Additive und stetige Funktionaloperationen.

Von

Hugo Steinhaus in Lemberg.

Einleitung.

Eine *Funktionaloperation* nennt man eine Beziehung zwischen einer variablen Funktion und einer von der ersten abhängigen Funktion. Wir beschränken uns durchweg auf den Fall, daß die abhängige Funktion eine *Konstante* ist. Dann ist die Funktionaloperation eine Beziehung zwischen einer willkürlichen Funktion und einer von ihr abhängigen *Zahl*, die der *Wert* der Funktionaloperation genannt wird. Der Kürze halber wird manchmal statt „Wert“ wieder „Funktionaloperation“ oder — noch kürzer — „Operation“ gesagt.

Diese Begriffe, wofür ein einfaches Beispiel etwa die Beziehung zwischen einer in $\langle a, b \rangle$ erklärten stetigen Funktion von beschränkter Schwankung und der Länge der Bildkurve liefert, hat Volterra eingeführt. Er selbst sowie Fréchet, Hadamard und F. Riesz haben sie weiter ausgebildet und bei Behandlung verschiedener wichtiger Probleme angewandt¹⁾.

Hier wird an die Arbeiten der drei letztgenannten Forscher angeknüpft, wobei namentlich einige neue Sätze über additive und stetige Operationen aufgestellt und bewiesen werden.

Additiv heißt eine Operation $F(X)$, unter $X = X(t)$ eine im Intervalle $\langle a, b \rangle$ erklärte Funktion von t , d. h. die „Variable“, unter F den „Wert“ verstanden, dann und nur dann, wenn die Beziehung

$$F(X + Y) = F(X) + F(Y)$$

für alle diejenigen X, Y des Definitionsbereiches der Operation gilt, für die auch $X + Y$ zum selben Bereiche gehört. Es bedeutet also „additiv“ soviel als „distributiv in bezug auf die Addition“. Die dafür gebräuch-

¹⁾ Vgl. z. B. Encyclopédie des Sciences mathématiques, Édition française, Tome II, vol. 5, Équations et opérations fonctionnelles, par S. Pincherle, § 19, S. 31.

liche Bezeichnung „linear“ erscheint unzweckmäßig, da sonst die wörtliche Übertragung des bekannten Satzes der gewöhnlichen Funktionentheorie: „eine additive, stetige Funktion ist homogen-linear“ in die Theorie der Funktionaloperationen kaum möglich wäre; dieser Satz bildet aber den Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Um den *Stetigkeitsbegriff* zu erklären, müssen wir einige Definitionen und Bezeichnungsweisen einführen.

Definitionen und Bezeichnungen.

Wir bezeichnen mit S die Gesamtheit aller in $\langle a, b \rangle$ erklärten im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen von t , mit S^2 die Gesamtheit aller Funktionen, deren Quadrat auch noch in demselben Sinne integrierbar ist, mit B_M die Gesamtheit aller nach Lebesgue meßbaren Funktionen, deren Betrag fast nirgends in $\langle a, b \rangle$ die Zahl M übertrifft. Solche Funktionen nennen wir „wesentlich beschränkt“ oder mitunter kurz „beschränkt“. Eine beschränkte Funktion gehört demnach immer einem B_M an. Das kleinste M nennen wir „die (wesentliche) obere Grenze“ der Funktion. — Die Summe aller B_M nennen wir B .

Diese Gesamtheiten werden *Felder* genannt, sobald man in ihnen den *Distanzbegriff* erklärt hat. Für diesen Begriff kommen folgende Definitionen in Betracht:

I. Die Distanz von X und Y ist gleich $\int_a^b |X(t) - Y(t)| dt$, wenn letzteres Symbol einen Sinn hat.

II. Die Distanz von X und Y ist gleich $\int_a^b [X(t) - Y(t)]^2 dt$, wenn letzteres Symbol einen Sinn hat.

Beide Definitionen involvieren den hier durchweg gebrauchten Lebesgueschen Integralbegriff. I liefert für jedes Funktionenpaar von S , II für jedes Funktionenpaar von S^2 eine bestimmte endliche Distanzzahl, und es können in leichtverständlicher Bezeichnung die *Felder*

$$SI, \quad S^2 II, \quad BI,$$

sowie

$$S^2 I, \quad BII$$

gebildet werden. Die Kombination SII liefert kein Feld, da der Distanzbegriff II nicht für alle Funktionenpaare der S -Gesamtheit erklärt worden ist.

Eine Operation $F(X)$ heißt im gegebenen Felde *stetig*, wenn sie in hinreichend nahen Elementen des Feldes beliebig wenig abweichende Werte annimmt, in Formeln; wenn aus

$$X_n \rightarrow X \quad \text{immer} \quad F(X_n) \rightarrow F(X)$$

folgt. Dabei bedeutet $F(X_n) \rightarrow F(X)$ soviel wie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = F(X),$$

während $X_n \rightarrow X$ ausdrücken soll, daß die Distanz von X_n und X mit wachsendem n gegen Null strebt.

Die geometrische Ausdrucksweise erlaubt uns, anstatt „Funktion“ „Punkt (des Funktionenraumes)“ zu sagen; dabei werden als „Koordinaten“ eines Punktes X der S -Gesamtheit die nach der Eulerschen Regel gebildeten Zahlen

$$\int_a^b X(t) \varphi_k(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots \text{ in inf.})$$

bezeichnet, wo die Folge $\{\varphi_k(t)\}$ irgendein in $\langle a, b \rangle$ erklärtes vollständiges, normiertes Orthogonalsystem — das „Koordinatensystem“ — darstellt. Ein solches System ist z. B. das T -System (trigonometrisches System):

$$(T) \quad \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos 2\pi \frac{t-a}{b-a}, \quad \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin 2\pi \frac{t-a}{b-a}, \dots$$

Fragestellung.

Fréchet hat bewiesen, daß eine jede im Felde $S^2 II$ stetige, additive Operation sich in der Form

$$F(X) = \int_a^b H(t) X(t) dt$$

darstellen läßt, wo H ein von X unabhängiger Punkt von S^2 ist, und daß umgekehrt, wie sofort ersichtlich, die Integralformel rechterhand immer eine im Felde $S^2 II$ stetige und additive Operation definiert, wenn nur H zu S^2 gehört²⁾.

Es wird nun die *Frage* aufgeworfen, ob analoge Sätze bei den übrigen vier Feldern gelten. Diese Fragestellung erinnert an den Satz der gewöhnlichen Funktionentheorie, daß eine jede additive, stetige Funktion homogen-linear, d. h. von der Gestalt

$$y = cx$$

sei. In unserem Falle tritt rechterhand ein Integral auf, da eine Operation als Funktion von unendlich vielen Variablen aufgefaßt werden muß. Wir werden auch tatsächlich das Integral als eine Linearform der unendlich vielen Koordinaten von X anschreiben können und für die Koeffizienten dieser Form gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen finden.

²⁾ Maurice Fréchet, Sur les opérations linéaires, Troisième note, Transaction of the American Mathematical Society, vol. 8, Nr. 4, S. 433—446, Oktober 1907.

Ergebnisse.

Satz 1. Jede in SI erklärte stetige und additive Operation ist von der Form

$$(1) \quad F(X) = \int_a^b H(t) X(t) dt,$$

wo H ein einem B_M angehöriger Punkt ist, mithin $H(t)$ eine meßbare, beschränkte Funktion von t bezeichnet.

Umkehrung. Ist H ein Punkt von B_M , so stellt (1) eine in SI erklärte, stetige und additive Operation dar.

Satz 2 und seine Umkehrung bilden den bereits angeführten Satz von Fréchet.

Satz 3. Jede in $B_M I$ erklärte stetige und additive Operation ist von der Form (1), wo H ein Punkt von S ist.

Umkehrung. Ist H ein Punkt von S , so stellt (1) eine in B_M erklärte, stetige und additive Operation dar.

Um die Bedeutung des Satzes 3 ins rechte Licht zu setzen, seien einige Überlegungen, die später beim Beweise eine Rolle spielen werden, vorweggenommen.

Sei C die Gesamtheit der in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen; die Distanz III zweier in C gelegenen Funktionen $X(t)$, $Y(t)$ sei gleich $\text{Max} |X(t) - Y(t)|$. Das Feld $C III$ ist augenscheinlich in BI enthalten.

Nach F. Riesz ist jede in $C III$ erklärte additive, stetige Operation $F(X)$ in der Form

$$F(X) = \int_a^b X(t) dA(t)$$

darstellbar, unter $A(t)$ eine nur von F abhängige Funktion von beschränkter Schwankung verstanden. Das Integral ist ein Integral im Sinne von Stieltjes³⁾.

Nach Lebesgue gilt ferner

$$F(X) = \int_a^b X(x(t)) \lambda(t) dt,$$

unter $\lambda(t)$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare, unter $x(t)$ eine

³⁾ Vgl. F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. 149 (1909), S. 974—976; Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 69 (1910), S. 449—497; Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires, Annales de l'École Normale (3) 37 (1914), S. 9—14. Man vergleiche hierzu E. Helly, Über lineare Funktionaloperationen, Wiener Berichte 1912, S. 265—297, und J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Wiener Berichte 122 (1913), S. 1—144.

nur von $A(t)$ abhängige Funktion verstanden⁴⁾. Es ist bemerkenswert, daß sich dieses Ergebnis, wie weiter unten gezeigt wird, im Falle der in $B_M I$ erklärten additiven und stetigen Operation zu dem einfacheren Resultat

$$F(X) = \int_a^b H(t) X(t) dt,$$

unter H einen Punkt in S verstanden, verschärfen läßt. Aus dem Riesz'schen Resultat folgt mit Leichtigkeit der Satz 3.

Wir beginnen mit einigen einfachen Bemerkungen.

