SUI SISTEMI DI CURVE E DI SUPERFICIE;

Nota del prof. **P. del Pezzo**, in Napoli.

Adunanza del 28 luglio 1889

Nello studio delle singolarità, o dei sistemi di superficie (o curve piane) occorrono spesso i seguenti principî. (*)

1° Una superficie F^n dotata di singolarità qualunque appartiene sempre a sistemi lineari di F^m , con $m \geq n$, aventi le medesime singolarità

2° Le superficie di un determinato ordine m aventi le medesime singolarità di F^n costituiscono un sistema lineare.

3° Se l'ordine m è sufficientemente grande quelle singolarità sono svincolate tra loro rispetto alle F^m , nè i punti dello spazio, o di un determinato luogo, sono aggruppati in modo, che le F^m passanti per un punto debbano passare per gli altri del gruppo.

Qui mi propongo di darne una dimostrazione ricavata dalle cognizioni più elementari nella teoria delle singolarità delle curve piane e superficie.

1. Sia

$$f^n(x, y) = f_r + f_{r+1} + \dots + f_n = 0 \quad (1)$$

(*) Nella mia Nota « *Estensione di un teorema di Noether* (Questi Rendiconti, t. II, 1888) tutto il ragionamento è basato su questi principî.

l'equazione di una curva piana dell'ordine n , che passa con r rami pel centro O delle coordinate, indicando al solito con f_i un polinomio omogeneo del grado i in x ed y . Sia O l'origine di diversi *cicli*, uno dei quali d'ordine a di classe α e colla tangente $bx - y = 0$ rappresentato dalle relazioni (*)

$$x = t^\alpha, \quad y = S(t) = bt^\alpha + ct^{\alpha+\alpha} + \dots \quad (2)$$

È noto, che a definire a ed α e gli *esponenti caratteristici* della serie $S(t)$ concorrono solamente i termini della (1) dei gradi più piccoli, p. e. minori di $r + s \leq n$. Sicchè, se $h > n$, l'equazione

$$f^h(x, y) = f_r + f_{r+1} + \dots + f_n + f_{n+1} + \dots + f_h = 0 \quad (3)$$

rappresenta una curva piana dell'ordine h , che in generale ha nell'origine O e nella direzione $bx - y = 0$ il medesimo ciclo (2).

Similmente dicasi per gli altri cicli, che hanno l'origine in O e le direzioni $b'x - y = 0$, $b''x - y = 0$, ecc e si conchiuderà, che le curve (1) e (3) passano per O in generale con la stessa singolarità, salvo quando per valori speciali delle costanti arbitrarie contenute in (3) questa abbia in O una singolarità *più elevata*.

2. Più brevemente può dirsi: nelle vicinanze di O x ed y sono piccolissime, sicchè ritenendo in (1) i termini infinitesimi di un ordine non superiore ad $r + s \leq n$, la singolarità di f^n è sufficientemente definita, e quindi la f^h , pel modo come è formata la sua equazione, avrà in generale in O la medesima singolarità di f^n .

3. Pongasi

$$F^h = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_h = 0,$$

che rappresenta una curva d'ordine h , per la quale il punto O è

(*) Per le definizioni e notazioni qui adottate cfr Halphen, *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, nella traduzione francese del trattato sulle curve piane del Salmon.

$(n + 1)$ -plo. S'indichi con $\phi^{b-n} = 0$ l'equazione di una curva d'ordine $b - n$, che non passi per O . La curva composta $f^n \phi^{b-n} = 0$ ha evidentemente in O la medesima singolarità della f^n , e quindi anche pel n° prec. la curva $f^n \phi^{b-n} + F^b = 0$. Riassumendo:

Se f^n è una data curva piana dotata nei punti $O, O', O'', \dots$ di singolarità qualunque $\omega, \omega', \omega'' \dots$, e ϕ^{m-n} (con m quanto si voglia grande) è una curva arbitraria, che non passi per i punti $O, O', \dots$; ed F^m è una curva arbitraria che passa con $n + 1$ rami per ogni punto $O, O', \dots$ le curve del sistema

$$\psi^m = f^n \phi^{m-n} + F^m = 0 \quad (4)$$

hanno in generale nei punti O le medesime singolarità della f^n .

