4. Ueber die Elimination des Knotens in dem Problem der drei Körper.

Von Herrn Professor, Dr. A. Weiler.

Erlauben Sie mir, dass ich auf die in № 1758 gemachten Mittheilungen zurückkomme, um einige Ergänzungen zu machen, wozu mir zunächst die Besprechung desselben Gegenstandes von Seiten des Herrn *Radau* in № 1762 die Anregung gegeben hat.

Die Mittheilung unter 1. in № 1758, über die Elimination des Knotens, habe ich schon früher an einem andern Orte gemacht. Dieselbe ist abgedruckt in dem Bulletin hebdomadaire № 116 de l'Association scientifique de France. Was den Inhalt der Mittheilung betrifft, so hatte schon vorher (1866), was ich erst nachträglich erfahren habe, Herr *Sylvester* in den Philosophical Transactions bemerkt, dass die Elimination des Knotens unabhängig sei von der linearen Transformation, ohne jedoch die Elimination selbst auszuführen. In № 1750 der Astr. Nachr. hat dies Herr *Radau* unternommen. In № 1762 gelangt Herr *Radau* alsdann auf dem von ihm eingeschlagenen Wege zu einfacheren Resultaten, welche mit den in № 1758 von mir aufgestellten im Wesentlichen übereinstimmen. Herr *Radau* giebt (S. 150) die drei Flächenintegrale:

$$mf = K \frac{-z + m(z - z_1)}{r, \sin w, \sin \lambda}, \quad m, f, = K \frac{z + m, (z - z_1)}{r \sin w \sin \lambda},$$

$$\frac{MK \sin \Theta \sin i \sin i,}{mm, rr, \sin w \sin w, \sin^2 \lambda} = \frac{r'}{r} - \frac{r'}{r,} + \frac{f}{r^2} \cot w - \frac{f,}{r,^2} \cot w, .$$

S. 83 habe ich dieselben in der folgenden Form angeschrieben:

$$n \sin w, + \frac{r}{r,} \sin \sigma . n, \sin w + c \sin u, \frac{\sin v}{\sin \Theta} = 0$$

$$n, \sin w + \frac{r,}{r} \sin \sigma . n \sin w - c \sin u \frac{\sin v,}{\sin \Theta} = 0$$

$$\sin \sigma \left(\frac{r'}{r} - \frac{r'}{r,} + \frac{n}{r^2} \cot u - \frac{n,}{r,^2} \cot u, \right) + \frac{nn, \sin \Theta \cos^2 \sigma}{c rr, \sin u \sin u,} = 0$$

Um die Uebereinstimmung der beiderseitigen Resultate herzustellen, bedarf es zunächst der Gleichungen:

$$\sin v, \sin I = \sin \Theta \sin i \quad z = r \sin i \sin u$$

$$\sin v \sin I = \sin \Theta \sin i, \quad z, = r, \sin i, \sin u,$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich in Folge dessen auch schreiben:

$$\frac{n}{c} \sin I \sin w, \cos^2 \sigma + \sin i, \sin u, + \frac{r}{r,} \sin \sigma \sin i \sin u = 0$$

$$- \frac{n}{c} \sin I \sin w \cos^2 \sigma + \sin i \sin u + \frac{r,}{r} \sin \sigma \sin i, \sin u, = 0.$$

Wenn man mit deren Hülfe in dem zweiten Gliede des dritten Integrals das Product nn , eliminirt, so geht dasselbe über in:

$$\frac{c \sin \Theta \sin i \sin i,}{rr, \sin \sigma \sin^2 I \sin w \sin w,} = \frac{r'}{r} - \frac{r'}{r,} + \frac{n}{r^2} \cot w - \frac{n,}{r,^2} \cot w, .$$

Ferner hat man in den von mir aufgestellten Flächenintegralen r und $r,$ zu vertauschen mit $r \sqrt{m(1+m)}$ und $r, \sqrt{m, (1+m)}$. Wenn man schliesslich den Winkel σ , welchem ich die Eigenschaft einer willkürlichen Beständigen beilegen durfte, in eine bestimmte Beziehung zu den Massen bringt, indem man die Gleichungen:

$$\sin \sigma = \sqrt{\frac{mm,}{(1+m)(1+m,)}}, \quad \cos \sigma = \sqrt{\frac{1+m+m,}{(1+m)(1+m,)}}$$

ansetzt, so ist die Uebereinstimmung hergestellt.

Indem ich die beiden willkürlichen Beständigen α und $\alpha,$ in die lineare Transformation:

$$\xi = x \cos \alpha + x, \sin \alpha, , \quad \xi, = x, \cos \alpha, + x \sin \alpha$$

einführe, wird der Ursprung der Coordinaten nach einem beliebigen der Ebene der drei Körper angehörigen Punkte verlegt. Es ist also nachgewiesen, dass auch in diesem Falle die beiden Knoten $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J},$ mit Hülfe des dritten Flächenintegrals gleichzeitig eliminirt werden können. Wenn man von den beiden willkürlichen Beständigen α und $\alpha,$ die eine preisgibt, indem man $\sigma = \alpha + \alpha, = 0$ setzt, so hat man jenes einfachere System Differentialgleichungen, für welches *Jakobi* zuerst die Elimination des Knotens ausgeführt hat.