Bemerkung 1. Da jede in $S^2 I$ erklärte stetige und additive Operation augenscheinlich in $B_M I$ dieselben Eigenschaften hat, so ist sie in $B_M I$ nach Satz 3 von der Form (1) mit einem zu S gehörenden H . Damit (umgekehrt) dieselbe Formel (1) in ganz S^2 einen Sinn habe, muß selbstverständlich H zu S^2 gehören; damit aber dann noch die Operation in $S^2 I$ stetig sei, muß — wie im Hilfssatz 1 gezeigt werden soll — H zu einem B_M gehören, so daß wir auf den Fall des Satzes 1 zurückkommen, ohne irgendwelche neue interessante Bedingungen für $S^2 I$ zu finden.

Bemerkung 2. Jede in $B_M I$ stetige Operation ist in $B_M II$ stetig, da

$$\int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt \leq 2M \int_a^b |X_n(t) - X(t)| dt$$

ist. Eine in $B_M II$ stetige Operation ist immer in $B_M I$ stetig, da

$$\int_a^b |X_n(t) - X(t)| dt \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt}$$

gilt. Infolgedessen gilt der Satz 3 auch, wenn man in seinem Wortlaut $B_M I$ durch $B_M II$ ersetzt.

Aus den vorstehenden Bemerkungen ersieht man, daß die drei erstgenannten Felder SI , $S^2 II$, BI und die darauf bezüglichen Sätze in den Vordergrund treten müssen.

Um den Lauf der Betrachtungen nicht zu stören, werden die *Hilfssätze*, die eigentlich vorangehen müßten, erst nachträglich begründet werden; dagegen wird jeder der drei Sätze 1, 2, 3 gleich durch je einen *Parallelsatz* 1, 2, 3 und durch seine Umkehrung ergänzt werden. Es sind also im ganzen zwölf Sätze, welche die Hauptfrage beantworten. Die *Parallelsätze* beziehen sich auf die Linearformen von unendlich vielen Variablen. Der Beweis des Parallelsatzes 1 beruht auf dem im Jahre 1916 vom

⁴⁾ H. Lebesgue, Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. 150 (1910), S. 86—88.

Verfasser veröffentlichten Satze, daß die durchschnittliche Konvergenz der Mittelwerte einer trigonometrischen Reihe *notwendig* (und hinreichend) ist, damit diese Reihe eine Fourierreihe sei⁵⁾. Der Beweis der Umkehrung des Parallelsatzes 3 stützt sich auf einen Gedanken des Herrn St. Banach, von welchem auch der ganze Beweis des Hilfssatzes 4 herührt. Der Beweis des Satzes 2 ist bis auf Bezeichnungs- und formelle Unterschiede der Fréchétsche Originalbeweis. Die naheliegenden Anwendungen auf die Theorie der Fourierreihen bilden den Abschluß der Arbeit.

Beweise.

Beweis des Satzes 2.

Es sei

$$(2) \quad \{\varphi_n(t)\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ein in $\langle a, b \rangle$ erklärtes vollständiges, normiertes Orthogonalsystem von samt ihren Quadraten integrierbaren Funktionen, d. h. ein Funktionensystem, für welches

$$(3) \quad \int_a^b \varphi_p \varphi_q dt = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q \\ 1 & \text{" } p = q \end{cases}$$

gilt, und das so beschaffen ist, daß es

(β) keine samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion $\varphi_0(t)$ gibt, so daß die Beziehungen (α) für alle nichtnegativen p, q erhalten bleiben. Ein „Koordinatensystem“ dieser Art ist z. B. das T -System. Entwickeln wir formell

$$(3) \quad X(t) \sim x_1 \varphi_1(t) + x_2 \varphi_2(t) + \dots + x_n \varphi_n(t) \dots,$$

indem wir setzen

$$(4) \quad x_k = \int_a^b X(t) \varphi_k(t) dt. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Nach bekannten Sätzen ist die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

konvergent und es gilt

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \int_a^b X^2(t) dt,$$

was auch in der Form

$$(6) \quad \int_a^b [X(t) - s_n(t)]^2 dt \rightarrow 0,$$

⁵⁾ H. Steinhaus, Niektóre własności szeregów trygonometrycznych i szeregów Fouriera, herausgegeben von der Krakauer Akademie der Wissenschaften, vorgelegt am 3. Juli 1916; Kap. III, Satz X, S. 43.

mit

$$(7) \quad s_n(t) = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k(t)$$

geschrieben werden kann. Nach Riesz und Fischer gilt ferner der Satz, daß zu einer jeden Koordinatenfolge $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme ein Punkt X in S^2 gehört⁶⁾.

Es sei nun $F(X)$ eine in S^2 erklärte additive und stetige Operation. Aus (6) folgt

$$(8) \quad F(s_n) \rightarrow F(X).$$

Wegen der vorausgesetzten Additivität ist nach (7)

$$(9) \quad F(s_n) = \sum_{k=1}^n x_k F(\varphi_k).$$

Hier muß bemerkt werden, daß bereits bei der Ableitung der Formel (9) die Stetigkeit eine Rolle spielt. Nur für stetige Operationen kann nämlich die Beziehung

$$F(cX) = cF(X), \quad (c \text{ konstant})$$

welche für rationale c eine Folge der Additivität ist, unter Benutzung der Schlußweise, daß $c_n X \rightarrow cX$, wenn c_n gegen c konvergiert, auf irrationale c ausgedehnt werden. Setzen wir

$$(10) \quad F(\varphi_k) = h_k. \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Die Folge $\{h_k\}$ ist, wie ersichtlich, von der Wahl des Koordinatensystems, nicht aber von der Wahl des Punktes X abhängig. Die Formeln (8), (9) und (10) ergeben

$$(11) \quad F(X) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ ist für jede Folge $\{x_k\}$ der Koordinaten eines Punktes der Gesamtheit S^2 konvergent und stellt die Operation $F(X)$ als eine Linearform von unendlich vielen Variablen dar. Das ist der Inhalt des Parallelsatzes 2.

Da nun nach dem zuletzt zitierten Riesz-Fischerschen Satze eine jede Folge $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme als Koordinatenfolge eines bestimmten S^2 -Punktes aufgefaßt werden kann, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ für alle $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme konvergent. Aus dem arithmetischen Hilfssatz 2 folgt aber, daß dann

⁶⁾ F. Riesz, Göttinger Nachrichten 1907, S. 116; E. Fischer, Comptes Rendus 141 (1907), S. 1022.

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$$

selbst konvergent sein muß. Es existiert daher nach dem Riesz-Fischer'schen Satze in S^2 ein Punkt H mit Koordinaten $\{h_k\}$; dann gilt wegen (5)

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_n(t) h_k^2 = \int_a^b [X_n(t) \pm H(t)]^2 dt$$

und durch Addition der beiden Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_n(t) h_k = \int_a^b H(t) X_n(t) dt,$$

demnach wegen (11)

$$(14) \quad F(X) = \int_a^b H(t) X(t) dt,$$

w. z. b. w.

Der Beweis der Umkehrung des Satzes 2 ist leicht zu erbringen, da die rechte Seite von (14) für ein zu S^2 gehörendes H eine in S^2 additive Operation definiert, die wegen

$$\left| \int_a^b H(t) X_n(t) dt - \int_a^b H(t) X(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b H^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt}$$

auch im Sinne II stetig ist.

Wir haben aber auch bereits — durch den arithmetischen Hilfssatz 2 — die folgende Umkehrung des Parallelsatzes 2 bewiesen:

Ist die Linearmatrix (11) für alle Koordinatenfolgen $\{x_n\}$ der zu S^2 gehörigen Punkte X konvergent, so stellt die lin. Fkto $S^2 H$ eine additive, stetige Operation dar. Die Folge $\{h_k\}$ ist die Koordinatenfolge eines bestimmten Punktes H in S^2 . — Unter II. Satz 2 erlaubt nämlich, aus

gegebenen Voraussetzungen auf die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ zu schließen,

woraus alles übrige schon in ähnlicher Weise wie vorher ergibt.

Beweis des Satzes

Da nach Voraussetzung $F(X) \in S^2$ erklärt, additiv und stetig sein soll, so ist $F(X)$ auch in S^2 II definiert, additiv und stetig. In der Tat ist S^2 in S enthalten, und aus $X_n \rightarrow X$ im Sinne II folgt $X_n \rightarrow X$ im Sinne I, da doch

$$\int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b [X_n(t) - X(t)]^2 dt}$$

ist. Es existiert daher nach Satz 2 ein Punkt H in S^2 , so daß in ganz S^2 die Formel (14) gilt.

Es wird nun behauptet, daß H zu einem B_M gehört. Denn wäre $H(t)$ nicht wesentlich beschränkt, so würde nach dem Hilfssatz 1 eine zu S^2 gehörige Punktfolge

$$(15) \quad \{X_n(t)\}$$

existieren, so daß

$$(16) \quad \int_a^b |X_n(t)| dt \rightarrow 0$$

und zugleich

$$(17) \quad \int_a^b H(t) X_n(t) dt \rightarrow +\infty$$

wäre. Dann wäre aber wegen der Stetigkeit im Sinne I und wegen (16)

$$F(X_n) \rightarrow F(0),$$

und wegen (14) und (17)

$$F(X_n) \rightarrow +\infty,$$

was nicht möglich ist. Es liegt also H in B_M , und die Formel (14) stellt $F(X)$ in S^2 dar.

Es bleibt noch zu beweisen, daß dieselbe Formel auch $F(X)$ in ganz S darstellt. Nun liegen aber die Punkte von S^2 in SI überall dicht, denn gehört X zu S und setzt man

$$(18) \quad \begin{aligned} Y_n(t) &= X(t), & \text{wenn } |X(t)| \leq n, \\ Y_n(t) &= 0 & \text{für } |X(t)| > n, \end{aligned}$$

so gehört jedes Y_n zu S^2 und es ist

$$(19) \quad \int_a^b |Y_n(t) - X(t)| dt \rightarrow 0.$$

Da in S^2 die Formel (14) gilt und daher

$$(20) \quad F(Y_n) = \int_a^b H(t) Y_n(t) dt$$

gesetzt werden kann, so muß wegen (19) und (20) mit Rücksicht auf die Beschränktheit von $H(t)$

$$(21) \quad F(X) = \lim F(Y_n) = \lim \int_a^b H(t) Y_n(t) dt = \int_a^b H(t) X(t) dt$$

sein. Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

Der Beweis der Umkehrung des Satzes 1 besteht in der naheliegenden Feststellung, daß für ein in B_M liegendes H die Formel (14) eine additive Operation in S erklärt, welche, wie die Beziehungen

$$|F(X_n) - F(X)| = \left| \int_a^b H(t) [X_n(t) - X(t)] dt \right| \leq M \int_a^b |X_n(t) - X(t)| dt$$

ohne weiteres zeigen, in SI stetig ist.

