} dy_r dy_s,$$

ove le β_{rs} sono formate colle b_{rs} come le α_{ih} colle a_{ih} ; le espressioni (12)

sono in questo caso le seguenti:

$$\beta_{rs,t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_{ts}}{\partial y_r} + \frac{\partial \beta_{rt}}{\partial y_s} - \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial y_t} \right),$$

e le (13) divengono:

$$\beta_{rs,t} = - \sum_k H_{rs,k} \beta_{kt}.$$

I determinanti (14) si riducono al solo discriminante:

$$\beta = \sum \pm \beta_{11} \dots \beta_{nn},$$

e le (15), (15') alle seguenti:

$$H_{rs,p} = - \sum_t \beta_{rs,t} b_{pt},$$

valevoli tanto per $r=s$, che per r differente da s . Sostituendo questo valore di $H_{rs,p}$ nella (β) si trova:

$$b_p = - \sum_{trs} \beta_{rs,t} b_{pt} b_{rs},$$

e, se poniamo:

$$U_t = \sum_p b_{pt} \frac{\partial U}{\partial y_t},$$

si ha:

$$\sum_p b_p \frac{\partial U}{\partial y_p} = - \sum_{rst} \beta_{rs,t} b_{rs} U_t.$$

Sostituendo nella (α) infine troviamo:

$$\Delta_2[U] = \sum_{pq} b_{pq} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} - \sum_t \beta_{pq,t} U_t \right).$$

Questa forma dell'espressione $\Delta_2[U]$ è stata considerata dal prof. Ricci nelle ricerche, che abbiamo citato precedentemente.

Il discriminante β deve essere differente da zero; ora, se questa condizione è soddisfatta per un sistema di variabili, lo è per qualsiasi altro, poichè si ha:

$$\beta = \Delta^2 \alpha = \frac{\Delta^2}{a},$$

e quindi si vede che essa riguarda unicamente i coefficienti della espressione data $\Delta_2[U]$.

§ 5. Equazioni di 3.^o ordine.

Nel caso delle equazioni del 3.^o ordine l'espressione:

$$\Delta_3[U] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k},$$

si trasforma nella seguente:

$$\begin{aligned} \Delta_3[U] = \sum_{pqr} \Delta_1[y_p, y_q, y_r] \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + 3 \sum_{pq} \Delta_2[y_p | y_q] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \\ + \sum_p \Delta_3[y_p] \frac{\partial U}{\partial y_p}, \end{aligned}$$

ove si ha:

$$\Delta_1[y_p, y_q, y_r] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_h} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} = b_{pqr}$$

$$\Delta_2[y_p | y_q] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_q}{\partial x_k} = b_{pq}$$

$$\Delta_3[y_p] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k} = b_p,$$

e si può osservare che, se si introduce la notazione:

$$\Delta_2[y_p, y_q] = \Delta_2[y_p | y_q] + \Delta_2[y_q | y_p],$$

si ha anche:

$$2 \sum_{pq} \Delta_2[y_p | y_q] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} = \sum_{pq} \Delta_2[y_p, y_q] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q}.$$

Le (10') ci danno:

$$b_{pq} = \sum_{lm} H_{lm,p} b_{lmq}$$

$$b_p = \sum_{lmn} H_{lmn,p} b_{lmn},$$

quindi abbiamo:

$$\Delta_3[U] = \sum_{pqr} b_{pqr} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + 3 \sum_l H_{pq,l} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_l H_{pqr,l} \frac{\partial U}{\partial y_l} \right). \quad (\alpha)$$

Dalle (5) (11) poi si hanno le relazioni:

$$H_{pqr,l} = \frac{\partial H_{pq,l}}{\partial y_r} + \sum_k (H_{pr,k} H_{qk,l} + H_{qr,k} H_{pk,l}) \quad (\beta)$$

$$\frac{\partial b_{pqr}}{\partial y_s} = \sum_l (H_{ls,p} b_{lqr} + H_{ls,q} b_{lpr} + H_{ls,r} b_{lpq}), \quad (\gamma)$$

per eliminare dalla (α) le $H_{pqr,l}$, $H_{pq,r}$, introducendo invece le derivate delle b_{pqr} .

Se indichiamo con B una opportuna potenza di un invariante qualsiasi della espressione $\Delta_1[U, V, W]$, considerata come forma algebrica delle derivate delle tre funzioni U, V, W , noi nella (6) al posto di Δ potremo sostituire B , analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso delle equazioni di 2.° ordine (vedi § 1), e avremo quindi:

$$\sum_p H_{lp} \frac{\partial B}{\partial y_l} = - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial y_l}.$$

Ciò posto facendo nella (γ) $s = p$, e sommando rispetto a p si trova:

$$\frac{1}{B} \sum_l \frac{\partial}{\partial y_l} (B b_{lq}) = b_{qr} + b_{rq}. \quad (\delta)$$

Inoltre si ha:

$$\sum_q \frac{\partial b_{pq}}{\partial y_q} = \sum_{lmq} \left(\frac{\partial H_{lm,p}}{\partial y_q} b_{lmq} + H_{lm,p} \frac{\partial b_{lmq}}{\partial y_q} \right),$$

e sostituendo nel secondo membro i valori delle derivate che risultano dalle (β) (γ), si trova:

$$\sum_q \frac{\partial b_{pq}}{\partial y_q} = b_p + \sum_{lmqk} H_{kq,q} H_{lm,p} b_{klm},$$

ossia:

$$\frac{1}{B} \sum_q \frac{\partial}{\partial y_q} (B b_{pq}) = b_p. \quad (\varepsilon)$$

Queste due relazioni (δ) (ε) sono quelle, a cui si arriverebbe col principio di JACOBI; esse però, come si vede, non bastano per determinare le b_{pq} , b_p in funzione delle b_{pqr} .

