**14. Über die Ausbreitung elektromagnetischer
Wellen in dispergierenden Medien;
von W. Esmarch.**

1. Der Vorgang der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem mit Elektronen oder Ionen beladenen Medium ist bisher meist in der Weise behandelt worden, daß in dem Grundschemata der Maxwellschen Gleichungen als Ausdruck für die Dichte des Stromes die Summe von Verschiebungs- und Polarisationsstrom gesetzt wurde und die Polarisation als Funktion der im betrachteten Punkt herrschenden Feldstärke aus einer Schwingungsgleichung bestimmt wurde. Es wird dabei ausschließlich der stationäre Schwingungszustand in Betracht gezogen, und die sich ergebenden Ausdrücke für Brechungsexponent, Absorptionskoeffizient usw. beziehen sich auch nur auf diesen Fall. Diese Art der Behandlung ist zwar formal sehr einfach, hat aber den großen Nachteil, daß sie das eigentliche physikalische Wesen des Vorganges durchaus im Dunkeln läßt — ein Umstand, der schon öfters zu Unklarheiten und Mißverständnissen Veranlassung gegeben hat. So ist man sich beispielsweise lange Zeit hindurch nicht darüber klar gewesen, daß die beobachtbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit stationär ausgebildeter Wellen in einem ponderablen Medium nichts weiter als die Geschwindigkeit ist, mit der die Phase der Welle sich ausbreitet, während die sogenannte Signalgeschwindigkeit stets der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gleich ist — ein Punkt, der erst in einer neueren Arbeit von Hrn. A. Sommerfeld¹⁾ endgültig klargestellt worden ist. Ein weiterer Übelstand der gewöhnlichen Behandlungsweise ist der, daß sie bloß stationäre Schwingungszustände beherrscht. Denn wenn man zur Behandlung solcher Fälle übergehen will, bei denen die

1) A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 8. p. 841. 1907; Festschr. für H. Weber 1912.

freien Schwingungen der Elektronen eine überwiegende Rolle spielen, läßt diese Methode in Stich und das Fehlen einer klaren physikalischen Anschauung macht sich hier höchst unangenehm fühlbar. Nun haben bereits Lord Rayleigh,¹⁾ N. Kasterin²⁾ und andere den Durchgang akustischer Wellen durch ein mit festen Teilchen erfülltes Medium behandelt, indem sie die durchgehende Welle berechneten, die durch Superposition der primären und der von den Teilchen reflektierten Wellen gebildet wird. Es zeigte sich, daß die Phasengeschwindigkeit (und die Amplitude) der Wellen durch die Sekundärwellen abgeändert wird in Abhängigkeit von der Wellenlänge, und Hr. N. Kasterin, der das Problem unter sehr allgemeinen Bedingungen behandelte, zeigte, daß die Dispersionskurve in ihren Hauptzügen den aus der Optik bekannten Verlauf nimmt. Trotz dieser Arbeiten scheinen mir aber in dem analogen Vorgang des Durchganges elektromagnetischer Wellen durch ein ponderables Medium manche Punkte noch unaufgeklärt zu sein, vor allem was den Vorgang der Reflexion anbetrifft. Dieser ist bisher immer nur formal aus der Annahme von Grenzbedingungen gefolgert aber in seinen Einzelheiten nicht hinreichend klar verstanden worden. Im Grunde genommen ist ja die Methode der Grenzbedingungen ihrem Wesen nach der Elektronentheorie fremd: denn diese beansprucht alle Wirkungen allein aus der Verteilung und Bewegung der Elektronen abzuleiten. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, diese Lücken der Theorie auszufüllen.

Das Problem wird nach zwei etwas abweichenden Methoden behandelt: die zweite dieser Methoden ist etwas weniger einfach als die erste aber weit allgemeiner und ihrem Wesen nach auch auf den nichtstationären Anfangszustand anwendbar. Doch will ich von diesem letzteren zunächst noch absehen und behalte mir vor, darauf in einem weiteren Aufsatz einzugehen.

2. Wir wollen annehmen, daß eine ebene Welle in Richtung der positiven x durch ein mit schwingungsfähigen Elektronen beladenes unbegrenztes Medium zieht. Durch parallele zur X -Achse

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 47. p. 377. 1899.