Parallelsatz 1. Legt man das T -System als Koordinatensystem zugrunde, so gilt für eine in SI erklärte additive und stetige Operation $F(X)$ immer

$$(22) \quad F(X) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

wo $\{h_k\}$, $\{x_k\}$ die T -Koordinaten von H (dessen Existenz Satz 1 verbürgt) bzw. von X sind und wo der Punkt $(\cdot)$ über dem Gleichheitszeichen ($=$) bedeutet, daß rechterhand die Summation im Sinne der ersten Cesaroschen Mittelwertbildung vorgenommen werden soll, oder — kurz gesagt — daß die Reihe rechterhand „im Mittel konvergent“ ist.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\{\psi_k(t)\}$ die am Schluß der Einleitung genannte trigonometrische Funktionenfolge, so ist, wie der Verfasser an einer anderen Stelle gezeigt hat⁷⁾, für ein zu S gehörendes X

$$\int_a^b \left| X(t) - \frac{n x_1 \psi_1(t) + (n-1) x_2 \psi_2(t) + \dots + x_n \psi_n(t)}{n} \right| dt \rightarrow 0,$$

wenn $n \rightarrow \infty$. Ist also $H(t)$ wesentlich beschränkt, so ist

$$\int_a^b H(t) \left[X(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) x_k \psi_k(t) \right] dt \rightarrow 0,$$

oder nach Ausführung der Integration

$$(23) \quad \int_a^b H(t) X(t) dt \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

und nach (14) mit Rücksicht auf den Satz 1

$$F(X) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

w, z. b. w.

Umkehrung des Parallelsatzes 1. Ist die Linearform

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

für alle Folgen $\{x_k\}$, die als T -Koordinaten von S -Punkten X aufgefaßt werden können, im Mittel konvergent, so ist $\{h_k\}$ die T -Koordinatenfolge

⁷⁾ Vgl. die Fußnote ⁵⁾.

eines zu einem B_M gehörigen Punktes H ; die Linearform stellt eine in SI erklärte stetige, additive Operation in bezug auf X dar.

Beweis. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ für alle zu S gehörenden X im Mittel konvergent, so ist sie es um so mehr für alle zu S^2 gehörenden X , d. h. für alle $\{x_k\}$ mit konvergenter Quadratsumme. Wäre nun $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ divergent, so müßte es, wie aus dem Hilfssatze 2 hervorgeht, eine konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$$

geben, so daß $\sum_{k=1}^{\infty} h_k \alpha_k$ gegen $+\infty$ „eigentlich“ divergierte und infolgedessen nicht einmal im Mittel konvergent sein könnte. Es ist also $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ konvergent und $\{h_k\}$ ist die Koordinatenfolge eines Punktes H , der in S^2 liegt. Der Punkt H gehört nun zu einem B_M . Wäre nämlich $H(t)$ nicht wesentlich beschränkt, so wären auch die Funktionen

$$(Def.) \quad H_n^{(1)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) h_k \psi_k(t),$$

die nach einem bekannten Lebesgueschen Satze aus der Theorie der Fourierschen Reihen fast überall in $[a, b]$ gegen $H(t)$ konvergieren⁸⁾, auch nicht in ihrer Gesamtheit wesentlich beschränkt. Dann würde es aber nach Hilfssatz 4 eine Funktion $\bar{X}(t)$ in S geben, so daß

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{X}(t) H_n^{(1)}(t) dt = +\infty$$

wäre. Dies besagt aber, nach Einführung der Koordinaten $\{\bar{x}_k\}$ von $\bar{X}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \bar{x}_k h_k = +\infty,$$

was gegen die Voraussetzung verstößt.

Es gehört daher H zu B_M und es gilt dem Beweise des Parallelsatzes 1 gemäß die Beziehung (23). Da aber laut Umkehrung des Satzes 1 die linke Seite von (23) eine in SI erklärte stetige additive Operation in bezug auf X darstellt, so ist dasselbe auch für die rechte

⁸⁾ Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1904, S. 94.

Seite richtig, so daß unsere Behauptung in ihrem vollen Umfange bewiesen ist.

Bemerkung zum Parallelsatz 1. Herr St. Banach und der Verfasser haben in einer gemeinsamen der Krakauer Akademie der Wissenschaften am 6. Mai 1918 vorgelegten Note gezeigt, daß die sogenannte Parsevalsche Beziehung

$$\int_a^b H(t) X(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

unter Zugrundelegung des T -Systems *nicht* für alle X von S gilt, da die Reihe rechts nicht zu konvergieren braucht. Nimmt man dies als bewiesen an, so folgt, daß man die Aussage des Parallelsatzes 1 *nicht* derart verschärfen kann, daß in (22) der Punkt über dem Gleichheitszeichen unterbleibt. Das Resultat der zitierten Note läßt sich unter Anwendung des ohnehin für die vorliegende Abhandlung erforderlichen Hilfssatzes 4, wie folgt, leicht gewinnen.

Es sei $H(t)$ eine stetige Funktion, für welche die Funktionen

$$(24) \quad s_n(t) = \sum_{k=1}^n h_k \psi_k(t),$$

d. h. die Partialsummen der Fourier-Entwicklung *nicht* gleichmäßig beschränkt sind⁹⁾. Bildet man also

$$(25) \quad G_n(t) = H(t) - s_n(t),$$

so ist $\{G_n(t)\}$ eine Folge stetiger, nicht gleichmäßig beschränkter Funktionen. Nach Hilfssatz 4 existiert dann ein X in S , so daß

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{X}(t) G_n(t) dt = +\infty,$$

gilt. Daraus folgt aber wegen (25)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \bar{X}(t) [H(t) - s_n(t)] dt = +\infty$$

und — wegen

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{X}(t) [H(t) - s_n(t)] dt &= \int_a^b H(t) \bar{X}(t) dt - \sum_{k=1}^n h_k \bar{x}_k = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h_k \bar{x}_k = -\infty, \end{aligned}$$

⁹⁾ Z. B. jene Fejérsche stetige Funktion, deren Fourierentwicklung an einer Stelle divergiert. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, 28 (1909), S. 402.

womit die Ungültigkeit der Parsevalschen Formel im betrachteten Falle bewiesen ist.

Beweis des Satzes 3.

Wir führen, wie schon vorhin erwähnt, den folgenden Distanzbegriff *III* im Funktionenraum ein:

Die Distanz zweier in B_M gelegenen Funktionen X und Y wird ex definitione der wesentlichen oberen Grenze des Ausdruckes

$$(26) \quad |X(t) - Y(t)|$$

in $\langle a, b \rangle$ gleich gesetzt.

Ferner soll C die Gesamtheit der in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktionen und C_{III} das diesen Definitionen entsprechende Feld bezeichnen. Dann gilt der folgende Satz von F. Riesz:

Jede in C_{III} erklärte additive, stetige Operation $F(X)$ ist in der Form

$$(27) \quad F(X) = \int_a^b X(t) dA(t)$$

darstellbar, wo $A(t)$ eine nur von F abhängige Funktion von beschränkter Schwankung, das Integral ein Integral im Sinne von Stieltjes bezeichnet¹⁰.

Es sei jetzt eine in $B_M I$ erklärte additive und stetige Operation $F(X)$ gegeben. Setzt man für alle natürlichen Zahlen m

$$F(mX) = mF(X),$$

so wird hierdurch $F(X)$ widerspruchlos in

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \dots$$

erklärt und auch noch in BI additiv und stetig sein. Da nun C in B enthalten ist und

$$\int_a^b |X(t) - Y(t)| dt \leq |b - a| \text{ wesentl. ob. Grenze von } |X(t) - Y(t)|$$

ist, so ist jede in BI erklärte additive und stetige Operation auch in C_{III} additiv und stetig und hat nach dem soeben zitierten Rieszschen Satz die Form (27), die in ganz C gilt. Es soll jetzt bewiesen werden, daß man für $A(t)$ eine *totalstetige* Funktion, d. h. ein Integral annehmen kann. Wir beginnen mit dem Nachweis, daß $A(t)$ als stetig gewählt werden kann.

Nehmen wir an, t_0 sei eine im Innern von $\langle a, b \rangle$ gelegene Unstetigkeitsstelle von $A(t)$. Dann wäre

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} A(t) = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} A(t) = \beta, \quad \alpha \neq \beta,$$

¹⁰) Vgl. die Fußnote 9).

da $A(t)$ von beschränkter Schwankung und mithin beide Grenzwerte vorhanden sind. Eine Unstetigkeit könnte übrigens auch dann vorliegen, wenn $\alpha = \beta \neq A(t_0)$ wäre. Diesen Fall schließen wir indessen aus, da die Festsetzung $A(t_0) = \alpha$ die Unstetigkeit aufheben würde, ohne den Wert des Integrals (27) für zu C gehörende X zu ändern.