Supponiamo ora che sia $n = 2$. In questo caso possiamo costruire una forma differenziale cubica, rispetto alla quale la espressione:

$$\Delta_1[U, V, W] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} \frac{\partial W}{\partial x_k},$$

sia un invariante. Difatti due forme binarie cubiche l'una di coefficienti α , l'altra di coefficienti γ , hanno l'invariante simultaneo rappresentato simbolicamente da $(\alpha\gamma)^3$, che diviene un invariante assoluto, se noi lo dividiamo per la potenza $\frac{1}{2}$ del discriminante di una delle forme. Le due forme siano:

$$\varphi = \sum_{ihk} a_{ihk} dx_i dx_h dx_k = \alpha_0 dx_1^3 + 3\alpha_1 dx_1^2 dx_2 + 3\alpha_2 dx_1 dx_2^2 + \alpha_3 dx_2^3$$

$$dU dV dW = \sum_{ihk} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} \frac{\partial W}{\partial x_k} dx_i dx_h dx_k.$$

Il discriminante di φ è:

$$R_a = 4(\alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2)(\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2^2) - (\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2)^2,$$

e l'invariante simultaneo sovraccennato è:

$$\frac{1}{R_a^{\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha_0 \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial W}{\partial x_2} - \alpha_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial W}{\partial x_2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \alpha_2 \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_1} + \dots \right) - \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_1} \right\}.$$

Se vogliamo che esso coincida con $\Delta_1[U, V, W]$ dovremo determinare le α in modo che sia:

$$\frac{\alpha_0}{R_a^{\frac{1}{2}}} = a_3 \quad - \frac{\alpha_1}{R_a^{\frac{1}{2}}} = a_2 \quad \frac{\alpha_2}{R_a^{\frac{1}{2}}} = a_1 \quad \frac{\alpha_3}{R_a^{\frac{1}{2}}} = -a_0,$$

ove $a_0 = a_{111}, \dots, a_3 = a_{222}$; di qui, indicando con R_a il discriminante della forma di coefficienti a , si ha:

$$R_a R_a = 1,$$

quindi abbiamo:

$$\alpha_0 = \frac{a_3}{R_a^{\frac{1}{2}}} \quad \alpha_1 = -\frac{a_2}{R_a^{\frac{1}{2}}} \quad \alpha_2 = \frac{a_1}{R_a^{\frac{1}{2}}} \quad \alpha_3 = -\frac{a_0}{R_a^{\frac{1}{2}}}.$$

Con questi valori la φ diviene:

$$\varphi = \frac{1}{R_a^{\frac{1}{2}}} \{ a_3 dx_1^3 - 3a_2 dx_1^2 dx_2 + 3a_1 dx_1 dx_2^2 - a_0 dx_2^3 \}.$$

Questa cubica ammette $\Delta_1[U, V, W]$ come invariante, e mediante di essa, col procedimento del § 3, possiamo determinare le $H_{qr,p}$ in funzione dei coefficienti β della sua trasformata, i quali saranno formati coi coefficienti b , come i coefficienti di φ sono formati colle a . I determinanti (14) che devono essere differenti da zero, perchè la determinazione delle $H_{qr,p}$ sia possibile sono in questo caso:

$$\frac{1}{R_\beta} (\beta_0 \beta_2 - \beta_1^2) \quad \frac{1}{R_\beta} (\beta_1 \beta_3 - \beta_2^2). \quad (\xi)$$

La determinazione delle $H_{qr,p}$ si può fare anche mediante una forma quadratica; difatti la φ ammette la forma covariante assoluta quadratica:

$$\psi = \frac{1}{R_a^{\frac{1}{2}}} \{ (a_1 a_3 - a_2^2) dx_1^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_2) dx_1 dx_2 + (a_0 a_2 - a_1^2) dx_2^2 \},$$

la quale ammetterà pure per invariante $\Delta_1[U, V, W]$. Possiamo quindi applicare a questa forma il procedimento del paragrafo precedente per determinare le $H_{qr, p}$. La condizione per la risolubilità delle equazioni corrispondenti è, in questo caso, che sia differente da zero il discriminante R_α ; esso inoltre dovrà essere supposto positivo, per non introdurre immaginari. Se R_α è positivo, anche R_β sarà positivo, qualunque siano le variabili y , e da ciò segue pure che i due determinanti (ξ) non potranno mai essere zero.

Due forme binarie di grado dispari $2\mu + 1$ di coefficienti α e γ , ammettono l'invariante simultaneo rappresentato simbolicamente da:

$$(\alpha \gamma)^{2\mu+1},$$

il quale è lineare nei coefficienti di ciascuna forma; inoltre una forma binaria di grado dispari $\alpha_x^{2\mu+1} = \beta_x^{2\mu+1} = \dots$ ammette il covariante quadratico:

$$(\alpha \beta)^{2\mu} \alpha_x \beta_x.$$

Da ciò segue che le considerazioni precedenti sono applicabili a tutte le equazioni di ordine dispari con due variabili indipendenti, cioè si ha il teorema:

La trasformazione di un'equazione a derivate parziali, lineare, omogenea, a coefficienti costanti, d'ordine dispari $2\mu + 1$, con due variabili indipendenti è riducibile in generale a quella di una forma differenziale binaria di grado $2\mu + 1$; inoltre la determinazione delle funzioni $H_{qr, p}$ si può fare mediante i coefficienti di una forma differenziale binaria quadratica.