Il sistema (4) è lineare, il numero delle sue dimensioni può rendersi grande quanto si vuole. Inoltre quando in esso si introducano delle curve $\psi^{m_1}, \psi^{m_2}, \dots$, le quali abbiano ciascuna in un punto $O^{(i)}$ rispettivamente la singolarità $\omega^{(i)}$, senza passare per gli altri punti O , e che prese insieme ($m_1 + m_2 + \dots = m$) costituiscano una ψ^m , le singolarità $\omega^{(i)}$ saranno *svincolate* tra loro rispetto alle ψ^m .

4. Riterremo, che due superficie hanno nel punto O o lungo la curva L la medesima singolarità ω , o λ , quando un piano qualunque σ le taglia secondo due curve, che hanno in O , ovvero in tutti i punti $L\sigma$, le medesime singolarità

5. Sia $F^n = 0$ una superficie, che abbia lungo le curve $L_1, L_2, \dots, L_s$ singolarità date $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ e nei punti $P_1, P_2, \dots, P_t$ singolarità date $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$. Denotino $\Phi^{m-n} = 0$ e $\Phi^m = 0$ due superficie arbitrarie, delle quali la prima non passa per le curve L nè per i punti P , per la seconda ogni punto P è $(n + 1)$ -plo ed ogni curva L è $(n + 1)$ -pla. Le superficie del sistema

$$F^m = F^n \Phi^{m-n} + \Phi^m = 0 \quad (5)$$

hanno in generale nei punti P e lungo le curve L le medesime singolarità della F^n .

Ciò deriva immediatamente dai n° 3 e 4

6 Si assoggettino ancora le superficie F'' a passare per un certo numero di punti semplici arbitrari di F'' , $Q_1, Q_2, \dots$ e per un certo numero di punti arbitrari dello spazio, $R_1, R_2, \dots$; se ne otterrà un sistema Σ .

Sieno $F^{l_1}, F^{l_2}, \dots, F^{p_1}, F^{p_2}, \dots$ delle superficie, che abbiano rispettivamente lungo la curva L_i e nel punto P_i , le singolarità $\lambda_i \in \pi_i$, senza passare per rimanenti punti P e curve L , nè per punti Q ed R , e sieno $F^{q_1}, F^{q_2}, \dots, F^{r_1}, F^{r_2}, \dots$ delle superficie passanti rispettivamente per i punti Q_i ed R_i , senza passare per rimanenti punti Q ed R nè per punti P e le curve L .

Prendasi

$$m = l_1 + l_2 + \dots + p_1 + p_2 + \dots + q_1 + q_2 + \dots + r_1 + r_2 + \dots,$$

sarà

$$F'' \equiv F^{l_1} F^{l_2} \dots F^{p_1} F^{p_2} \dots F^{q_1} F^{q_2} \dots F^{r_1} F^{r_2} \dots$$

una superficie di Σ . Ne risulta, che il sistema (5) gode delle seguenti proprietà:

1° Le singolarità λ e π sono svincolate tra loro rispetto alle superficie generiche del sistema.

2° Le superficie di (5) passanti per un punto qualunque Q di F'' non dovranno di necessità passare per altri punti di F'' .

3° Le superficie di (5) passanti per un punto qualunque R dello spazio non dovranno di necessità passare per altri punti.

7 Le superficie del sistema (5) non sono tutte quelle d'ordine m dotate lungo le curve L e nei punti P delle singolarità date λ e π . Dimostreremo, che il sistema Σ' di tutte le superficie di un determinato ordine m , che hanno le dette singolarità, è lineare: poichè Σ' contiene Σ ne risulterà, che esso gode anche delle proprietà qui sopra enumerate.

Sieno $F_1^m, F_2^m, \dots, F_k^m$ k superficie indipendenti (cioè non ap-

partenenti ad un sistema lineare con meno di $k - 1$ dimensioni) che abbiano in comune delle curve L e dei punti P comunque singolari, dico che tutte le superficie d'ordine m , che passano per la loro comune intersezione, formano un sistema lineare Σ' .

Infatti, le superficie del sistema

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \dots + \lambda_k F_k = 0 \quad (6)$$

appartengono a Σ' , e se non costituiscono tutto Σ' , ve ne sarà una F_{k+1} contenuta in Σ' e non in (6). Allora tutte le superficie del sistema

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_k F_k + \lambda_{k+1} F_{k+1} = 0 \quad (7)$$

appartengono a Σ' . E così di seguito. Onde si scorge per assurdo, che Σ' dev'essere lineare.

Napoli, 26 luglio 1889.

P. DEL PEZZO.