Wir definieren jetzt für hinreichend große n die stetigen Funktionen $X_n Y_n(t)$ durch die Festsetzungen:

$$X_n(t) = 0 \quad \text{für } \alpha \leq t \leq t_0 - \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad t_0 + \frac{2}{n} \leq t \leq b,$$

$$X_n(t) = 1 \quad \text{für } t_0 - \frac{1}{n} \leq t \leq t_0 + \frac{1}{n},$$

$X_n(t)$ linear in den beiden Restintervallen

$$I_1: \quad < t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n} >, \quad I_2: \quad < t_0 - \frac{2}{n}, t_0 - \frac{1}{n} >.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b X_n(t) dA(t) &= \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{1}{n}} 1 \cdot dA(t) + \int_{I_1} X_n(t) dA(t) + \int_{I_2} X_n(t) dA(t) = \\ &= J_0 + J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Es ist nun für $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} J_0 &= A\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - A\left(t_0 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \beta - \alpha \neq 0, \\ J_1 &\rightarrow 0, \quad J_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Um die beiden letzten Beziehungen einzusehen, bemerken wir, daß

$$|J_1| \leq \text{die Schwankung von } A(t) \text{ in } I_1$$

ist; $A(t)$ ist eine Funktion von beschränkter Schwankung. Es ist darum

$$A(t) = N(t) + P(t),$$

unter N und P monotone Funktionen verstanden. Die Schwankung von $N(t)$ in $I_1 = \left| N\left(t_0 + \frac{2}{n}\right) - N\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) \right| \rightarrow 0$, das gleiche gilt für $P(t)$ also auch $A(t)$. Darum gilt $J_1 \rightarrow 0$ und ebenso $J_2 \rightarrow 0$.

Es ist also

$$\int_a^b X(t) dA(t) \rightarrow \beta - \alpha \neq 0.$$

Da X_n zu C gehört, so folgt hieraus wegen (27)

$$(28) \quad F(X_n) \rightarrow \beta - \alpha \neq 0.$$

Andererseits ist, wie aus der Definition von X_n ersichtlich

$$\int_a^b X_n(t) dt - \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

was

$$F(X_n) \rightarrow F(0)$$

nach sich zieht. Da aber $F(0) = F(0) + F(0)$, also

$$F(0) = 0$$

ist, so ist die zuletzt hingeschriebene Grenzwertbeziehung mit (28) unverträglich. Wäre die Unstetigkeitsstelle t_0 nicht im Innern, sondern am Rande von $\langle a, b \rangle$ gelegen, so würde man die Unstetigkeit durch geeignete Festsetzung aufheben können, ohne den Wert des Integrals (27) zu ändern. Die Stetigkeit von $A(t)$ ist also festgestellt, und es bleibt nur noch die Totalstetigkeit nachzuweisen. Es möge $A(t)$ nicht totalstetig sein. Es gibt dann eine positive Zahl η , so daß jeder positiven Zahl ε eine abzählbar unendliche Menge von einander ausschließenden Intervallen zugeordnet werden kann, derart, daß die Summe der Schwankungen von $A(t)$ in diesen Intervallen größer als η , die Summe der Intervalllängen aber kleiner als ε ausfällt. Dies folgt alles unmittelbar aus der Definition der Totalstetigkeit¹¹⁾. Aus jenen Intervallen könnte man dann eine endliche Anzahl r herausgreifen, so daß die zugehörige Summe der Schwankungen immer noch größer als η ausfällt. Es seien

$$I_1, I_2, \dots, I_r$$

diese Intervalle. Die gleichen Buchstaben mögen ihre Längen bezeichnen. Es ist dann

$$\sum_{i=1}^r A_i < \varepsilon.$$

Wir teilen jetzt das Intervall A_i in p gleiche Teile

$$\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{ip};$$

die Zahl p wird später bestimmt werden. Da $A(t)$ stetig ist, so ist die Schwankung von $A(t)$ in A_i gleich dem Grenzwert der Summe

$$\sum_{k=1}^p [\text{obere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik} - \text{untere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik}]$$

für $p \rightarrow \infty$. Wählt man daher p groß genug, so kommt

$$\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^p [\text{obere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik} - \text{untere Grenze von } A(t) \text{ in } \delta_{ik}] > \eta.$$

¹¹⁾ Vgl. z. B. Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse Infinitésimale, 2. Ausg., Louvain 1912; Bd. II, § 195, S. 116–117.

Die stetige Funktion $A(t)$ erreicht ihre obere und untere Grenze in δ_{ik} in zwei Punkten des Intervalls, die α_{ik} bzw. β_{ik} heißen mögen. Indem wir also α_{ik}, β_{ik} zu Endpunkten eines neuen, in δ_{ik} gelegenen Intervalls ζ_{ik} wählen, erhalten wir eine endliche Anzahl von einander nicht überdeckenden Intervallen ζ_{ik} , so daß

$$\sum_{i,k} [A(\alpha_{ik}) - A(\beta_{ik})] > \eta$$

und, da alle ζ_{ik} in den A_i liegen, zugleich

$$\sum_{i,k} \zeta_{ik} < \varepsilon$$

gilt, wo ζ_{ik} zugleich die Länge des Intervalls ζ_{ik} bezeichnet.

Wir nehmen jetzt $\varepsilon = \frac{1}{n}$ an und setzen

$$Y_n(t) = 1 \quad \text{für} \quad \beta_{ik} < t < \alpha_{ik},$$

$$Y_n(t) = -1 \quad \text{für} \quad \alpha_{ik} < t < \beta_{ik},$$

$$Y_n(t) = 0 \quad \text{außerhalb aller } \zeta_{ik} \text{ in } \langle a, b \rangle.$$

Dann ist

$$(29) \quad \int_a^b \bar{y}(t) dA(t) = \sum_{i,k} \pm \int_{\zeta_{ik}} dA(t) = \sum_{i,k} [A(\alpha_{ik}) - A(\beta_{ik})] > \eta.$$

Wir werden jetzt $Y_n(t)$ so modifizieren, daß wir zu einer stetigen Funktion $Y_n(t)$ kommen, die eine zu (29) analoge Ungleichheit erfüllt. Es möge z. B. $Y_n(t)$ in einem Intervalle ζ_{ik} gleich -1 sein; es ist dann

$$Y_n(\alpha_{ik}) = 0, \quad Y_n(\beta_{ik}) = 0.$$

Wir wählen $\varrho > 0$ so, daß für alle (i, k)

$$2\varrho < \zeta_{ik}$$

wird und definieren zunächst

$$Y_n(t) = Y_n(t) \quad \text{für alle } t \text{ in } \zeta_{ik},$$

die Intervalle $\langle \alpha_{ik}, \alpha_{ik} + \varrho \rangle$ und $\langle \beta_{ik} - \varrho, \beta_{ik} \rangle$ ausgenommen, wo $Y_n(t)$ gleich denjenigen ganzen linearen Funktionen gesetzt wird, die die Werte

$$Y_n(\alpha_{ik}) = 0, \quad Y_n(\alpha_{ik} + \varrho) = -1,$$

bzw.

$$Y_n(\beta_{ik} - \varrho) = -1, \quad Y_n(\beta_{ik}) = 0$$

annehmen. Wäre die Funktion $Y_n(t)$ in ζ_{ik} gleich $+1$, so hätte man sie in den Intervallen $\langle \beta_{ik}, \beta_{ik} + \varrho \rangle$ und $\langle \alpha_{ik} - \varrho, \alpha_{ik} \rangle$ durch analoge Interpolationen zu modifizieren. Diese Modifikationen werden in allen ζ_{ik} durchgeführt. Die Funktion $Y_n(t)$ unterscheidet sich von $Y_n(t)$ in gewissen

Intervallen, deren jedes die Länge ϱ hat und deren Anzahl endlich und von ϱ unabhängig ist. Der Wert des Integrals

$$\int_{\zeta_{ik}} \bar{Y}_n(t) dA(t)$$

erleidet eine Änderung, deren Betrag

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\zeta_{ik}} Y_n(t) dA(t) - \int_{\zeta_{ik}} \bar{Y}_n(t) dA(t) \right| = \\ & = \left| \int_{\alpha_{ik}}^{\alpha_{ik} + \varrho} [Y_n(t) - \bar{Y}_n(t)] dA(t) + \int_{\beta_{ik} - \varrho}^{\beta_{ik}} [Y_n(t) - \bar{Y}_n(t)] dA(t) \right| \leq \\ & \leq \int_{\alpha_{ik}}^{\alpha_{ik} + \varrho} |dA(t)| + \int_{\beta_{ik} - \varrho}^{\beta_{ik}} |dA(t)| \end{aligned}$$

nicht größer als die Summe der Schwankungen von $A(t)$ in $\langle \alpha_{ik}, \alpha_{ik} + \varrho \rangle$ und $\langle \beta_{ik} - \varrho, \beta_{ik} \rangle$ ist. Für $\varrho \rightarrow 0$ konvergiert jene Summe gegen Null, weshalb auch

$$(30) \quad \int_a^b Y_n(t) dA(t) \rightarrow \int_a^b \bar{Y}_n(t) dA(t).$$

Da aber $\bar{Y}_n(t)$ die Ungleichheit (29) erfüllt, so ist offenbar für ein bestimmtes hinreichend kleines $\varrho = \varrho_n$

$$(31) \quad \int_a^b Y_n(t) dA(t) > \eta.$$

Nun ist aber, außer in den Intervallen ζ_{ik} , deren Gesamtlänge kleiner als $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ist, $Y_n(t) = 0$. In jenen Intervallen ist aber

$$|Y_n(t)| \leq 1;$$

es ist also

$$(32) \quad \int_a^b |Y_n(t)| dt < \frac{1}{n}.$$

Da $Y_n(t)$ stetig ist, so gilt (27) und ergibt mit Rücksicht auf (31)

$$(33) \quad F(Y_n) > \eta > 0.$$

für alle n . Wegen Stetigkeit I der Operation $F(X)$ und wegen (32) ist indessen

$$F(Y_n) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

was (33) widerspricht. Damit ist die Totalstetigkeit von $A(t)$ bewiesen; $A(t)$ ist also ein Integral.