Scriviamo infine la forma generale della trasformata dell'equazione del 3.° ordine quale risulta dalle relazioni $(\partial)(\varepsilon)$, oppure dal principio di JACOBI.

Cominciamo ad osservare che il gruppo dei covarianti della equazione è in questo caso costituito dai seguenti due:

$$\Delta_1[U, V, W] = \sum_{pqr} b_{pqr} \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \frac{\partial W}{\partial y_r}$$

$$\Delta_2[U | V] = \sum_{pqr} b_{pqr} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial V}{\partial y_r} + \sum_{pq} b_{pq} \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q}.$$

Se ora si pone:

$$U_r = \frac{\partial \Delta_2[U | V]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_r} \right)} = \sum_{pqr} b_{pqr} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_p b_{pr} \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

si ha:

$$\Delta_3[U] = \frac{1}{B} \sum_r \frac{\partial}{\partial y_r} (B U_r). \quad (\text{I})$$

Ponendo invece:

$$U_{pq}^* = \frac{\partial^2 \Delta_1 [U, V, W]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_p} \right) \partial \left(\frac{\partial W}{\partial y_q} \right)} = \frac{\partial \Delta_2 [V | U]}{\partial \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_p \partial y_q} \right)} = \sum_r b_{pqr} \frac{\partial U}{\partial y_r}$$

$$U_p^* = \frac{\partial \Delta_2 [V | U]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_p} \right)} = \sum_q b_{pq} \frac{\partial U}{\partial y_q},$$

si ha:

$$\Delta_3 [U] = \frac{1}{B} \sum_{pq} \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q} (B U_{pq}^*) - \frac{1}{B} \sum_p \frac{\partial}{\partial y_p} (B U_p^*). \quad (\text{II})$$

Infine si ha:

$$\Delta_2 [U, V] = \frac{1}{B} \sum_r \frac{\partial}{\partial y_r} \left(B \frac{\partial \Delta_1 [U, V, W]}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial y_r} \right)} \right),$$

in cui:

$$\frac{\partial \Delta_1 [U, V, W]}{\partial \left(\frac{\partial W}{\partial y_r} \right)} = \sum_{pq} b_{pqr} \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q}.$$

§ 6. Forme algebriche reciproche.

Per le espressioni $\Delta_1 [U_1, U_2, \dots, U_\nu]$, quando ν è pari, è possibile stabilire un procedimento generale per costruire delle forme differenziali di grado ν , rispetto alle quali esse sono invariabili. Prima però è necessario estendere alle forme di ordine pari qualsiasi il concetto ordinario della reciprocità delle forme quadratiche.

Cominciamo a richiamare la definizione delle forme quadratiche reciproche, servendoci della notazione simbolica. Consideriamo il determinante:

$$(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)}) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \dots & a_1^{(n)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \dots & a_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^{(1)} & a_n^{(2)} \dots & a_n^{(n)} \end{vmatrix}, \quad (16)$$

e poniamo:

$$\frac{\partial (a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})}{\partial a_i^{(1)}} = (a^{(2)} a^{(3)} \dots a^{(n)})_i, \dots \quad \frac{\partial (a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})}{\partial a_i^{(n)}} = (a^{(2)} a^{(3)} \dots a^{(n)})_i.$$

La ragione della denominazione introdotta per Φ sta nel fatto che, se noi da Φ deduciamo una nuova forma quadratica collo stesso procedimento che ha servito a dedurre Φ da φ , ritroviamo la φ . Difatti siano α'_{ih} i coefficienti di questa nuova forma; dalla (19) abbiamo subito:

$$\alpha'_{ih} = \alpha^{(i)}_i \alpha^{(h)}_h = a_{ih}.$$

Avremo inoltre:

$$(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^2 \alpha_{ih} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^2}{\partial \alpha^{(i)}_i \partial \alpha^{(h)}_h},$$

e reciprocamente:

$$(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^2 a_{ih} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^2}{\partial \alpha^{(i)}_i \partial \alpha^{(h)}_h}.$$

Inoltre, essendo uguale all'unità il prodotto dei determinanti (16) (17) avremo anche:

$$(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^2 (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^2 = 1.$$

Queste considerazioni possono essere immediatamente estese a qualsiasi forma di grado pari. Sia:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_{2\nu}},$$

oppure simbolicamente:

$$\varphi = a_z^{(1, 2\nu)} = a_z^{(2, 2\nu)} = \dots = a_z^{(n, 2\nu)},$$

la forma data di grado 2ν , essa ammette l'invariante di grado n :

$$a = (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^{2\nu}.$$

Definiremo *forma reciproca* una forma Φ di grado 2ν , i cui coefficienti $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}}$ sono determinati dalla formula:

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} = \alpha^{(r)}_{i_1} \alpha^{(r)}_{i_2} \dots \alpha^{(r)}_{i_{2\nu}},$$

ove le $\alpha^{(r)}_i$ sono le espressioni definite dalle (18), ed r è un indice determinato qualunque; il secondo membro della formula precedente ha un significato reale, e non identicamente zero, in funzione dei coefficienti di φ . Noi porremo:

$$\Phi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} Z_{i_1} Z_{i_2} \dots Z_{i_{2\nu}};$$

oppure simbolicamente:

$$\Phi = \alpha_Z^{(1, 2\nu)} = \alpha_Z^{(2, 2\nu)} = \dots = \alpha_Z^{(n, 2\nu)}.$$