2) N. Kasterin, Verslagen, Kon. Akad. Amsterdam 1898. p. 460; Dissert. (russ.) 1903.

senkrechte Ebenen teilen wir unser Medium in dünne Schichten, deren Dicke dx *klein gegen die Wellenlänge* des durchgehenden Wellenzuges sei, trotzdem aber noch in jedem endlichen Teil eine große Anzahl Elektronen enthalte. In jeder Schicht werden dann die Elektronen in Abhängigkeit von der elektrischen Kraft der einfallenden Welle etwa in Richtung der Z-Achse schwingen und zwei ebene elektromagnetische Wellen nach beiden Seiten der betrachteten Schicht aussenden, wie in § 3 näher ausgeführt wird. Infolgedessen wird das Medium an jeder Stelle von zwei Wellenzügen von entgegengesetzter Fortpflanzungsrichtung durchsetzt: der erste Wellenzug setzt sich zusammen aus der Primärwelle und den in der Richtung der positiven x fortschreitenden Sekundärwellen (erstes System der Sekundärwellen); er bildet die *durchgehende* Welle. Der zweite Wellenzug setzt sich zusammen aus den in Richtung der negativen x fortschreitenden Sekundärwellen (zweites System der Sekundärwellen) und bildet die *reflektierte* Welle. Was nun die elektrische Kraft anbetrifft, die in einer bestimmten Schicht die dort befindlichen Elektronen zu Schwingungen anregt, so ist dieselbe natürlich gleich der *Summe* der elektrischen Vektoren der beiden die Schicht passierenden Wellenzüge, des durchgehenden und des reflektierten; sie ist nicht etwa identisch mit der elektrischen Kraft der durchgehenden Welle (Primärwelle + erstes System der Sekundärwellen), und es ist sehr wichtig, diesen Umstand stets im Auge zu behalten. Sind wir imstande die Sekundärwellen zu berechnen, so können wir auch sogleich die resultierenden Wellen (durchgehende und reflektierte) bestimmen, sowie Absorptions- und Brechungsexponenten ermitteln. Interessant ist, daß also auch die Reflexion in unserer Betrachtungsweise sich als ein Strahlungsvorgang darstellt, der in *sämtlichen* Schichten des von der Primärwelle durchlaufenen Mediums seinen Ursprung nimmt, nicht etwa bloß in der Nähe der Grenzschicht infolge des Bestehens von Grenzbedingungen.

3. Um nun die soeben geschilderten Vorgänge quantitativ zu verfolgen, müssen wir zunächst die elektrischen und magnetischen Wellen berechnen, die von einer ebenen, sehr dünnen Schicht ausgesandt werden, wenn in dieser Schicht sämtliche schwingungsfähigen elektrischen Ladungen mit gleicher Am-

plitude und gleicher Phase in einer bestimmten, der Schicht parallelen Richtung schwingen. Es sei z. B. die Schicht mit Dipolen von veränderlichem Moment erfüllt. Sind dieselben hinlänglich dicht gelagert, so wird die Dichte der elektrischen Ladung in jedem Raumelement der Schicht dauernd gleich Null sein. Daher kann auch das skalare elektromagnetische Potential gleich Null angenommen werden, und es bleibt nur noch übrig, das Vektorpotential zu berechnen.

Wir verlegen den Ursprung des Koordinatensystems in die Schicht und stellen uns vor, daß die Schwingungen parallel der Z -Achse erfolgen. Bedeutet dann $P(t)$ das Moment eines Dipoles in der betrachteten Schicht zur Zeit t , N die Anzahl der Dipole im Kubikzentimeter der Schicht, so finden wir als Ausdruck für das Vektorpotential A , falls wir den Konvektionsstrom elektrostatisch messen:

$$A = \frac{N}{c} \int \frac{d\tau}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} P \left(t - \frac{r}{c} \right) = -N \int \frac{d\tau}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} P \left(t - \frac{r}{c} \right),$$

wo die Integration über die gesamte Schicht auszudehnen ist und mit r der Abstand des Aufpunktes von einem Raumelement $d\tau$ der Schicht bezeichnet ist. Da P in jedem Punkt der Z -Achse parallel ist, so hat auch A diese Richtung. Die Integration ist leicht auszuführen und ergibt, wenn x den senkrechten Abstand des Aufpunktes von der Schicht (deren Dicke dx sei) bedeutet

$$\begin{aligned} A &= -2\pi N dx \int d\tau \cdot \frac{\partial}{\partial r} P \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= -2\pi N dx \{P_{r=\infty} - P_{r=x}\}, \end{aligned}$$

d. h. also

$$(1) \quad A = 2\pi N dx P \left(t \mp \frac{x}{c} \right)$$

bei passender Festsetzung über $P_{r=\infty}$.

