Geometrische Illustration der Gleichungen Lamberts und Eulers.

Von S. Tscherny.

Bei der Untersuchung der Lambertschen Gleichung kommt Gauß (Theoria motus, Art. 106) zu dem Schluß, daß, wenn die große Halbachse einer Ellipse, die Summe der Radienvektoren zweier Punkte der Ellipse und die diese beiden Punkte verbindende Sehne gegeben sind, die zur Bewegung vom ersten zum zweiten Punkt erforderliche Zeit vierfach bestimmt ist und, wenn die Richtung der Bewegung gegeben ist, zweifach. Diese analytische Untersuchung illustriert Gauß auch geometrisch.

Im vorliegenden Aufsatz wollen wir eine geometrische Illustration der Eulerschen und der Lambertschen Gleichung für die Hyperbel geben. Zu diesem Zwecke müssen wir uns zunächst mit der schon von Lambert¹⁾ behandelten Aufgabe beschäftigen, eine Parabel zu konstruieren, wenn ihr Brennpunkt und zwei ihrer Punkte gegeben sind. Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir von der Eigenschaft der Parabel aus, daß ein jeder ihrer Punkte gleich weit von ihrem Brennpunkt und ihrer Direktrix entfernt ist. In Fig. 1 soll S der Brennpunkt, P_1 und P_2 zwei gegebene Punkte der Parabel sein. Beschreiben wir um die Punkte P_1 und P_2 zwei Kreise mit den Halbmessern P_1S beziehungsweise P_2S , so wird auf Grund der oben erwähnten Eigenschaft der Parabel jede der beiden gemeinsamen Tangenten dieser Kreise die Direktrix der Parabel sein können. Wir erhalten daher zwei Parabeln. Um die Achsen derselben zu konstruieren, fällen wir vom Brennpunkte aus die Perpendikel SE bzw. SF auf die beiden Direktrix, deren Halbierungspunkte L_1 bzw. L_2 die Scheitel sind. Die beiden den Bedingungen unserer Aufgabe genügenden Parabeln unterscheiden sich dadurch, daß die Differenz der wahren Anomalien der gegebenen zwei Punkte für die eine Parabel das Komplement zu 360° der Differenz der wahren Anomalien derselben Punkte für die andere Parabel ist²⁾. Offenbar wird die Bewegung eines sich nach den Keplerschen Gesetzen bewegenden Punktes von dem Orte P_1 zum Orte P_2 auf jeder dieser Parabeln in verschiedenen Zeiten ausgeführt, und darum ist, wenn die Summe der Radienvektoren zweier Orte eines Himmelskörpers und die die Endpunkte dieser Radienvektoren verbindende Sehne gegeben

Fig. 1.

sind, die Zeit der Bewegung auf der Parabel von einem Orte zum anderen zweifach bestimmt. Analytisch entspricht das dem doppelten Vorzeichen des zweiten Gliedes der Gleichung Eulers: $kt = \frac{1}{6} [(r + r' + q)^{3/2} \mp (r + r' - q)^{3/2}]$.

Der zum oberen Vorzeichen gehörende Wert von t ergibt die Differenz der wahren Anomalien $< 180^\circ$, und der zweite, mit dem unteren Vorzeichen folgende Wert von t macht die Differenz der wahren Anomalien $> 180^\circ$.

Untersuchen wir den speziellen Fall, wenn die Punkte P_1 und P_2 mit S auf einer Geraden liegen. Dann werden die Kreise, welche um diese Punkte mit den Halbmessern P_1S und P_2S (Fig. 2) beschrieben werden, in S eine dritte gemeinsame Tangente haben, welche einer Parabel entspricht, die sich in die Gerade P_1P_2 zusammengezogen hat; aber diese Gerade genügt nicht den mechanischen Bedingungen der Aufgabe, da wir voraussetzen, daß der Brennpunkt S den sich bewegenden Punkt anzieht. Die beiden anderen Lösungen ergeben sich in derselben Weise wie vorhin, und man kann sich leicht überzeugen, daß die entstehenden Parabeln mit den Scheiteln M und N gleich sind ($SM = SN$) und bezüglich der Geraden P_1P_2 symmetrisch liegen; darum wird die Bewegung des Punktes von P_1 nach P_2 auf einer jeden dieser Parabeln in ein und derselben Zeit ausgeführt.