Se deduciamo da Φ una nuova forma di grado 2ν , collo stesso procedimento, col quale abbiamo dedotto Φ da φ , ritroviamo la φ . Difatti, indicando

con $\alpha'_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}}$ i coefficienti di questa nuova forma, dalla (19) abbiamo:

$$\alpha'_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} = \alpha_{i_1}^{(1)} \alpha_{i_2}^{(2)} \dots \alpha_{i_{2\nu}}^{(2\nu)} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}}.$$

Abbiamo poi:

$$(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})^{2\nu} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} = \frac{1}{2\nu!} \frac{\partial^{2\nu} (a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})^{2\nu}}{\partial \alpha_{i_1}^{(1)} \partial \alpha_{i_2}^{(2)} \dots \partial \alpha_{i_{2\nu}}^{(2\nu)}}, \quad (20)$$

e reciprocamente:

$$(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})^{2\nu} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} = \frac{1}{2\nu!} \frac{\partial^{2\nu} (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^{2\nu}}{\partial \alpha_{i_1}^{(1)} \partial \alpha_{i_2}^{(2)} \dots \partial \alpha_{i_{2\nu}}^{(2\nu)}}. \quad (21)$$

Finalmente, se formiamo per la Φ l'invariante α analogo all'invariante a della φ ,

$$\alpha = (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^{2\nu},$$

osservando che il prodotto dei due determinanti (16) (17) è uguale all'unità, avremo:

$$a \alpha = 1.$$

In tutte queste considerazioni naturalmente si deve supporre che la forma φ abbia l'invariante a differente da zero.

Ricordando la formula di EULERO per la espressione di una funzione omogenea di n variabili mediante le derivate di ordine 2ν , e osservando la (20) si trova:

$$\Phi = \frac{(a^{(1)} \dots a^{(r-1)} Z a^{(r+1)} \dots a^{(n)})^{2\nu}}{(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})^{2\nu}},$$

e così per la (21) si ha anche:

$$\varphi = \frac{(\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(r-1)} Z \alpha^{(r+1)} \dots \alpha^{(n)})^{2\nu}}{(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \dots \alpha^{(n)})^{2\nu}}.$$

La prima di queste formule mostra che la Φ è una forma contravariante di φ in modo assoluto.

Per avere un'idea delle legge di formazione dei coefficienti della forma reciproca possiamo osservare per es. che i coefficienti della reciproca di una ternaria quadratica, se si fa astrazione del denominatore comune, sono determinanti di 2.^o ordine, cioè hanno forma analoga a quella dell'invariante $(ab)^2$ di una binaria quadratica; i coefficienti della reciproca di una quartica ternaria hanno forma analoga a quella dell'invariante $(ab)^4$ di una quartica binaria, ecc.; in generale i coefficienti della reciproca di una n -aria di grado 2ν sono formati in modo analogo all'invariante $(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n-1)})^{2\nu}$ di una $(n-1)$ -aria, sempre all'infuori del denominatore comune $(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})^{2\nu}$.

Dalle considerazioni precedenti e dall'osservazione che le derivate prime di una funzione di n variabili sono controgradienti ai differenziali delle variabili stesse, risulta subito che data un'espressione:

$$\Delta_1[U_1, U_2, \dots, U_{2\nu}] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} a_{i_1 i_2 \dots i_{2\nu}} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial U_{2\nu}}{\partial x_{i_{2\nu}}}.$$

si otterrà una forma differenziale di grado 2ν rispetto alla quale tale espressione sarà invariabile, costruendo la forma differenziale reciproca della precedente, considerata come forma 2ν -plo lineare delle derivate delle funzioni $U_1, \dots, U_{2\nu}$.

Inversamente, data una forma differenziale di grado 2ν , lo stesso procedimento condurrà ad una espressione $\Delta_1[U_1, \dots, U_{2\nu}]$ invariabile rispetto alla forma.

§ 7. Equazioni del 4.^o ordine.

Le formule pel cambiamento delle variabili indipendenti per la trasformazione della espressione:

$$\Delta_4[U] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^4 U}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k \partial x_l},$$

ci danno:

$$\begin{aligned} \Delta_4[U] = & \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^4 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r \partial y_s} + \\ & + 6 \sum_{pqr} \Delta_2[y_p | y_q, y_r] \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} \\ & + \sum_{pq} (3 \Delta_2[y_p, y_q] + 4 \Delta_3[y_p | y_q]) \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_p \Delta_4[y_p] \frac{\partial U}{\partial y_p}, \end{aligned}$$

dove abbiamo:

$$\begin{aligned} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] &= \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_h} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial y_s}{\partial x_l} = b_{pqrs} \\ \Delta_2[y_p | y_q, y_r] &= \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_q}{\partial x_k} \frac{\partial y_r}{\partial x_l} = b_{pqr} \\ \Delta_2[y_p, y_q] &= \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial^2 y_q}{\partial x_k \partial x_l} = b_{pq} \\ \Delta_3[y_p | y_q] &= \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k} \frac{\partial y_q}{\partial x_l} = b'_{pq} \\ \Delta_4[y_p] &= \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^4 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k \partial x_l} = b_p. \end{aligned}$$