Weiterhin ist in unserem Fall:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial A}{\partial x},$$

daher, wie leicht zu ersehen:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -\frac{2\pi}{c} N dx \dot{P} \left(t \mp \frac{x}{c} \right), \\ \mathfrak{H}_y = \pm \frac{2\pi}{c} N dx \dot{P} \left(t \mp \frac{x}{c} \right). \end{cases}$$

Im Ausdruck für die magnetische Kraft ist hier für $x > 0$ das positive Vorzeichen, für $x < 0$ dagegen das negative zu nehmen.

Die gefundenen Ausdrücke stellen zwei ebene elektromagnetische Wellen dar, die sich in entgegengesetzten Richtungen von der Schicht aus fortpflanzen. Bei der weiteren Behandlung unseres Problems können wir nach zwei verschiedenen Methoden verfahren.

A. Erste Methode.

4. Es bedeute E' die elektrische Feldstärke der durchgehenden Welle (primäre + erstes System der Sekundärwellen) in einer bestimmten Schicht unseres Mediums. Beim Durchgang durch die nächstfolgende Schicht tritt zu ihr die in dieser Schicht erregte Sekundärwelle. Die elektrische Kraft der Welle wird nach Passierung dieser Schicht:

$$E = E' - \frac{2\pi}{c} N dx \cdot \dot{P} \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Durch das Zusatzglied wird im allgemeinen sowohl Phase als Amplitude abgeändert, und zwar werden diese Veränderungen wegen des Faktors bei $\dot{P}(t - x/c)$ proportional zu dx sein: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Phase wird im Medium eine andere sein als im Vakuum, und außerdem wird die Welle im allgemeinen gedämpft sein. Wir wollen diese Veränderungen berechnen, zuerst für den Fall schwacher Absorption, sodann für den allgemeinen Fall.

5. *Fall schwacher Absorption.* Die Absorption sei sehr gering in einer Schicht, deren Dicke von der Ordnung der Wellenlänge ist. Dieser Fall bietet geringeres Interesse dar, doch dient er passend als Vorbereitung zur Behandlung des allgemeineren Falles. Die Rechnung gestaltet sich hier besonders einfach. Es ist nämlich zu beachten, daß unter den angenommenen Verhältnissen Phase und Amplitude der Primärwelle selbst beim Durchgang durch eine Schicht von endlicher Dicke durch die Sekundärwellen nur wenig abgeändert werden. In jedem Punkte der von der Welle durchlaufenen Strecke sind daher die elektrische Kraft der Primärwelle, die elektrische Kraft der durchgehenden Welle (Primärwelle + erstes System

der Sekundärwellen), und die gesamte im betrachteten Punkt herrschende elektrische Feldstärke (der durchgehenden + der reflektierten Welle) nur wenig voneinander verschieden. Wir begehen also auch nur einen kleinen Fehler, wenn wir die auf die Elektronen wirkende Kraft einfach der elektrischen Kraft der durchgehenden Welle gleichsetzen. Wir erhalten dann folgenden Ansatz:

$$(3) \quad E = E' - 2\pi N \frac{dx}{c} \cdot \dot{P} \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

$$(4) \quad \ddot{P} + 2b\dot{P} + K^2 P = \frac{e^2}{m} E'.$$

Sind die einfallenden Wellen zeitlich ungedämpft, so sind es auch die durchgehenden und E' kann für $x = 0$ (d. h. in der betrachteten Schicht) von der Form angenommen werden:

$$(5) \quad E' = Z \cdot e^{i\nu t}.$$

Dies ergibt in (4) eingesetzt für $\dot{P}$:

$$(6) \quad \dot{P} = i\nu \cdot Z \frac{e^2}{m\varrho} \cdot e^{-i\nu\psi} \cdot e^{i\nu t}$$

mit

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^2 = (\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4b^2\nu^2 \\ \text{und} \\ \tan \nu\psi = \frac{2b\nu}{\nu_0^2 - \nu^2}. \end{array} \right.$$

Substituiert man (6) in (3), so erhält man für die elektrische Feldstärke unmittelbar hinter der betrachteten Schicht:

$$\begin{aligned} E &= Z \cdot e^{i\nu \left(t - \frac{dx}{c} \right)} - 2\pi N \frac{e^2}{m\varrho} e^{-i\nu\psi} \cdot i\nu \frac{dx}{c} \cdot Z e^{i\nu \left(t - \frac{dx}{c} \right)}, \\ &= Z \cdot e^{i\nu \left(t - \frac{dx}{c} \right)} \left(1 - 2\pi N \frac{e^2}{m\varrho} e^{-i\nu\psi} \cdot \frac{i\nu}{c} dx \right). \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$A = 2\pi N \frac{e^2}{m\varrho} e^{-i\nu\psi},$$

so kann der vorstehende Ausdruck offenbar auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} E &= Z \cdot e^{i\nu \left(t - \frac{dx}{c} \right)} \cdot e^{-\frac{i\nu}{c} A dx}, \\ &= Z \cdot e^{i\nu \left(t - \frac{dx}{c} (1 + A) \right)}, \\ &= Z \cdot e^{i\nu \left(t - \frac{\nu dx}{c} \right)} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für den komplexen Berechnungsexponenten $p = n - i\kappa$ den Ausdruck:

$$p = n - i\kappa = 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m q} \cdot e^{-i\nu\psi},$$

d. h.