Es sei nun $A'(t)$ die Ableitung von $A(t)$. Die Integrationstheorie lehrt:

1. $A'(t)$ gehört zu S ,

$$2. \quad \int_a^t A'(t) dt = A(t) - A(a),$$

und

$$(34) \quad \int_a^b X(t) dA(t) - \int_a^b X(t) A'(t) dt$$

für alle stetigen $X(t)$. Die Formeln (27) und (34) ergeben für alle zu C gehörenden X

$$(35) \quad F(X) = \int_a^b A'(t) X(t) dt.$$

Es sei nun X ein Punkt von B . Nach bekannten Sätzen existiert dann in C eine Punktfolge $\{X_n\}$, so daß

$$(36) \quad \int_a^b |X(t) - X_n(t)| dt \rightarrow 0$$

und

$$(37) \quad |X_n(t)| \leq \text{obere Grenze von } |X(t)| = M$$

gilt¹²⁾. Aus (36) und (37) folgt¹³⁾

$$(38) \quad \int_a^b A'(t) X_n(t) dt \rightarrow \int_a^b A'(t) X(t) dt.$$

Aus (35) folgt, da X_n zu C gehört,

$$(39) \quad \int_a^b A'(t) X_n(t) dt = F(X_n).$$

Aus (36) und aus der Stetigkeit von $F(X)$ in BI folgt

$$(40) \quad F(X_n) \rightarrow F(X).$$

Die Beziehungen (38), (39) und (40) ergeben

$$F(X) = \int_a^b A'(t) X(t) dt$$

für alle zu B gehörenden X , womit der Satz 3 endgültig bewiesen ist.

¹²⁾ Es genügt $X_n(t)$ als den Mittelwert (vom Index n) der Fourierschen Entwicklung von $X(t)$ anzunehmen. Bezeichnet $\sigma_n(t)$ die Partialsumme selbst, so ist $\int_a^b (X(t) - \sigma_n(t))^2 dt \rightarrow 0$, also auch $\int_a^b |X(t) - \sigma_n(t)| dt \rightarrow 0$, woraus leicht

$$\int_a^b |X(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_k(t)| dt \rightarrow 0$$

folgt.

¹³⁾ Vgl. den Beweis der Umkehrung des Satzes 3.

Beweis der Umkehrung des Satzes 3. Es ist klar, daß für jedes zu S gehörende H das Integral (14) eine in ganz B_M additive Operation in X darstellt. Die Stetigkeit jener Operation, die wir bereits im Schluß von (36) und (37) auf (38) benutzt haben, beweist man folgendermaßen.

Aus

$$\int_a^b |X_n(t) - X(t)| dt \rightarrow 0$$

folgt, daß man für ein jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ angeben kann, so daß für $n > N$ die Menge $E(\varepsilon)$ der Punkte t , für welche

$$(41) \quad |X_n(t) - X(t)| \geq \varepsilon$$

ist, das Maß $e(\varepsilon) < \varepsilon$ hat.

Andererseits ist bekanntlich für $e(\varepsilon) \rightarrow 0$

$$(42) \quad \int_{E(\varepsilon)} |H(t)| dt \rightarrow 0.$$

Ist also $\eta > 0$, und wählt man ε_1 , so daß

$$\varepsilon_1 \int_a^b |H(t)| dt < \eta/2$$

wird, ferner ein $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, so daß

$$2M \int_{E(\varepsilon_2)} |H(t)| dt < \eta/2$$

gilt, so wird man für $n > N(\varepsilon_2)$ die Ungleichheiten erhalten:

$$\begin{aligned} (43) \quad & |F(X_n) - F(X)| = \left| \int_a^b H(t) [X_n(t) - X(t)] dt \right| \\ & \leq \int_a^b |H(t)| |X_n(t) - X(t)| dt = \int_{E(\varepsilon_2)} + \int_{CE(\varepsilon_2)} \quad (CE(\varepsilon_2) = \text{Komplementärmenge von } E(\varepsilon_2)) \\ & \leq \int_{E(\varepsilon_2)} (|X_n(t)| + |X(t)|) |H(t)| dt + \varepsilon_2 \int_a^b |H(t)| dt \\ & \leq 2M \int_{E(\varepsilon_2)} |H(t)| dt + \varepsilon_2 \int_a^b |H(t)| dt < \eta, \end{aligned}$$

womit die Stetigkeit von $F(X)$ in $B_M I$ bewiesen ist.

Parallelsatz 3. Legt man das T -System als Koordinatensystem zugrunde, so gilt für eine in $B_M I$ erklärte additive und stetige Operation $F(X)$ immer

$$(44) \quad F(X) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k,$$

wo $\{h_k\}$, $\{x_k\}$ die T -Koordinaten der Funktion H , deren Existenz in S der Satz 3 verbürgt, bzw. von X sind.

Beweis. Nach Satz 3 ist

$$(45) \quad F(X) = \int_a^b H(t) X(t) dt;$$

um daraus (44) zu erhalten, genügt es, in dem Beweise des Parallelsatzes 1 überall H mit $\{h_k\}$ und $\{x_k\}$ zu vertauschen, da ja jetzt H zu S , X zu B gehört. So erhält man (23) und, unter Heranziehung von (45), die Formel (44), w. z. b. w.

Umkehrung des Parallelsatzes 3. Ist die Linearform

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x$$

für alle Folgen $\{x_k\}$, die als T -Koordinaten von Punkten in B_M gedeutet werden können, im Mittel konvergent, so ist $\{h_k\}$ die T -Koordinatenfolge eines zu S gehörenden Punktes und die Linearform stellt eine in $B_M I$ erklärte, stetige, additive Operation in bezug auf X dar.

Beweis. Setzt man

$$(46) \quad H_n^{(1)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) h_k \varphi_k(t),$$

so ist nach Voraussetzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b H_n^{(1)}(t) X(t) dt$$

für alle zu B_M (und für alle zu B gehörenden X) vorhanden. Definieren wir

$$(47) \quad F(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b H_n^{(1)}(t) X(t) dt,$$

so wird $F(X)$ augenscheinlich in ganz B_M erklärt und additiv sein und die Beziehung (44) erfüllen. Man hat nur noch zu zeigen, daß $F(X)$ in $B_M I$ stetig ist¹⁴⁾. Zunächst bemerken wir, daß nach Hilfssatz 3 und nach Voraussetzung das Integral

$$\int_a^b |H_n^{(1)}(t)| dt$$

für alle n unterhalb einer festen, positiven Schranke R bleibt. Wäre nun $F(X)$ nicht stetig, so würde eine Folge $\{X_p\}$ existieren, so daß

$$X_p \rightarrow X \text{ in } B_M I$$

¹⁴⁾ Diesen Ansatz zum Beweise verdanke ich Herrn St. Banach.

gälte, während zugleich die Beziehung

$$F(X_p) \rightarrow F(X)$$

nicht erfüllt wäre. Setzt man

$$X - X_p = Y_p,$$

so erhält man für $p \rightarrow \infty$

$$\int_a^b |Y_p(t)| dt \rightarrow 0,$$

$$F(Y_p) \rightarrow 0.$$

Aus der Folge $\{Y_p\}$ könnte man demnach eine Folge $\{Z_p\}$ aussondern, so daß

$$(48) \quad \int_a^b |Z_p(t)| dt \rightarrow 0$$

und für alle p

$$(49) \quad |F(Z_p)| > \eta > 0$$

wäre. Ist nun $\Pi(\varepsilon)$ diejenige Menge in $\langle a, b \rangle$, für welche

$$|Z_p| < \varepsilon$$

gilt, so ist

$$\left| \int_{\Pi(\varepsilon)} H_n^{(1)}(t) Z_p(t) dt \right| < R\varepsilon.$$

Für

$$2R\varepsilon < \eta, \quad \text{d. h.} \quad \varepsilon < \frac{\eta}{2R}$$

folgt hieraus

$$(50) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Pi(\varepsilon)} H_n^{(1)}(t) Z_p(t) dt \right| \leq \eta/2.$$

Bezeichnet man die Komplementärmenge von $\Pi(\varepsilon)$ in $\langle a, b \rangle$ mit $K(\varepsilon)$, so folgt aus (47), (49) und (50)

$$(51) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{K(\varepsilon)} H_n^{(1)}(t) Z_p(t) dt \right| > \eta/2.$$

Wird nun ε festgehalten, etwa $\varepsilon = \frac{\eta}{3R}$ gesetzt, so bleibt K nur von p abhängig, so daß wir $K = K(p)$ schreiben können. Wegen (48) konvergiert

$$(52) \quad \text{für } p \rightarrow \infty \text{ das Maß von } K(p) \rightarrow 0.$$

Die Beziehung (51) erlaubt eine Zahl $n = N(p)$ zu bestimmen, so daß

$$(53) \quad \left| \int_{K(p)} H_{N(p)}^{(1)}(t) Z_p(t) dt \right| > \eta/2$$

sei. Wir wollen jetzt die Wertänderung abschätzen, welche der Ausdruck (53) erfährt, wenn man anstatt $K(p)$ $K^*(p)$ setzt,

$$(Def) \quad K^*(p) = K(p) - A(p),$$

$$\text{Maß von } A(p) = \delta_p.$$

Der Betrag dieser Wertänderung wird — wegen $|Z_p| \leq 2M$ —

$$2M \int_{A(p)} |H_{N(p)}^{(1)}(t)| dt = 2M o_p(\delta_p)$$

nicht übertreffen, wo $o_p(\delta_p)$ mit δ_p gegen Null strebt.

Ist also δ_p klein genug ($\delta_p < \beta_p$), so wird diese Wertänderung kleiner als $\frac{\eta}{12}$ sein; aus der Ungleichheit (53) folgt

$$(54) \quad \left| \int_{K^*(p)} H_{N(p)}^{(1)}(t) Z_p(t) dt \right| > \frac{5\eta}{12}$$

für $\delta_p < \beta_p$, wo β_p eine positive Zahl bezeichnet. Wegen (52) ist es möglich, eine Folge von Indizes $\{p_\nu\}$ sukzessive zu bestimmen, so daß

$$(55) \quad \begin{aligned} \text{das Maß von } K(p_2) + \text{d. M. v. } K(p_3) + \dots + \text{d. M. v. } K(p_\nu) + \dots &< \beta_{p_1}, \\ \text{d. M. v. } K(p_3) + \dots + \text{d. M. v. } K(p_\nu) + \dots &< \beta_{p_2}, \end{aligned}$$

usw. gilt.