Col metodo che abbiamo indicato per stabilire la (10') si trova:

$$\left. \begin{aligned} b_{pqr} &= \sum_{lm} H_{lm,p} b_{lmqr} \\ b_{pq} &= \sum_{lmni} H_{lm,p} H_{ni,q} b_{lmni} \\ b'_{pq} &= \sum_{lmn} H_{lmn,p} b_{lmnq} \\ b_p &= \sum_{lmni} H_{lmni,p} b_{lmni} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

Dalle (5) poi abbiamo:

$$\left. \begin{aligned} H_{lmn,p} &= \frac{\partial H_{lm,p}}{\partial y_n} + \sum_k (H_{ln,k} H_{mk,p} + H_{mn,k} H_{lk,p}) \\ H_{lmni,p} &= \frac{\partial H_{lmn,p}}{\partial y_i} + \sum_k (H_{li,k} H_{mnk,p} + H_{mi,p} H_{nlk,p} + H_{ni,k} H_{lmk,p}) \end{aligned} \right\} \quad (\beta)$$

e finalmente dalla (11):

$$\frac{\partial b_{pqrs}}{\partial y_t} = \sum_i (H_{ti,p} b_{lqrs} + H_{ti,q} b_{lrsp} + H_{ti,r} b_{lspq} + H_{ti,s} b_{lpqr}). \quad (\gamma)$$

Il problema, secondo il metodo generale, si riduce alla eliminazione delle $H_{pq,r}$ dalle (α) (β) mediante le (γ).

I covarianti del gruppo dell'equazione in questo caso sono quattro; le loro espressioni colle variabili y sono:

$$\begin{aligned} \Delta_1[U, V, W, T] &= \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \frac{\partial W}{\partial y_r} \frac{\partial T}{\partial y_s} \\ \Delta_2[U | V, W] &= \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial V}{\partial y_r} \frac{\partial W}{\partial y_s} + \\ &\quad + \sum_{pqr} \Delta_2[y_p | y_q, y_r] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \frac{\partial W}{\partial y_r} \\ \Delta_2[U, V] &= \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial^2 V}{\partial y_r \partial y_s} + \\ &\quad + \sum_{pqr} \Delta_2[y_p | y_q, y_r] \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial V}{\partial y_p} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial U}{\partial y_p} \right) + \\ &\quad + \sum_{pq} \Delta_2[y_p, y_q] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \\ \Delta_3[U | V] &= \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + \\ &\quad + 3 \sum_{pqr} \Delta_2[y_p | y_q, y_r] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial V}{\partial y_r} + \sum_{pq} \Delta_3[y_p | y_q] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q}. \end{aligned}$$

Si può osservare che tutte queste espressioni, al pari di quella della $\Delta_1[U]$, in virtù delle (10') si possono rappresentare come funzioni lineari delle b_{pqrs} .

Le relazioni che si deducono dalle (α) derivando rispetto alle y , e sostituendo poi alle derivate delle $H_{lm,p}$, $H_{lmn,p}$ e delle b_{lmni} i valori dati dalle (β) (γ) sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} b_{qrs} + b_{rsq} + b_{sqr} &= \frac{1}{B} \sum_p \frac{\partial}{\partial y_p} (B b_{pqrs}) \\ b'_{pq} + b_{pq} &= \frac{1}{B} \sum_r \frac{\partial}{\partial y_r} (B b_{pqr}) \\ b_p &= \frac{1}{B} \sum_q \frac{\partial}{\partial y_q} (B b'_{pq}), \end{aligned} \right\} \quad (\delta)$$

ove possiamo prendere:

$$B = \frac{1}{\frac{1}{b}},$$

indicando con b l'invariante rappresentato simbolicamente da $(b^{(1)} b^{(2)} \dots b^{(n)})^4$.

Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente otterremo poi una forma differenziale di 4.° ordine, rispetto alla quale la forma $\Delta_1[U, V, W, T]$ sarà invariabile, costruendone la forma differenziale a coefficienti reciproci. Nel seguente paragrafo vedremo meglio le relazioni fra questa forma ed i covarianti dell'equazione; qui mi limiterò a dare la forma della trasformata dell'equazione, quale risulta dal principio di JACOBI oppure dalle relazioni (δ). Come nel caso dell'equazione di 3.° ordine abbiamo trovato due forme della trasformata, qui invece ne abbiamo tre.

Se si pone:

$$U_s = \frac{\partial \Delta_3[U, V]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_s} \right)} = \sum_{pqr} b_{pqrs} \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + 3 \sum_{pq} b_{pq} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_p b'_p \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

si ha:

$$\Delta_4[U] = \frac{1}{B} \sum_s (B U_s). \quad (\text{I})$$

Ponendo invece:

$$\begin{aligned} U_{pq}^* &= \frac{\partial \Delta_2[U, V]}{\partial \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_p \partial y_q} \right)} = \sum_{rs} b_{pqrs} \frac{\partial^2 U}{\partial y_r \partial y_s} + \sum_r b_{rpq} \frac{\partial U}{\partial y_r} \\ U_p^* &= \frac{\partial \Delta_2[U, V]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_p} \right)} = \sum_{rs} b_{prs} \frac{\partial^2 U}{\partial y_r \partial y_s} + \sum_r b_{rp} \frac{\partial U}{\partial y_r} \end{aligned}$$

si trova:

$$\Delta_1[U] = \frac{1}{B} \sum_{pq} \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q} (B U_{pq}^*) - \frac{1}{B} \sum_p (B U_p^*). \quad (\text{II})$$