$$(8) \quad \begin{cases} n = 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m q} \cos \nu \psi, \\ \kappa = 2\pi N \frac{e^2}{m q} \sin \nu \psi. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (7) ergibt sich hieraus:

$$(9) \quad \begin{cases} n = 1 + 2\pi N \frac{e^2}{m} \cdot \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4b^2\nu^2}, \\ \kappa = 2\pi N \frac{e^2}{m} \cdot \frac{2b\nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4b^2\nu^2}. \end{cases}$$

Es sind dies bekannte Ausdrücke, die z. B. in etwas anderer Form H. A. Lorentz¹⁾ für diesen Fall schwacher Absorption ableitet. Es sei hier noch besonders hervorgehoben, daß die vereinfachende Annahme, die wir in dem soeben behandelten Fall zu machen berechtigt waren, gerade einen Hauptpunkt im Wesen dieser Vorgänge vollständig verwischt: den Unterschied zwischen der die Elektronen erregenden Kraft und dem elektrischen Vektor der durchgehenden Welle.

6. *Fall beliebiger starker Absorption.* Indem wir nun zur Behandlung des allgemeinen Falles übergehen, bemerken wir zunächst, daß bekanntlich die Amplitude der magnetischen Welle im Inneren eines jeden ponderablen Mediums verschieden ist von der Amplitude der elektrischen Welle am gleichen Ort. Im Falle merklicher Absorption tritt hierzu noch ein konstanter Phasenunterschied. Dieses wird nun durchaus verständlich von unserem Standpunkte aus: denn in Wirklichkeit ist es nicht *eine* Welle, die das Medium in jedem Punkt durchsetzt, sondern stets *zwei*, die in entgegengesetzten Richtungen fortschreiten: die durchgehende und die reflektierte Welle. Der magnetische Vektor kehrt aber sein Vorzeichen um, wenn wir die Fortpflanzungsrichtung in die entgegengesetzte verändern. Hieraus folgt, daß die Amplituden der magnetischen und der elektrischen Kraft in einem gegebenen Punkt im In-

1) H. A. Lorentz, The theory of Electrons p. 154.

neren des Mediums nicht gleich sein können. Aus den Maxwell'schen Grundgleichungen folgt bekanntlich die Beziehung:

$$H = p E$$

wenn wieder

$$p = n - i \kappa$$

bedeutet. In jedem Punkt unseres Mediums muß daher:

$$\begin{aligned} E_a + E_r &= E \\ H_a + H_r &= p E \end{aligned}$$

sein.¹⁾ Da nun in der durchgehenden Welle $E_a = H_a$, und in der reflektierten $E_r = -H_r$ ist, so folgt:

$$(10) \quad \begin{cases} E_a + E_r = E \\ E_a - E_r = p E \end{cases}$$

und daher:

$$(11) \quad E = \frac{2 E_a}{p + 1}$$

für jeden Punkt im Inneren unseres Mediums. Es ist dies die Kraft, die die Elektronen zu Schwingungen anregt. Im Falle schwacher Absorption ist κ wenig von Null und n wenig von 1 verschieden. Daher kann in diesem Falle die die Elektronen anregende Kraft mit hinreichender Annäherung gleich der elektrischen Kraft der durchgehenden Welle angenommen werden, wie dies in Abschnitt 5 geschehen ist. Im allgemeinen Fall ist aber diese Vereinfachung nicht zulässig. Unser Ansatz wird jetzt:

$$E_a = E_a' - 2\pi N \frac{dx}{c} \dot{P} \left(t - \frac{dx}{c} \right),$$

$$\ddot{P} + 2b \dot{P} + K^2 P = \frac{2 E_a' \frac{e^2}{m}}{p + 1}.$$

Nehmen wir wieder E_a' für $x = 0$ von der Form

$$E_a' = Z e^{i\nu x}$$

an, so wird jetzt:

$$P = \frac{2 E_a' \frac{e^2}{m}}{p + 1} e^{-i\nu x}$$

daher:

1) In Absatz 7 wird näher ausgeführt, dank welchem Umstand diese Beziehungen erfüllbar sind.

$$\begin{aligned} E_d &= Z e^{i\nu\left(t - \frac{dx}{c}\right)} - \frac{i\nu}{c} \cdot \frac{A dx}{p+1} \cdot Z e^{i\nu\left(t - \frac{dx}{c}\right)}, \\ &= Z e^{i\nu\left(t - \frac{dx}{c}\right)} \left(1 - \frac{i\nu}{c} \cdot \frac{A dx}{p+1}\right), \\ &= Z e^{i\nu\left(t - \frac{dx}{c}\left(1 + \frac{A}{p+1}\right)\right)}, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$(12) \quad 4\pi N \frac{e^2}{mq} \cdot e^{-i\nu\psi} = A$$

gesetzt wird. Da dieser Ausdruck gleich $Z e^{i\nu\left(t - \frac{p dx}{c}\right)}$ sein soll, so folgt hieraus

$$p = 1 + \frac{A}{p+1},$$

oder:

$$(13) \quad p^2 = 1 + A.$$

Nach Trennung des Reellen vom Imaginären erhält man hieraus:

$$(13a) \quad \begin{cases} n^2 - \kappa^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m} \cdot \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4b^2\nu^2}, \\ 2n\kappa = 4\pi N \frac{e^2}{m} \cdot \frac{2b\nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4b^2\nu^2}, \end{cases}$$

was mit den bekannten Gleichungen der gewöhnlichen Dispersionstheorie übereinstimmt.

7. *Direkte Berechnung der durchgehenden Welle.* Wir verifizieren das Vorangehende, indem wir die durchgehende Welle direkt berechnen. Es sei die elektrische Kraft dieser Welle von der Form:

$$E_d = Z \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)},$$

wo p eine zu bestimmende Konstante ist. Wir wissen jetzt, daß die volle elektrische Kraft im Innern des Mediums:

$$E = \frac{2E_d}{p+1}$$

ist und daher die Polarisation in der Schicht x' :

$$P = \frac{2 \frac{e^2}{mq} e^{-i\nu\psi}}{p+1} \cdot Z e^{i\nu\left(t - \frac{px'}{c}\right)}.$$

Die von der Schicht dx' in Richtung der positiven x aus-

gesandte Sekundärwelle erzeugt in der Ebene x den elektrischen Vektor:

$$\begin{aligned} dS_1 &= -\frac{2\pi}{c} N dx' \cdot \dot{P}\left(t - \frac{x-x'}{c}\right), \\ &= -\frac{4\pi N \frac{e^2}{m\varrho} e^{-i\nu\psi}}{p+1} \cdot \frac{i\nu}{c} dx' \cdot Ze^{i\nu\left(t - \frac{px'}{c} - \frac{x-x'}{c}\right)}, \\ &= -\frac{4\pi N \frac{e^2}{m\varrho} \cdot e^{-i\nu\psi}}{p+1} \cdot \frac{i\nu}{c} dx' \cdot Ze^{i\nu\left(t - \frac{(p-1)x'}{c} - \frac{x}{c}\right)}. \end{aligned}$$

Die Summe aller Sekundärwellen, die von sämtlichen Schichten von $x' = 0$ bis $x' = x$ ausgesandt werden, ist im Punkt x :

$$\begin{aligned} S_1 &= -\int_0^x \frac{2\pi}{c} N dx' \cdot \dot{P}\left(t - \frac{x-x'}{c}\right), \\ &= \frac{4\pi N \frac{e^2}{m\varrho} e^{-i\nu\psi}}{p^2-1} \cdot \left(e^{-\frac{i\nu}{c}(p-1)x} - 1\right) \cdot Ze^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)}. \end{aligned}$$

Die durchgehende Welle E_d ist die Summe von S_1 und der einfallenden Welle $\dot{Z}e^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)}$:

$$\begin{aligned} E_d &= Z \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} \left(1 - \frac{4\pi N \frac{e^2}{m\varrho} e^{-i\nu\psi}}{p^2-1}\right) \\ &\quad + \frac{4\pi N \frac{e^2}{m\varrho} \cdot e^{-i\nu\psi}}{p^2-1} \cdot Ze^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck soll gleich $Ze^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}$ sein. Das ist nur möglich, wenn

$$p^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{m\varrho} \cdot e^{-i\nu\psi}$$

ist — in Übereinstimmung mit (13).