Definieren wir:

$$(56) \quad A(p_1) = K(p_2) + K(p_3) + \dots,$$

$$A(p_2) = K(p_3) + \dots,$$

allgemein

$$A(p_\nu) = \sum_{k=\nu+1}^{\infty} K(p_k), \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

so kommt wegen (54), (55) und (56)

$$(57) \quad \left| \int_{K^*(p_\nu)} H_{N(p_\nu)}^{(1)}(t) Z_{p_\nu}(t) dt \right| > \frac{5\eta}{12}.$$

Da $K^*(p_\nu) = K(p_\nu) - A(p_\nu)$ ist, so sind alle $K^*(p_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) untereinander *punktfremd*. Wir können daher eine Funktion $Z(t)$, die zu B_M gehört, folgendermaßen definieren:

$$(58) \quad \begin{aligned} Z(t) &= \pm Z_{p_\nu}(t) \text{ für die zu } K^*(p_\nu) \text{ gehörenden } t, \\ Z(t) &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Die Vorzeichen werden nachträglich bestimmt werden. Wie sie aber auch seien, ist

$$(59) \left\{ \begin{aligned} & \int_a^b H_{N(p_r)}^{(1)}(t) Z(t) dt - \sum_{\mu=1}^r \int_{K^*(p_\mu)} H_{N(p_\mu)}^{(1)}(t) [\pm Z_{p_r}(t)] dt \\ & - \sum_{\mu=1}^{r-1} \int_{K^*(p_\mu)} H_{N(p_r)}^{(1)}(t) Z_{p_\mu}(t) dt \pm \int_{K^*(p_r)} H_{N(p_r)}^{(1)}(t) Z_{p_r}(t) dt \\ & \pm \sum_{\mu=1}^r \int_{K^*(p_\mu)} H_{N(p_\mu)}^{(1)}(t) [\pm Z_{p_\mu}(t)] dt. \end{aligned} \right.$$

Von den drei Summanden, in welche (59) zerfällt, ist der Betrag des letzten kleiner als $\eta/12$, da er doch gleich

$$\sum_{\mu=1}^r \int_{K^*(p_\mu)} Z(t) H_{N(p_\mu)}^{(1)}(t) dt$$

ist, und, da $K^*(p)$ immer in $K^*(p)$ enthalten ist, wegen (55) das Maß von $\sum_{\mu=1}^r K^*(p_\mu) \leq$ das Maß von $\sum_{\mu=1}^r K^*(p_\mu) \leq \beta_{p_r}$ ist. Der Betrag des zweiten Summanden ist nach (56) größer als $\frac{\eta}{12}$. Wir können durch Vorzeichenwahl also erreichen, daß der zweite Summand

$$> \frac{\eta}{12} \quad \text{oder} \quad < -\frac{\eta}{12}$$

wird. Die Summe des zweiten und des dritten Summanden wird dann sicher

$$> \frac{\eta}{12} - \frac{\eta}{12} \quad \text{oder} \quad < -\frac{\eta}{12} + \frac{\eta}{12}$$

sein. Wir können also durch die Vorzeichenwahl in der Definition der Werte (58), die $Z(t)$ in $K^*(p)$ annehmen soll, den Wert von (59) wenigstens um $2 \cdot \frac{\eta}{12}$ ändern, auch noch, nachdem die Vorzeichen in $K^*(p_1)$, $K^*(p_2)$, ..., $K^*(p_{r-1})$ gewählt worden sind und infolgedessen der Wert des ersten Summanden feststeht. Ist also irgendeine Zahl L gegeben, so kann man durch die Vorzeichenwahl in $K^*(p)$ erreichen, daß der Wert von (59) von L um mehr als η abweicht und diese Abweichung trotz der späteren Vorzeichenwahl (in $K^*(p_{r+1})$ usw.) erhalten bleibt. Die Wahl der Vorzeichen wird nun sukzessive wie folgt getroffen.

In $K^*(p_1)$ sei $Z(t) = \pm Z_{p_1}(t)$.

Ist nun der Wert von $Z(t)$ in $K^*(p_1)$ bestimmt, so kann man bereits das Integral

$$\int_a^b H_{N(p_1)}^{(1)}(t) Z(t) dt$$

mit der Genauigkeit von $2 \cdot \frac{\eta}{12} = \frac{\eta}{6}$ berechnen, wie die Darstellung (59) mit $N = 1$, d. h. ohne ersten Summanden lehrt. Es ist also

$$J_1 = \int_a^b H_{N(p_1)}^{(1)}(t) Z(t) dt = L_1 \pm \Theta_1 \frac{\eta}{12}, \quad (0 < \Theta_1 < 1)$$

wobei L_1 bekannt ist.

Man kann nun das Vorzeichen von $Z(t)$ in $K^*(p_2)$ so bestimmen, daß die Zahl

$$J_2 = \int_a^b H_{N(p_2)}^{(1)}(t) Z(t) dt$$

um wenigstens $\frac{\eta}{3}$ von L_1 , mithin um wenigstens $\frac{\eta}{4}$ von J_1 abweicht. Allgemein: hat man die Vorzeichen von $Z(t)$ in $K^*(p_1), K^*(p_2), \dots, K^*(p_r)$ bestimmt, so kann man

$$J_r = \int_a^b H_{N(p_r)}^{(1)}(t) Z(t) dt = L_r \pm \Theta_r \frac{\eta}{12} \quad (0 < \Theta_r < 1)$$

mit einer Genauigkeit von $2 \cdot \frac{\eta}{12}$ berechnen, und man kann das Vorzeichen von $Z(t)$ in $K^*(p_{r+1})$ so wählen, daß die Zahl J_{r+1} von L_r um wenigstens um $\frac{\eta}{3}$, mithin von J_r um wenigstens $\frac{\eta}{4}$ abweicht.

Es ist dann

$$|J_1 - J_2| > \frac{\eta}{4}, \dots, |J_{r+1} - J_r| > \frac{\eta}{4}, \dots$$

Die Folge $\{J_r\}$, d. h.

$$\left\{ \int_a^b H_{N(p_r)}^{(1)}(t) Z(t) dt \right\},$$

ist demnach entgegen der Voraussetzung divergent. — Es ist also $F(X)$ in $B_M I$ stetig. —

Es bleibt noch zu beweisen, daß $\{h_k\}$ die T -Koordinatenfolge eines zu S gehörenden Punktes ist.

Wie eben gezeigt wurde, ist $F(X)$ durch die Formel (47) in ganz $B_M I$ erklärt, außerdem additiv und stetig. Nach Satz 3 gilt also in $B_M I$

$$F(X) = \int_a^b H(t) \dot{X}(t) dt,$$

und H gehört zu S . Wählt man eine positive Konstante c_k , so daß

$$|c_k \psi_k(t)|$$

eine wesentliche obere Grenze habe, die M nicht übertrifft, so darf man

in der letzten Formel X durch $c_k \psi_k$ ersetzen; dieselbe Substitution darf man in (47) vornehmen. Der Vergleich beider Formeln liefert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b H_n^{(1)}(t) \psi_k(t) dt = \int_a^b H(t) \psi_k(t) dt.$$

Greift man jetzt auf die Definition (46) zurück, so erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k+1}{n} h_k = \int_a^b H(t) \psi_k(t) dt$$

oder

$$\int_a^b H(t) \psi_k(t) dt = h_k.$$

Die Koeffizienten $\{h_k\}$ der Linearform sind also die T -Koordinaten von H . — Damit ist die Umkehrung des Parallelsatzes 3 vollständig bewiesen. —

Anwendungen.

Die Parallelsätze 1 und 3 sowie ihre Umkehrungen gestatten gewisse Anwendungen auf die Theorie der Fourierschen Reihen. Es handelt sich dabei um das folgende Problem:

Ist

$$(60) \quad h_1 \psi_1(t) + h_2 \psi_2(t) + \dots + h_k \psi_k(t) \dots$$

eine Fouriersche Reihe und

$$(61) \quad \lambda_1 h_1 \psi_1(t) + \lambda_2 h_2 \psi_2(t) + \dots + \lambda_k h_k \psi_k(t)$$

die durch Multiplikation der Terme der Reihe (60) mit den Gliedern einer Folge

$$(62) \quad \{\lambda_k\}$$

entstandene Reihe, so erhebt sich die Frage, ob (61) noch eine Fouriersche Reihe ist? Die Bedingung

$$|\lambda_k| \leq \text{konstant}$$

ist wohl notwendig, aber *nicht hinreichend*, damit die numerische Folge (62) die Eigenschaft habe, jede Fouriersche Reihe (60) in eine Fouriersche Reihe (61) zu verwandeln. Letztere Bemerkung ist das Ergebnis eines von Herrn St. Banach konstruierten Beispiels¹⁵⁾.

Es gelten nun folgende Sätze:

Satz 4. Hät die numerische Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft, jede numerische, im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$$

¹⁵⁾ Dieses Beispiel, welches demnächst der Krakauer Akademie der Wissenschaften vorgelegt werden wird, erwähne ich mit freundlicher Erlaubnis des Autors.

in eine im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k$$

zu verwandeln, so verwandelt sie auch jede Fouriersche Reihe (60) in eine Fouriersche Reihe (61).

Beweis. Ist (60) eine Fouriersche Reihe, so ist, wie in dem Beweise des Parallelsatzes 1 auseinandergesetzt wurde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

für alle Folgen $\{x_k\}$, die als T -Koordinaten von in B gelegenen Punkten aufgefaßt werden können, im Mittel konvergent. Nach Voraussetzung des Satzes 4 ist dann auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k x_k$$

im Mittel konvergent. Nach der Umkehrung des Parallelsatzes 3 ist also $\{\lambda_k h_k\}$ die T -Koordinatenfolge eines zu S gehörenden Punktes, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Sind alle $\lambda_k, \Delta \lambda_k, \Delta^2 \lambda_k$ nicht negativ, so trifft nach G. Hardy die Voraussetzung des Satzes 4 zu¹⁶⁾.

Bemerkung 2. Eine vom Verfasser gestellte Frage, wie die numerischen Folgen $\{\lambda_k\}$ beschaffen seien, die alle im Mittel konvergenten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ in im Mittel konvergente Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k$ verwandeln, hat Herr St. Mazurkiewicz beantwortet. Er gab eine notwendige und hinreichende Bedingung für diese Eigenschaft an¹⁷⁾.