Die Gleichung Eulers ergibt, da jetzt $r + r' = q$ zu setzen ist,

$$kt = \frac{\sqrt{2}}{3} q^{3/2};$$

woraus t eindeutig bestimmt ist.

Es erübrigt noch, den Spezialfall zu erwähnen, daß die um P_1 und P_2 beschriebenen Kreise sich gegenseitig von innen berühren; dann werden die Parabeln zu einer Geraden werden, die durch die Punkte P_1 , P_2 und S hindurchgeht; die Bewegung auf dieser Geraden wird reale Bedeutung haben, wenn die Lage der Punkte P_1 und P_2 bezüglich S der Bewegung eines Punktes entspricht, die unter dem Einfluß der Anziehung dieses Punktes durch den Punkt S vor sich geht.

¹⁾ Vgl. Lambert, Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Kometen, herausgegeben von J. Bauschinger, pag. 12 u. 132.

²⁾ Diese Konstruktionsmethode wird auch erwähnt in Moulton »An introduction to celestial mechanics« pag. 321.

Zur geometrischen Illustration der Gleichung Lamberts für die Hyperbel benutzen wir die Eigenschaft derselben, daß die Differenz der Radienvektoren eines ihrer Punkte gleich ist ihrer Hauptachse $2a$. In Fig. 3 sollen S , P_1 und P_2 den Brennpunkt, die erste und die zweite Lage des sich auf einer Hyperbel mit der gegebenen großen Achse $2a$ bewegenden Punktes bezeichnen. Um die Punkte P_1 und P_2 beschreiben wir Kreise mit den Halbmessern $2a + P_1S$ und $2a + P_2S$. Diese beiden Kreise werden sich im allge-

Fig. 3.

meinen in zwei Punkten S_1 und S_1' schneiden, die die zweiten Brennpunkte der beiden den Bedingungen der Aufgabe genügenden Hyperbeln sein werden. Verbinden wir S mit S_1 und S_1' , so erhalten wir die Richtungen der Hauptachsen. Durch die Hauptachse und die Brennpunkte ist die Gestalt der Hyperbeln bestimmt; es haben für uns nur die Zweige der Hyperbeln eine Bedeutung, welche mit ihrer konkaven Seite dem Brennpunkt S , in welchem die anziehende Masse sich befindet, zugekehrt sind. Wie Fig. 3 zeigt, ist die Differenz der wahren Anomalien der gegebenen zwei Punkte für die eine Hyperbel das Komplement zu 360° der Differenz der wahren Anomalien derselben Punkte für die andere Hyperbel. Die Bewegung von dem einen gegebenen Orte zum anderen wird auf den beiden Hyperbeln in verschiedenen Zeiten vollendet. Die Gleichung Lamberts für die Hyperbel (Theoria motus, Art. 109)

$$\frac{kt}{a^{3/2}} = 2m\sqrt{1+m^2} \mp 2n\sqrt{1+n^2} - 2\log(\sqrt{1+m^2} + m) \pm 2\log(\sqrt{1+n^2} + n)$$

sagt analytisch dasselbe aus, indem die oberen Vorzeichen derjenigen Hyperbel entsprechen, für welche die Differenz der wahren Anomalien zweier gegebener Punkte $< 180^\circ$ ist, während die unteren Vorzeichen zu der Hyperbel gehören, für welche die Differenz der wahren Anomalien zweier gegebener Punkte $> 180^\circ$ ist.