8. *Die reflektierte Welle.* Während die direkte Berechnung der durchgehenden Welle bloß zur Verifikation dient, führt die analoge Berechnung der reflektierten Welle zu einem interessanten Resultat. Die von der Schicht dx'' in Richtung der negativen x ausgesandte Welle hat im Punkt x offenbar den elektrischen Vektor:

$$\begin{aligned} dS_2 &= -\frac{2\pi}{c} N dx'' \cdot \dot{P} \left(t + \frac{x-x''}{c} \right), \\ &= -(p-1) \frac{i\nu}{c} dx'' \cdot Z e^{i\nu \left(t - \frac{px''}{c} + \frac{x-x''}{c} \right)}, \\ &= -(p-1) \frac{i\nu}{c} \cdot e^{i\nu \left(t + \frac{x}{c} \right)} \cdot Z e^{\frac{i\nu}{c} (p+1)x''}. \end{aligned}$$

Wir erhalten den Wert der reflektierten elektrischen Welle in der Ebene x , indem wir den Ausdruck dS_2 von $x'' = x$ bis $x'' = \infty$ integrieren:

$$(14) \quad \begin{cases} E_r = -\frac{p-1}{p+1} \cdot e^{i\nu \left(t + \frac{x}{c} \right)} \cdot Z e^{-\frac{i\nu}{c} (p+1)x}, \\ = -\frac{p-1}{p+1} \cdot Z e^{i\nu \left(t - \frac{px}{c} \right)} = -\frac{p-1}{p+1} \cdot E_d. \end{cases}$$

Da in der reflektierten Welle $H_r = -E_r$, während in der durchgehenden $H_d = +E_d$ ist, so erkennt man daraus, daß der Poyntingsche *Energiestrom*

$$\frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

für die reflektierte Welle nach der Seite der *negativen* x gerichtet ist, während die *Phase* der Welle innerhalb des ponderablen Mediums, wie das Argument $t - px/c$ im Ausdruck (14) zeigt, in der Richtung der *positiven* x forteilt. Wir haben hier den interessanten Fall einer Welle, in der Phase und Energiestrom entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtung haben. Dank diesem Umstand kommt es im Innern unseres einseitig begrenzten Mediums nicht zu stehenden Wellen. Während der Energiestrom der reflektierten Welle kontinuierlich in einer und derselben Richtung im Innern und außerhalb des Mediums fließt, zieht die Phase der Welle von der Grenzschicht aus nach entgegengesetzten Richtungen, — nach außen mit Lichtgeschwindigkeit c und konstanter Amplitude, nach innen mit verminderter Geschwindigkeit und abnehmender Amplitude (wenn merkliche Absorption vorhanden). Jede elektromagnetische Welle, in der der elektrische und der magnetische Vektor einander nicht gleich sind, ist als Summe zweier Wellen anzusehen, von denen die eine von der Art der soeben beschrie-

benen ist und einen Teil des Energieverlustes der durchgehenden Welle bedingt.¹⁾

Die dargelegte Eigentümlichkeit der reflektierten Welle bedingt es, daß sich für die Beobachtung die Reflexion als ein Vorgang darstellt, der bloß an der Grenzschicht seinen Ursprung nimmt.

B. Zweite Methode.

9. Die Gleichung

$$E = \frac{2 E_d}{p + 1}$$

ist von uns aus der Beziehung

$$(15) \quad H = p E$$

abgeleitet worden. Da indessen diese Beziehung nicht direkt aus unseren Rechnungen gewonnen wird, sondern als fertiges Resultat aus der allgemeinen Maxwellschen Theorie herübergenommen wird, so mag dieser Weg für manche vielleicht etwas Unbefriedigendes haben. Ich will daher hier kurz noch eine andere Methode angeben, bei deren Benutzung die Kenntnis der Relation (15) nicht vorausgesetzt wird. Diese Methode ist weniger einfach, dafür aber allgemeiner als die vorige. Sie gestattet auch den Durchgang der Wellen durch eine Platte von endlicher Dicke ohne Annahme von Grenzbedingungen zu behandeln. Auch auf den nichtstationären Anfangszustand ist diese Methode mit einer gewissen Modifikation anwendbar, doch soll hierauf noch nicht eingegangen werden.