Satz 5. Hat die numerische Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft, jede numerische im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$$

¹⁶⁾ G. H. Hardy, On the summability of Fouriers series, Proceedings of the London Mathematical Society 1913, Ser. 2, Vol. 12, Part. 5, S. 364–372.

¹⁷⁾ St. Mazurkiewicz, O sumowalności szeregów kształtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie 1915, VIII Année, Fascicule 8, S. 649 bis 655. Die Bedingung lautet: $\Delta \lambda_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |n \Delta^2 \lambda_n|$ konvergiert.

von endlicher Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$$

in eine im Mittel konvergente Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k$$

zu verwandeln, so verwandelt sie auch jede Fouriersche Reihe (60) in eine Fouriersche Reihe (61).

Beweis. In dem Beweise des Satzes 4 ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$ für alle zu B gehörenden X nicht nur im Mittel konvergent, sondern auch von endlicher Quadratsumme, da ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

endlich und

$$h_k \rightarrow 0, \quad h_k^2 \rightarrow 0$$

ist, wenn (60) eine Fouriersche Reihe ist. Diese Feststellung erlaubt den Beweis des Satzes 4 so zu ändern, daß man den schärferen Satz 5 erhält.

Bemerkung 3. Satz 5 gibt zu folgender Frage Anlaß: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine Folge $\{\lambda_k\}$ die Voraussetzung des Satzes 5 erfüllt? So ist z. B. die Bedingung „ $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2$ konvergent“ hinreichend, aber nicht notwendig, da ja die Hardy'schen $\{\lambda_k\}$ der Bemerkung 1, z. B. $\lambda_k = \left| \frac{1}{\sqrt{k}} \right|$, sicher die Voraussetzungen des Satzes 5 erfüllen.

Satz 6. Damit eine numerische Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft habe, jede Fouriersche Reihe (60) immer in eine Fouriersche Reihe (61) zu verwandeln, ist es notwendig und hinreichend, daß sie jede Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion in eine Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion verwandle.

Beweis. Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \psi_k(t)$$

eine Fouriersche Reihe, so ist wegen (23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

für alle X von B_M , also auch für alle X von B im Mittel konvergent. Ist nun stets

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \psi_k(t)$$

eine Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \psi_k(t)$$

eine Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion ist, so muß nach (23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \lambda_k x_k$$

auch im Mittel konvergent sein, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \psi_k(t)$ eine Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion ist.

Es ist darum

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k x_k$$

für alle X von B im Mittel konvergent. Nach der Umkehrung des Parallelsatzes 3 reicht dies hin, um schließen zu können, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k h_k \psi_k(t)$$

eine Fouriersche Reihe ist. Die Bedingung des Satzes 6 ist also hinreichend. Der Beweis, daß sie notwendig ist, ist dem zuletzt geführten analog, nur muß Parallelsatz 3 und dessen Umkehrung durch den Parallelsatz 1 und dessen Umkehrung ersetzt werden.

Satz 7. Genügt die numerische Folge $\{\lambda_k\}$ den Voraussetzungen des Satzes 4 oder des Satzes 5, so verwandelt sie jede Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion in die Fouriersche Reihe einer beschränkten Funktion.

Beweis: Folgt aus Satz 6 und Satz 4 bzw. 5.

Satz 8. Damit die Folge $\{\lambda_k\}$ die Eigenschaft habe, jede Fouriersche Reihe einer mit ihrem Quadrate integrierbaren Funktion in die Fouriersche Reihe einer ebensolchen Funktion zu verwandeln, ist es hinreichend und notwendig, daß die Folge

$$\{\lambda_k\}$$

beschränkt sei.

Beweis: Folgt aus dem Riesz-Fischerschen Satze.

Bemerkung 4. Satz 8 ist, wie alles, was S^2 betrifft, bekannt, und wurde hier nur der Vollständigkeit halber aufgenommen. Er ist allgemeine als die anderen Sätze insofern, als er auch andere als T -Entwicklungen betrifft.

Bemerkung 5. Da nur beschränkte Folgen $\{\lambda_k\}$ die Voraussetzungen der Sätze 4 und 5 erfüllen, so verwandeln nach Satz 8 die Folgen $\{\lambda_k\}$ der Sätze 4 oder 5 die Fourierschen Reihen der samt ihren Quadraten integrierbaren Funktionen in Fouriersche Reihen ebensolcher Funktionen. Die Beziehung, die zwischen Fourierschen Reihen integrierbarer und beschränkter Funktionen nach Satz 6 besteht, gilt nicht in analoger Weise für die quadratisch integrierbaren Funktionen. Die Beschränktheit der Folge $\{\lambda_k\}$, welche laut Satz 8 nötig ist und hinreicht, um zu schließen, daß (61) eine Fouriersche Reihe einer mit ihrem Quadrate integrierbaren Funktion ist, falls (60) eine solche Reihe ist, erlaubt noch nicht, wie das am Anfang dieses Kapitels erwähnte Banachsche Beispiel lehrt, zu schließen, daß $\{\lambda_k\}$ alle Fouriersche Reihen in Fouriersche Reihen verwandelt.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Ist $H(t)$ eine integrierbare, nicht wesentlich beschränkte Funktion, so kann man eine Folge von beschränkten Funktionen $\{X_n(t)\}$ finden, so daß für $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b |X_n(t)| dt \rightarrow 0,$$

$$\int_a^b H(t) X_n(t) dt \rightarrow +\infty.$$

Beweis. Bestimmen wir die Menge E_r der t -Punkte, für welche

$$r > |H(t)| \geq r-1 \quad (r=1, 2, \dots)$$

ist, und es sei ε_r das Maß von E_r .

Nach Voraussetzung sind in der Folge $\{\varepsilon_r\}$ unendlich viele Glieder von Null verschieden; sie bilden eine Teilfolge

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p, \dots,$$

welcher die Teilfolge der Folge $\{E_r\}$

$$F_1, F_2, \dots, F_p, \dots$$

entspricht. Es ist

$$M_p + 1 > H(t) \geq M_p \text{ in } F_p$$

und

$$M_{p+1} > M_p, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} M_p = +\infty.$$

Die Reihe

$$\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p$$

konvergiert, da doch die $\{E_r\}$ und ebenso die $\{F_p\}$ untereinander punktfremd sind; man kann darum wegen $M_p \rightarrow \infty$ eine Folge von positiven Zahlen $\{\varrho_p\}$ bestimmen, so daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varrho_p \eta_p$$

konvergiert, während zugleich

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varrho_p M_p \eta_p$$

divergiert. Nun bestimmen wir eine zahlentheoretische Funktion $\kappa(n)$ von n , so daß

$$\kappa(n) > n, \quad \sum_{p=n}^{p=\kappa(n)} \varrho_p M_p \eta_p \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty$$

gilt, was wegen der Divergenz der zuletzt hingeschriebenen unendlichen Reihe erfüllbar ist, und setzen

$$\begin{aligned} \lambda_{np} &= \varrho_p & \text{für } n \leq p \leq \kappa(n), \\ \lambda_{np} &= 0 & \text{für } p < n, \quad p > \kappa(n). \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir $X_n(t)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} |X_n(t)| &= \lambda_{np} \text{ in } F_p \text{ für alle } p, \\ |X_n(t)| &= 0 \quad \text{sonst,} \end{aligned}$$

schließlich

$$\text{sign } X_n(t) = \text{sign } H(t) \text{ in ganz } < a, b >.$$

Da für ein gegebenes n nur endlich viele λ_{np} von Null verschieden sind, ist $X_n(t)$ eine beschränkte Funktion. Man hat ferner

$$\int_a^b |X_n(t)| dt = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{F_p} |X_n(t)| dt = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{np} \eta_p = \sum_{p=n}^{p=\kappa(n)} \varrho_p \eta_p \leq \sum_{p=n}^{\infty} \varrho_p \eta_p,$$

welch letzterer Ausdruck mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b |H(t) X_n(t)| dt &= \int_a^b |H(t) X_n(t)| dt = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{F_p} |H(t) X_n(t)| dt \geq \\ &\geq \sum_{p=n}^{p=\kappa(n)} \int_{F_p} |H(t) X_n(t)| dt \geq \sum_{p=n}^{p=\kappa(n)} M_p \lambda_{np} \eta_p = \sum_{p=n}^{p=\kappa(n)} \varrho_p M_p \eta_p, \end{aligned}$$

welch letzterer Ausdruck aber mit p gegen $+\infty$ strebt.

Hilfssatz 2. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ divergent, so existiert eine Folge $\{x_k\}$, so daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

konvergiert und

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_k$$

gegen $+\infty$ im eigentlichen Sinne divergiert.

Beweis. Nehmen wir $h_1 \neq 0$ an und setzen

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n h_k^2.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ divergent vorausgesetzt wurde, so ist nach einem Abelschen Satze über Reihen mit positiven Gliedern

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^2}{|\sigma_k^{1+\varrho}|}$$

für jedes positive ϱ konvergent, für jedes negative ϱ „eigentlich“ divergent¹⁸⁾; setzt man daher

$$x_n = \frac{h_n}{|\sigma_n^{\frac{1}{2}}|},$$

so wird sich die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{|\sigma_n^{1+\frac{1}{2}}|}$$

als konvergent, dagegen die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{|\sigma_n^{1-\frac{1}{2}}|}$$

als gegen $+\infty$ divergent erweisen. Ist $h_1 = 0$, so beweist man den Satz für die Reihe $(1+h_1)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k^2$, woraus dann seine Gültigkeit für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k^2$ folgt.

Bemerkung. Der Hilfssatz 2 ist elementar und längst bekannt; er spielt in der Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variablen eine Rolle.

¹⁸⁾ J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle, Paris 1904; Bd. I, § 130, S. 183–187.

Hilfssatz 3. Ist für alle beschränkten Funktionen $X(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b G_n(t) X(t) dt$$

vorhanden, so muß

$$\int_a^b |G_n(t)| dt$$

unterhalb einer von n unabhängigen Schranke L liegen; dabei wird jede Funktion $G_n(t)$ als beschränkt angenommen.