Die Elimination des Knotens ist, wie man nun gesehen hat, nicht an die Bedingung gebunden, dass die Polarcoordinaten ein kanonisches System herstellen. Aber die Lösung dieser Aufgabe für jenen allgemeinen Fall ist noch in einer andern Beziehung lehrreich. Es ist damit die Vergleichung gegeben für die Lösung des Problems in dem Falle $\sigma = 0$ mit der Lösung für diejenigen Fälle, wo σ einen anderen

Werth hat. Man sieht, dass sich das System in dem Falle $\sigma = 0$ in solchem Maasse vereinfacht, dass gewiss in allen Untersuchungen über Störungen, welche zu einem brauchbaren Resultate führen sollen, die Annahme $\sigma = 0$ festgehalten werden kann. Die Vereinfachung, welche das kanonische System kennzeichnet, ist für die Lösung des Problems ein Gewinn, dessen man sich nicht entäussern darf.

5. Ueber die lineare Transformation in dem Problem der drei Körper.

Wenn die drei Körper durch rechtwinkelige Coordinaten auf einen beliebigen Punkt des Raumes bezogen sind, so ist ihre Bewegung durch neun Differentialgleichungen der zweiten Ordnung ausgedrückt. Die Bewegung in der Richtung der x -Achse bestimmt sich durch die drei Gleichungen:

$$m\xi'' = \frac{dU}{d\xi} \quad m_1\xi_1'' = \frac{dU}{d\xi_1} \quad m_2\xi_2'' = \frac{dU}{d\xi_2},$$

und sechs ähnliche Gleichungen geben die Bewegung in der Richtung der Y - und Z -Achse.

Mittels einer linearen Transformation der rechtwinkligen Coordinaten kann man aus diesem Systeme ein anderes System von sechs ebenso gestalteten Differentialgleichungen herleiten, wodurch die Bewegung zweier Körper unabhängig von der Bewegung des dritten bestimmt ist. Es giebt zwei verschiedene Wege, auf welchen man zu diesem Resultate gelangt. Es ergeben sich aber die Folgerungen, welche sich aus der erwähnten linearen Transformation ziehen lassen, das eine mal nicht ebenso leicht als das andere mal.

Das obige System von neun Differentialgleichungen liefert auf der Stelle die drei Integrale:

$$\begin{aligned} m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 &= C t + D \\ m\eta + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 &= C_1 t + D_1 \\ m\zeta + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 &= C_2 t + D_2. \end{aligned}$$

Wenn der Ursprung des Coordinatensystems fortwährend mit dem gemeinsamen Schwerpunkte der drei Körper zusammenfallend gedacht wird, so verschwinden die sechs willkürlichen Beständigen $C, D, \dots$, und man behält die einfacheren Integrale:

$$\Sigma m\xi = 0, \quad \Sigma m\eta = 0, \quad \Sigma m\zeta = 0.$$

Man verwende dieselben zur Elimination der drei Coordinaten ξ_2, η_2, ζ_2 . Man behält sechs Differentialgleichungen der zweiten Ordnung für die Bewegung der beiden andern

Körper. Die Bewegung in der Richtung der X -Achse bestimmt sich aus den Gleichungen:

$$m\xi'' = \frac{dU}{d\xi} - \frac{dU}{d\xi_2} \frac{d\xi_2}{d\xi}, \quad m_1\xi_1'' = \frac{dU}{d\xi} - \frac{dU}{d\xi_2} \frac{d\xi_2}{d\xi_1};$$

oder auch, indem man abkürzend $m + m_1 + m_2 = M$ setzt, und zugleich die identische Gleichung:

$$\frac{dU}{d\xi} + \frac{dU}{d\xi_1} + \frac{M}{m_2} \frac{dU}{d\xi_2} = 0$$

berücksichtigt, aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi'' &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M} \right) \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{M} \frac{dU}{d\xi_1} \\ \xi_1'' &= \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{M_1} \right) \frac{dU}{d\xi_1} - \frac{1}{M} \frac{dU}{d\xi}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben nicht mehr die kanonische Form. Man setze:

$$\xi = x + l, x_1, \quad \xi_1 = x_1 + l, x.$$

Zwischen den beiden Beständigen l und l , lässt sich eine Bedingungsgleichung aufstellen, wodurch bewirkt wird, dass die Differentialgleichungen zur Bestimmung der neuen Coordinaten x und x_1 , die kanonische Form haben. Dies ist im Wesentlichen derjenige Weg, auf welchem *Jakobi* zur kanonischen Form der Differentialgleichungen der Bewegung gelangt ist.

Ich kehre zurück zu jenen neuen Gleichungen:

$$\xi'' = \frac{1}{m} \frac{dU}{d\xi}, \quad \xi_1'' = \frac{1}{m_1} \frac{dU}{d\xi_1}, \quad \xi_2'' = \frac{1}{m_2} \frac{dU}{d\xi_2},$$

u. s. w. wodurch die drei Körper auf einen beliebigen Punkt des Raumes bezogen sind. Es ist von Wichtigkeit, nicht zu