1) Vielleicht ist es erlaubt bei dieser Gelegenheit daran zu erinnern, wie sich die beiden Ursachen, die den Energieverlust der durchgehenden Welle bedingen, zueinander verhalten. Der eine Teil der Energie, die der durchgehenden Welle verloren geht, ist enthalten in der reflektierten Welle. Dieser Verlust ist sehr gering außerhalb des Absorptionsstreifens und sehr bedeutend innerhalb desselben. Er ist dort um so größer, je kleiner die Dämpfungskonstante $2b$ ist, je kleiner mit anderen Worten der Verlust durch die zweite Ursache, die eigentliche „Reibung“ der Elektronen ist, da der durch die Strahlung bedingte Teil von $2b$ im allgemeinen äußerst gering ist. Die zweite Ursache — die „Reibung“ der Elektronen — vermindert zwar den Betrag der selektiven Absorption im Streifen, bedingt aber außerhalb desselben eine erhöhte Absorption, und zwar erstens direkt dadurch, daß Schwingungsenergie in Wärme verwandelt wird, zweitens indirekt, indem sie auch außerhalb des Streifens infolge Phasenänderung eine merkbare Reflexion hervorruft.

Die elektrische Kraft E im Punkt x zur Zeit t sei $E(x, t)$. Ist die Primärwelle von der Form $e^{i\nu(t - \frac{x}{c})}$, so wird, wie leicht zu sehen:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} E(x, t) = e^{i\nu(t - \frac{x}{c})} - K \cdot \frac{i\nu}{c} & \left[\int_0^x dx_1 \cdot E\left(x_1, t - \frac{x-x_1}{c}\right) \right. \\ & \left. + \int_x^\infty dx_1 \cdot E\left(x_1, t + \frac{x-x_1}{c}\right) \right], \end{aligned} \right.$$

wo

$$K = 2\pi N \frac{e^2}{m\varrho} \cdot e^{-i\nu\psi}$$

bedeutet. Da $-K dx_1 \cdot \frac{i\nu}{c} \cdot E\left(x_1, t \pm \frac{x-x_1}{c}\right)$ die reflektierte resp. durchgehende Sekundärwelle ist, die in der Schicht dx_1 erregt sich von hier aus nach x fortgepflanzt hat, so ist offenbar:

$$K dx_1 \cdot E\left(x_1, t \pm \frac{x-x_1}{c}\right) = K dx_1 \cdot E_1(x_1) \cdot e^{i\nu(t \pm \frac{x-x_1}{c})},$$

also:

$$E\left(x_1, t \pm \frac{x-x_1}{c}\right) = E_1(x_1) \cdot e^{\mp \frac{i\nu}{c} x_1} \cdot e^{i\nu(t \pm \frac{x}{c})},$$

daher auch:

$$E(x, t) = E_1(x) \cdot e^{i\nu t}.$$

Substituiert man diese Ausdrücke in (16), so erhält man:

$$\begin{aligned} E_1(x) = e^{-\frac{i\nu}{c} x} - K \frac{i\nu}{c} & \left[e^{-\frac{i\nu}{c} x} \int_0^x dx_1 e^{\frac{i\nu}{c} x_1} E_1(x_1) \right. \\ & \left. + e^{+\frac{i\nu}{c} x} \int_x^\infty dx_1 \cdot e^{-\frac{i\nu}{c} x_1} E_1(x_1) \right]. \end{aligned}$$

Wir suchen diese Gleichung zu lösen, indem wir $E_1(x)$ von der Form annehmen:

$$E_1(x) = a \cdot e^{-\frac{i\nu}{c} p x},$$

wo a und p zu bestimmende Konstanten sind. Setzen wir diesen Wert in die vorhergehende Gleichung ein, so erhalten wir nach Ausführung der Integration:

$$a e^{-\frac{i\nu}{c} p x} = e^{-\frac{i\nu}{c} x} + K a \cdot \frac{2e^{-\frac{i\nu}{c} p x}}{p^2 - 1} - \frac{K a}{p - 1} e^{-\frac{i\nu}{c} x}.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn:

$$(17) \quad p^2 = 1 + 2K$$

und

$$p - 1 = Ka$$

oder, wegen (17)

$$(18) \quad a = \frac{2}{p+1}.$$

Somit wird:

$$(19) \quad E(x, t) = \frac{2}{p+1} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}.$$

Dies ist die die Elektronen anregende Kraft. Die durchgehende Welle erhalten wir, wenn wir in (16) das letzte Integral weglassen:

$$(20) \quad E_a = e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}.$$

Läßt man das erste Glied und das erste Integral des zweiten Gliedes weg, so erhält man offenbar die reflektierte Welle:

$$(21) \quad E_r = -\frac{p-1}{p+1} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)}.$$

Gibt man in (16) dem zweiten Integral das umgekehrte Vorzeichen (vgl. (2)), so gewinnt man die magnetische Welle und bestätigt die Beziehungen:

$$(22) \quad H = pE; \quad H_a = E_a; \quad H_r = -E_r.$$

Die Formeln (17) bis (22) enthalten alle Resultate der vorhergehenden Abschnitte.