Finalmente ponendo:

$$\begin{aligned} U_{pqr}^{**} &= \frac{\partial \Delta_3[V|U]}{\partial \left(\frac{\partial^3 V}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} \right)} = \frac{\partial^3 \Delta_1[U, V, W, T]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_p} \right) \partial \left(\frac{\partial W}{\partial y_q} \right) \partial \left(\frac{\partial T}{\partial y_r} \right)} = \sum_s b_{pqrs} \frac{\partial U}{\partial y_s} \\ U_{pq}^{**} &= \frac{\partial \Delta_3[V|U]}{\partial \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_p \partial y_q} \right)} = \sum_s b_{pq s} \frac{\partial U}{\partial y_s} \\ U_p^{**} &= \frac{\partial \Delta_3[V|U]}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial y_p} \right)} = \sum_s b'_p s \frac{\partial U}{\partial y_s}, \end{aligned}$$

si ha:

$$\Delta_4[U] = \frac{1}{B} \sum_{pqr} \frac{\partial^3}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} (B U_{pqr}^{**}) - \frac{1}{B} \sum_{pq} \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q} (B U_{pq}^{**}) + \left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{B} \sum_p \frac{\partial}{\partial y_p} (B U_p^{**}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Altre relazioni fra i quattro covarianti si possono ottenere assai facilmente col principio di JACOBI.

§ 8. Parametri differenziali.

Quelle espressioni, che nei paragrafi precedenti abbiamo chiamato *covarianti* dell'equazione:

$$\Delta_v[U] = 0,$$

allorchè esiste una forma differenziale rispetto alla quale le espressioni del 1.º ordine $\Delta_i[U_1, \dots, U_v]$ sono invariabili, godono tutte di proprietà invariante rispetto alla forma stessa, e possono quindi essere chiamati *parametri differenziali* di questa, per analogia colla denominazione in uso per le forme quadratiche. Le forme, che abbiamo considerato però non erano generali, ma implicitamente era ammessa la condizione che fossero riducibili, con opportune trasformazioni di variabili, ad essere a coefficienti costanti. Ora possiamo affrancarci anche da questa restrizione e dare un procedimento generale per la formazione dei parametri di qualunque forma differenziale. Tale procedi-

mento non è che la estensione, mediante una osservazione assai semplice, del metodo trovato dal prof. Ricci pel caso delle forme quadratiche, e può essere soggetto soltanto a quella restrizione a cui abbiamo accennato nel § 3.

Consideriamo una forma differenziale:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} dx_{i_1} \dots dx_{i_\nu},$$

di grado ν , i cui coefficienti siano funzioni delle variabili x ; mutando le variabili x in altre variabili y , si ottenga:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_\nu} dy_{i_1} \dots dy_{i_\nu}; \quad (22)$$

e mutando similmente le x in altre variabili z si abbia:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} b'_{i_1 i_2 \dots i_\nu} dz_{i_1} \dots dz_{i_\nu}. \quad (22')$$

Poniamo come nei paragrafi precedenti:

$$H_{qr,p} = \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r}, \quad (23)$$

e inoltre:

$$H'_{qr,p} = \sum_{ih} \frac{\partial^2 z_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_q} \frac{\partial x_h}{\partial z_r}. \quad (23')$$

Sappiamo che queste espressioni $H_{qr,p}$, $H'_{qr,p}$ si potranno in generale rappresentare in modo identico mediante le (15) (15'), come funzioni dei coefficienti b e delle loro derivate, e come funzioni dei coefficienti b' e delle loro derivate, rispettivamente. Cerchiamo ora quali relazioni esistono fra le $H_{qr,p}$ e le $H'_{qr,p}$.

La (23') può essere scritta nel seguente modo:

$$H'_{qr,p} = \sum_{ih} \left(\sum_{lm} \frac{\partial^2 z_p}{\partial y_l \partial y_m} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_h} + \sum_k \frac{\partial z_p}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_h} \right) \frac{\partial x_i}{\partial z_q} \frac{\partial x_h}{\partial z_r},$$

ossia:

$$H'_{qr,p} = \sum_{lm} \left(\frac{\partial^2 z_p}{\partial y_l \partial y_m} + \sum_k H_{lm,k} \frac{\partial z_p}{\partial y_k} \right) \frac{\partial y_l}{\partial z_q} \frac{\partial y_m}{\partial z_r},$$

da cui si ha:

$$\sum_{qr} H'_{qr,p} \frac{\partial z_q}{\partial y_i} \frac{\partial z_r}{\partial y_s} = \frac{\partial^2 z_p}{\partial y_i \partial y_s} + \sum_k H_{is,k} \frac{\partial z_p}{\partial y_k}. \quad (24)$$

Stabilita questa formula, supponiamo che si conosca una forma differenziale

di grado λ :

$$\Phi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} P_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} dx_{i_1} \dots dx_{i_\lambda},$$

la quale sia covariante di φ , ed i cui coefficienti siano funzioni delle $\alpha_{i_1 \dots i_\lambda}$, e delle loro derivate, ed inoltre delle derivate di una o più funzioni arbitrarie $U, V, \dots$. Nelle due trasformate di Φ nelle variabili y e z

$$\Phi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} dy_{i_1} \dots dy_{i_\lambda}$$

$$\Phi = \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} dz_{l_1} \dots dz_{l_\lambda},$$

i coefficienti saranno, per ipotesi, formati in modo identico ai coefficienti $P_{i_1 \dots i_\lambda}$ coi coefficienti delle (22) (22') e colle derivate di questi e delle funzioni $U, V, \dots$ rispetto alle variabili y e z rispettivamente. Fra i coefficienti $Q_{i_1 \dots i_\lambda}$ e $Q'_{l_1 \dots l_\lambda}$ poi avremo le relazioni:

$$Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \dots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}}.$$