Schließlich wollen wir noch zeigen, wie man die Olbersche Methode zur Bestimmung parabolischer Kometenbahnen geometrisch illustrieren kann. Bei der Berechnung parabolischer Kometenbahnen nimmt man drei vollständige Beobachtungen als gegeben an. Diese bestimmen die Lage dreier Geraden im Raume. Denken wir uns nun durch den Mittelpunkt der Sonne eine unbegrenzte Zahl von Ebenen gelegt, so wird im allgemeinen jede dieser Ebenen von den Geraden, die durch die erste und dritte Beobachtung bestimmt sind, in zwei Punkten geschnitten werden. Wenn wir die Lage dieser zwei Punkte und den Brennpunkt der Parabel (den Mittelpunkt der Sonne) kennen, so können wir in jeder dieser

Ebenen, wie oben gezeigt, je zwei Parabeln konstruieren. Da uns außerdem die Zeit zwischen den beiden äußeren Beobachtungen gegeben ist, können wir die Eulersche Gleichung benutzen, um diejenige der beiden Parabeln zu wählen, welche einer Kometenbewegung entsprechen würde, wenn die Schnittpunkte der beiden Geraden mit der Ebene die wahren Örter des Kometen wären. Bei der Bestimmung einer ganz unbekannten Kometenbahn nach Olbers' Methode hätten wir in jeder der Ebenen diejenige Parabel zu wählen, welche dem negativen Vorzeichen des zweiten Gliedes in der Eulerschen Gleichung entspricht. Die durch die zweite Beobachtung des Kometen bestimmte Gerade hat nun mit den einzelnen Ebenen gleichfalls einen Punkt gemein, und dieser Punkt wird im allgemeinen in n verschiedenen Ebenen, wo $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ist, auf einer der Parabeln liegen können. Wenn $n = 0$ ist, können drei gegebene Beobachtungen durch keine Parabel dargestellt werden, und unsere Aufgabe hat keine einzige Lösung.

Kiew, 1908 März.

S. Tscherny.

Über den Lichtwechsel von R Coronae borealis.

Von H. Ludendorff.

R Coronae borealis gehört zu den unregelmäßig veränderlichen Sternen; die Hoffnung, irgendwelche Gesetzmäßigkeiten in dem Verlaufe seiner Lichtschwankungen feststellen zu können, hat mich veranlaßt, alle vorhandenen Beobachtungen dieses Veränderlichen einer einheitlichen Bearbeitung zu unterwerfen. Wenn nun diese Hoffnung auch im wesentlichen trügerisch gewesen ist, so möchte ich doch die Resultate meiner Untersuchung hier kurz wiedergeben. In aller Ausführlichkeit wird meine Arbeit in den Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums abgedruckt werden.

Der Bearbeitung wurde das gesamte bisher veröffentlichte Beobachtungsmaterial zugrunde gelegt, und ich konnte außerdem mehrere nicht publizierte Beobachtungsreihen heran-

ziehen. Im ganzen standen mir für die Zeit von 1783 bis 1905 mehr als 5000 einzelne Beobachtungen zur Verfügung.

Die Größen einer beträchtlichen Anzahl von Vergleichsternen für R Coronae sind auf dem Harvard Observatorium bestimmt worden ¹⁾. Diese Größen wurden benutzt, um die Stufenschätzungen der verschiedenen Beobachter auf ein einheitliches System zu reduzieren.

Während für die Zeit vom Jahre 1783, in welchem Pigott seine ersten Beobachtungen von R Coronae aufgezeichnet hat, bis 1843 nur wenige Helligkeitsschätzungen des Veränderlichen vorliegen, ist er von 1843 an sehr häufig beobachtet worden, und ich konnte daher für das Zeitintervall von 1843 bis 1905 eine Lichtkurve von R Coronae zeichnen,

¹⁾ Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College, Vol. 37, Part II; ferner auch Vol. 29 und 45.