10. Nach dieser Methode läßt sich nun auch leicht der Durchgang einer ebenen Welle durch eine Platte von endlicher Dicke ohne Annahme von Grenzbedingungen behandeln. Wir haben zu diesem Zweck in dem zweiten Integral der Gleichung (16a) als obere Grenze l statt ∞ zu setzen, wenn l die Dicke der Platte bedeutet. Die Gleichung, die man dann erhält, kann befriedigt werden, wenn man:

$$E_1(x) = ae^{-\frac{i\nu}{c}px} + be^{\frac{i\nu}{c}px}$$

setzt. Die Konstanten a , b , p bestimmen sich dann aus den Bedingungen:

$$(23) \quad p^2 = 1 + 2K,$$

$$(24) \quad \begin{cases} a = -\frac{2(p+1)}{(p+1)^2 - (p-1)^2 \cdot e^{-2\frac{i\nu}{c}pl}}, \\ b = -\frac{2(p-1) \cdot e^{-2\frac{i\nu}{c}pl}}{(p+1)^2 - (p-1)^2 \cdot e^{-2\frac{i\nu}{c}pl}}. \end{cases}$$

Weiterhin folgt:

$$E = a e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} + b e^{i\nu\left(t + \frac{px}{c}\right)},$$

$$E_a = \frac{1}{2}(p+1) \cdot a e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} - \frac{1}{2}(p-1) \cdot b e^{i\nu\left(t + \frac{px}{c}\right)},$$

$$E_r = -\frac{1}{2}(p-1) \cdot a e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} + \frac{1}{2}(p+1) b e^{i\nu\left(t + \frac{px}{c}\right)},$$

$$H = p \left(a e^{i\nu\left(t - \frac{px}{c}\right)} - b e^{i\nu\left(t + \frac{px}{c}\right)} \right),$$

$$H_a = E_a \quad \text{und} \quad H_r = -E_r.$$

Der Brechungsexponent ergibt sich gemäß (23) als von der Dicke der Platte unabhängig, was von unserem Standpunkt aus nicht als a priori selbstverständlich angenommen werden durfte.

Es ist zu bemerken, daß E_a die Wellen zusammenfaßt, deren Energie (nicht aber die Phase) in Richtung der positiven x strömt, E_r dagegen die Wellen, für welche die Energieströmung die entgegengesetzte Richtung hat. Um daher die *austretende* Welle zu berechnen, brauchen wir bloß im Ausdruck für E_a $x = l$ anzunehmen und sodann mit

$$e^{-\frac{i\nu}{c}(x-l)}$$

zu multiplizieren. Man bekommt so nach leichter Umformung:

$$E_a = \frac{2ap}{p+1} \cdot e^{-\frac{i\nu}{c}pl} \cdot e^{i\nu\left(t - \frac{x-l}{c}\right)}.$$

Die von der vorderen Grenzfläche scheinbar reflektierte Welle entspricht dem ersten Glied E_r (die Phase hat hier innerhalb der Platte die entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtung wie die Energie), die von der hinteren Grenzfläche scheinbar reflek-

tierte Welle ist dagegen durch das zweite Glied von E_r gegeben (hier haben Phase und Energie die gleiche Fortpflanzungsrichtung).

Zusammenfassung.

a) Es wurden zwei Methoden entwickelt, welche gestatten, die beim Durchgang einer ebenen Welle in einem mit Elektronen beladenen Medium erregten Sekundärwellen zu berechnen. Die Superposition der primären Welle mit den von den Elektronen ausgesandten Wellen ergibt eine durchgehende Welle, deren Extinktion und Phasengeschwindigkeit mit den aus der gewöhnlichen Dispersionstheorie bekannten Werten übereinstimmt. Die reflektierte Welle wird ohne Benutzung von Grenzbedingungen erhalten.

b) Die reflektierte Welle nimmt ihren Ursprung in allen Teilen des von der einfallenden Welle durchlaufenen Mediums, nicht etwa bloß in der Nähe der Grenzschicht.

c) In der reflektierten Welle haben Phase und Energiestrom innerhalb des Mediums entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtungen. Es ist dies der Grund, weshalb für die Beobachtung die reflektierte Welle bloß von der Grenzschicht auszugehen scheint. Wellen dieser Art treten überall da auf, wo der magnetische und elektrische Vektor in der beobachtbaren Welle einander nicht gleich sind.

Warschau, Physik. Institut der Universität.

(Eingegangen 24. September 1913.)