Derivando i due membri rispetto ad y_i avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}}{\partial y_i} &= \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \frac{\partial Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda}}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \dots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}} \\ &+ \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \left\{ \frac{\partial^2 z_{l_1}}{\partial y_i \partial y_{i_1}} \frac{\partial z_{l_2}}{\partial y_{i_2}} \dots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \dots \frac{\partial z_{l_{\lambda-1}}}{\partial y_{i_{\lambda-1}}} \frac{\partial^2 z_{l_\lambda}}{\partial y_i \partial y_{i_\lambda}} \right\}. \end{aligned}$$

Eliminando ora dal secondo membro le derivate seconde delle z rispetto alle y mediante la (24) e posto:

$$Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \frac{\partial Q_{i_1 \dots i_\lambda}}{\partial y_i} + \sum_k \sum_{j=1}^{\lambda} Q_{i_1 \dots i_j, k l_{j+1} \dots l_\lambda} H_{i_j, k} \quad (25)$$

$$Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} = \frac{\partial Q'_{l_1 \dots l_\lambda}}{\partial y_l} + \sum_k \sum_{s=1}^{\lambda} Q'_{l_1 \dots l_{s-1}, k l_{s+1} \dots l_\lambda} H'_{l l_s, k}, \quad (25')$$

si trova:

$$Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \dots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}}.$$

Da questa formula risulta il teorema: *La forma di grado $\lambda + 1$*

$$\Psi = \sum_{i_1 \dots i_\lambda} Q_{i_1 \dots i_\lambda} dx_i dx_{i_1} \dots dx_{i_\lambda},$$

i cui coefficienti sono dedotti da quelli di Φ mediante le (25) è, come Φ , covariante di φ . Di qui si ha un procedimento per dedurre da una data forma covariante una serie di altre forme covarianti, di grado successivamente crescente di una unità.

Nella Memoria: *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Crelle, Bd. 70), CHRISTOFFEL ha dimostrato un teorema perfettamente analogo al precedente (*), nel quale però, al posto delle $H_{qr,p}$ compaiono i valori che per queste quantità abbiamo trovato al § 4 nel caso delle forme quadratiche; il teorema vale quindi soltanto pel caso in cui φ è quadratica. Noi, avendo sostituito le $H_{qr,p}$, abbiamo reso il teorema applicabile a forme di qualsiasi grado.

Se ora U è una funzione arbitraria delle variabili $x_1, \dots, x_n$, e poniamo:

$$U_r = \frac{\partial U}{\partial x_r};$$

la forma lineare

$$\Delta U = \sum_r U_r dx_r,$$

che rappresenta il differenziale completo del 1.° ordine della funzione U , può sempre essere considerata come covariante di φ ; applicando ad essa il teorema di CHRISTOFFEL generalizzato, potremo dedurre altre forme di grado successivamente crescente di una unità, i cui coefficienti conterranno le derivate parziali della U di ordine uguale al grado della forma, ed inoltre le $a_{i_1 \dots i_\lambda}$ e le loro derivate. Noi porremo secondo la (25):

$$U_{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \frac{\partial U_{r_1 \dots r_{\lambda-1}}}{\partial x_{r_\lambda}} + \sum_{k=1}^{\lambda-1} \sum_{j=1}^{\lambda-k} U_{r_1 \dots r_{j-1} k r_{j+1} \dots r_\lambda} H_{r, r_j, k}, \quad (25'')$$

ove si intende che le $H_{r, r_j, k}$ siano espresse mediante le $a_{i_1 \dots i_\lambda}$ e le loro derivate, come abbiamo visto al § 3; e avremo allora che la m -esima forma covariante di φ sarà:

$$\Delta^m U = \sum_{r_1 r_2 \dots r_m} U_{r_1 r_2 \dots r_m} dx_{r_1} \dots dx_{r_m}.$$

(*) CHRISTOFFEL considera invece della forma Φ di grado λ , una forma λ volte lineare rispetto a λ serie di differenziali delle variabili; noi, per semplicità, non abbiamo introdotto questa estensione, che del resto è evidente potersi fare anche nel nostro caso.

Tutti gli invarianti algebrici simultanei della forma φ e delle

$$\Delta U, \quad \Delta^2 U, \dots \quad \Delta^m U, \dots, \quad (26)$$

saranno altrettante espressioni invariabili rispetto a φ per qualsiasi trasformazione di variabili (ossia *parametri differenziali* di φ) salvo al più quella restrizione, a cui accennato al § 3, relativamente alle condizioni per la risolubilità delle equazioni, da cui si devono ricavare le $H_{r,r,k}$.

Nel caso in cui φ è di 2.° grado il metodo precedente per la formazione dei parametri coincide con quello citato del prof. RICCI.

Insieme alle serie delle forme (26), potremo considerare altre serie analoghe formate con altre funzioni arbitrarie $V, W, \dots$ ed ottenere così dei parametri dipendenti da parecchie funzioni.

Moltiplicando fra loro le forme di ν di queste serie si potrà formare un numero finito di forme di grado ν , uguale al grado della forma differenziale data; chiameremo *gruppo principale* dei parametri l'insieme di quelli che si ottengono dalla considerazione degli invarianti simultanei di questo sistema di forme. Una qualunque di queste forme sarà:

$$\varphi_\rho = \Delta^{\lambda_1} U_1 \Delta^{\lambda_2} U_2 \dots \Delta^{\lambda_\rho} U_\rho,$$

e dovrà essere:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\rho = \nu.$$

Considerando come identiche alla φ_ρ , quelle forme che si ottengono da essa permutando fra loro le funzioni $U_1, \dots, U_\rho$, il numero delle forme che compongono il sistema sarà uguale a quello delle soluzioni intere della equazione precedente, per $\rho = 1, 2, \dots, \nu$.

Come applicazione, costruiamo le forme del gruppo principale per $\nu = 4$. Sia:

$$\varphi = \sum_{ihkl} a_{ihkl} dx_i dx_h dx_k dx_l,$$

la forma data di 4.° grado; si hanno in questo caso 5 forme del gruppo principale:

$$\left. \begin{array}{lll} \varphi_1 = \Delta U \Delta V \Delta W \Delta S & \varphi'_2 = \Delta^2 U \Delta^2 V & \varphi_4 = \Delta^4 U \\ \varphi_2 = \Delta^2 U \Delta V \Delta W & \varphi_3 = \Delta^3 U \Delta V. & \end{array} \right\} \quad (27)$$

La φ ammette l'invariante rappresentato simbolicamente da

$$(a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(n)})^4 = a, .$$

che supporremo differente da zero. Se nella espressione simbolica di a , al

posto di una serie di simboli $a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}$, sostituiamo un'altra serie $C_1^{(i)}, \dots, C_n^{(i)}$ di simboli relativi ad un'altra forma di 4.° grado di coefficienti C_{ihkl} , e formiamo l'espressione simbolica:

$$\frac{1}{a} (a^{(1)} \dots a^{(i-1)} C^{(i)} a^{(i+1)} \dots a^{(n)})^4, \quad (28)$$

questa rappresenterà un invariante simultaneo delle due forme, il quale è lineare nei coefficienti C_{ihkl} , e sarà quindi della forma:

$$\sum_{ihkl} A_{ihkl} C_{ihkl}, \quad (28')$$

Le A_{ihkl} saranno i coefficienti della forma reciproca di φ . Se per forma di coefficienti C_{ihkl} prendiamo successivamente ciascuna delle (27) otteniamo 5 parametri, che sono lineari nei coefficienti di queste forme, e che possiamo rappresentare con:

$$\Delta_1[U, V, W, S], \quad \Delta_2[U | V, W], \quad \Delta_3[U, V], \quad \Delta_3[U | V], \quad \Delta_4[U]. \quad (29)$$

Supponiamo che le A_{ihkl} coincidono colle b_{pqrs} del § 7, e le variabili x colle y dello stesso paragrafo; allora la φ coinciderà colla forma, i cui coefficienti sono reciproci delle b_{pqrs} . L'invariante (28') diviene:

$$\sum_{pqrs} b_{pqrs} C_{pqrs},$$

ed i cinque parametri ora trovati si possono scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta_1[U, V, W, T] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs} U_p V_q W_r T_s \\ \Delta_2[U | V, W] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs} U_{pq} V_r W_s \\ \Delta_3[U, V] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs} U_{pq} V_{rs} \\ \Delta_3[U | V] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs} U_{pq} V_s \\ \Delta_4[U] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs} U_{pqrs}, \end{aligned}$$

ove le $U_p, U_{pq}, \dots, V_r, \dots$ sono determinati colla legge che risulta dalla (25''). È ora assai facile verificare che le espressioni dei secondi membri coincidono con quelle rappresentate colle notazioni dei primi membri nel § 4, cioè colle trasformate del primo membro dell'equazione del 4.° ordine e dei suoi quattro covarianti. La invariabilità di queste espressioni resta così dimostrata, salvo le solite condizioni, senza la limitazione della riducibilità a coefficienti costanti.

Questi risultati completano quelli a cui io era arrivato considerando le forme differenziali binarie del 4.^o grado, rispetto alle trasformazioni lineari (tomo 18 di questi *Annali*).

Se le variabili sono in numero maggiore di 2, le due forme di coefficienti a_{ihkl} , C_{ihkl} , oltre l'invariante simultaneo (28), hanno tutti quelli che si ottengono dalla espressione simbolica:

$$\frac{1}{a} (a^{(1)} \dots a^{(i)} C^{(i+1)} \dots C^{(n)})^4,$$

facendo $i = 0, 1, 2, \dots, n - 2$. Supponendo che i simboli C si riferiscano ai coefficienti delle forme (27), otteniamo oltre i parametri (29) che sono lineari nei coefficienti di queste forme, altri $5(n - 1)$ parametri, che contengono i coefficienti delle forme stesse ai gradi $n, n - 1, \dots, 3, 2$.

È chiaro che risultati analoghi si possono trovare per tutte le forme di grado pari.

Luglio, 1890.

Correzione. Le formule generali del § 8 stanno, come è detto in principio del paragrafo stesso, per forme differenziali, i cui coefficienti sono funzioni qualsiasi delle variabili indipendenti; ma non è esatto asserire che il procedimento indicato conduca alla formazione dei parametri di forme non riducibili a coefficienti costanti, poichè in questo caso le equazioni (11') del § 3 assumono una forma diversa. Il procedimento si deve dunque, per ora, ritenere applicabile soltanto a forme che possono essere ridotte, con opportune trasformazioni di variabili, ad avere tutti i coefficienti costanti.