Beweis. Nehmen wir an, der Satz sei unrichtig. Es ist dann

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |G_n(t)| dt = +\infty.$$

Wir bezeichnen mit M_i die wesentliche obere Grenze von $G_i(t)$, mit N_i den Wert des Integrals

$$\int_a^b |G_i(t)| dt;$$

es ist also: $\limsup_{n \rightarrow \infty} N_i = +\infty$.

Wir definieren ferner

$$f_i(t) = \text{sign } G_i(t),$$

also

$$|f_i(t)| \leq 1,$$

und führen eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$$

ein, deren Glieder sukzessive bestimmt werden. Ist dann $\{n_i\}$ irgendeine Folge wachsender Indizes, so ist

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i f_{n_i}(t)$$

eine unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe; es folgt:

$$\int_a^b G_{n_1}(t) X(t) dt = \varepsilon_1 \int_a^b |G_{n_1}(t)| dt + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \int_a^b G_{n_1}(t) f_{n_i}(t) dt = \varepsilon_1 N_{n_1} + R_1,$$

$$|R_1| \leq M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i.$$

Jetzt wählen wir $\varepsilon_1 = 1$ und n_1 so groß, daß

$$\varepsilon_1 N_{n_1} > 1 + \eta \quad (\eta \text{ eine feste positive Zahl})$$

sei; wir legen ferner den $\{\varepsilon_i\}$ die Bedingung

$$M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leq \eta$$

auf; es folgt

$$\int_a^b G_{n_1}(t) X(t) dt > 1.$$

Hat man $n_1, n_2, \dots, n_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1}$ bereits bestimmt, so findet man n_{k+1} wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned} \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) X(t) dt &= \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) \sum_{i=1}^{i=k} \varepsilon_i f_{n_i}(t) dt + \varepsilon_{k+1} \int_a^b |G_{n_{k+1}}(t)| dt + \\ &+ \sum_{i=k+2}^{\infty} \varepsilon_i \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) f_{n_i}(t) dt = \int_a^b G_{n_{k+1}}(t) \sum_{i=1}^{i=k} (t) dt + \varepsilon_{k+1} \cdot N_{n_{k+1}} + R_k. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung strebt der erste Summand für $n_{k+1} \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert L_k ; wählt man daher n_{k+1} so groß, daß der betrachtete Summand von L_k um weniger als $\frac{\eta}{2}$ abweicht und daß

$$\varepsilon_{k+1} N_{n_{k+1}} > |L_k| + k + 1 + \eta$$

sei und legt man schließlich den $\{\varepsilon_i\}$ die Bedingung

$$R_k \leq M_{n_{k+1}} \sum_{i=k+2}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{\eta}{2}$$

auf, so findet man

$$\int_a^b G_{n_{k+1}}(t) X(t) dt > k + 1.$$

Die Bestimmung der ε_i den unendlich vielen Bedingungen gemäß stößt auf keine Schwierigkeiten. Es ist nämlich zunächst

$$\varepsilon_1 = 1;$$

kennt man ε_1 , so bestimmt man n_1 und man hat die Bedingung

$$M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leq \eta \quad \text{oder} \quad \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{\eta}{M_{n_1}}$$

zu erfüllen; man erfüllt sie, indem man zunächst

$$\varepsilon_2 < \frac{\eta}{M_{n_1}}$$

annimmt. Sind ε_1 und ε_2 bekannt, so kann man n_2 und M_{n_2} berechnen und hat die Bedingung

$$\sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\eta}{2 M_{n_2}}$$

zu erfüllen; man wählt hierzu ε_3 so klein, daß

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 < \frac{\eta}{M_{n_1}}, \quad \varepsilon_3 < \frac{\eta}{2M_{n_2}}$$

ausfällt. Allgemein sind bereits $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ den Ungleichungen

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_k < \frac{\eta}{M_{n_1}},$$

$$\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_k < \frac{\eta}{2M_{n_2}},$$

.....

$$\varepsilon_k < \frac{\eta}{2M_{n_{k-1}}}$$

gemäß bestimmt, so ist es möglich ε_{k+1} so zu bestimmen, daß die Ungleichheiten

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{M_{n_1}},$$

$$\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{2M_{n_2}},$$

.....

$$\varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{2M_{n_k}},$$

gelten und daß infolgedessen schließlich auch die Bedingungen

$$M_{n_1} \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \leq \eta, \quad M_{n_k} \sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i \leq \frac{\eta}{2}$$

für alle $k \geq 2$ erfüllt sind.

Ist nun $X(t)$ wie vorstehend definiert, so widerspricht die Ungleichheit

$$\int_a^b G_{n_{k+1}}(t) X(t) dt > k + 1,$$

die wir abgeleitet haben, der Voraussetzung, von der wir ausgegangen sind, so daß sich der Hilfssatz also als richtig herausstellt.

Hilfssatz 4. Sind die beschränkten Funktionen $\{K_n(t)\}$ nicht gleichmäßig wesentlich beschränkt, so ist eine integrierbare Funktion $X(t)$ vorhanden, so daß

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K_n(t) X(t) dt = +\infty$$

gilt. Der mir von Herrn Banach mitgeteilte Beweis dieser Variante eines Lebesgueschen Satzes¹⁹⁾ lautet im wesentlichen folgendermaßen:

¹⁹⁾ Dieser Satz lautet: Soll $\int_a^b K_n(t) X(t) dt \rightarrow 0$ für alle integrierbaren $X(t)$

Zunächst bemerken wir, daß man zu einer gegebenen beschränkten Funktion $K_n(t)$ und zu einer gegebenen positiven Zahl ε immer eine beschränkte Funktion $f_n(t)$ finden kann derart, daß

$$\int_a^b |f_n(t)| dt = 1, \quad \int_a^b f_n(t) K_n(t) dt > M_n - \varepsilon$$

gilt, wo M_n die wesentliche obere Grenze von $|K_n(t)|$ bezeichnet. Um $f_n(t)$ zu konstruieren, braucht man nämlich nur diejenige Menge Γ_n , deren Maß γ_n sicher positiv ist, zu bestimmen, auf der

$$|K_n(t)| > M_n - \varepsilon$$

ist, und

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\gamma_n} \quad \text{in } \Gamma_n,$$

$$\text{sign } f_n(t) = \text{sign } K_n(t) \quad \text{in } \Gamma_n,$$

$$f_n(t) = 0 \quad \text{sonst in } < a, b >$$

zu setzen.

Nach Voraussetzung ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty.$$

Man kann infolgedessen eine Indizesfolge $\{n_i\}$ sukzessive bestimmen, so daß

$$(1^0) \quad M_{n_i} > 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} M_{n_i} = +\infty,$$

$$(2^0) \quad M_{n_{i+1}} > M_{n_i}^2, \quad (i = 2, 3, \dots)$$

$$(3^0) \quad M_{n_i} > 4 \left[\int_a^b \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_i f_k(t) K_p(t) dt \right]^2 \quad \text{für alle } p.$$

Dabei ist $\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{M_{n_i}}}$, während $f_i(t)$ diejenige nach der Vorbemerkung vorhandene Funktion darstellt, die die Eigenschaften

$$\int_a^b |f_i(t)| dt = 1, \quad \int_a^b f_i(t) K_{n_i}(t) dt > M_{n_i} - \frac{1}{i}$$

hat.

Die Unmöglichkeit, die Bedingung (3^0) sukzessive zu erfüllen, würde unmittelbar die Richtigkeit des zu beweisenden Hilfssatzes 4 mit

$$X(t) = \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_i f_k(t) \quad \text{bzw.} \quad \dot{X}(t) = - \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_i f_k(t)$$

erfüllt sein, so muß $1. \int_a^\beta K_n(t) dt \rightarrow 0$ für alle in $< a, b >$ enthaltenen $< \alpha, \beta >$

2. die Folge $\{K_n(t)\}$ gleichmäßig wesentlich beschränkt sein; die Bedingungen 1. und 2. sind auch hinreichend.

erweisen. Man darf also (1^0) , (2^0) , (3^0) als sukzessive für alle i erfüllt annehmen. Setzen wir

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i f_i(t).$$

Die Funktion $X(t)$ ist integrierbar, da die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \int_a^b |f_i(t)| dt = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{M_{n_i}^{\frac{1}{2}}}$$

wegen (1^0) und (2^0) konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} \int_a^b K_{n_i}(t) X(t) dt &= \int_a^b \sum_{k=1}^{i-1} \varepsilon_k f_k(t) \cdot K_{n_i}(t) dt + \varepsilon_i \int_a^b f_i(t) K_{n_i}(t) dt + \\ &+ \int_a^b \sum_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(t) K_{n_i}(t) dt. \end{aligned}$$

Man hat also in der letzten Summe

$$|\text{Erster Summand}| < \frac{1}{2} \sqrt{M_{n_i}} \quad (\text{wegen } (3^0)),$$

$$\text{Zweiter Summand} > \sqrt{M_{n_i}} - \frac{1}{i \sqrt{M_{n_i}}},$$

$$\begin{aligned} |\text{Dritter Summand}| &\leq M_{n_i} \sum_{k=i+1}^{\infty} \varepsilon_k \leq M_{n_i} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{M_{n_{i+1}}}} + \frac{1}{\sqrt{M_{n_{i+2}}}} + \dots \right] \\ &\leq M_{n_i} \left[\frac{1}{M_{n_i}} + \frac{1}{M_{n_i}^2} + \frac{1}{M_{n_i}^3} + \dots \right] \leq \frac{M_{n_i}}{M_{n_i} - 1} \quad (\text{wegen } (2^0)). \end{aligned}$$

Da $M_{n_i} \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$, so konvergiert der zuletzt hingeschriebene Ausdruck gegen 1, und die ganze Summe wird für genügend große i größer als die Zahl

$$\frac{1}{2} \sqrt{M_{n_i}} - \frac{1}{i \sqrt{M_{n_i}}} - 1,$$

die ihrerseits für $i \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ strebt. Man hat also für unser $X(t)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b K_{n_i}(t) X(t) dt = +\infty,$$

oder

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b K_n(t) X(t) dt = +\infty,$$

w. z. b. w.

(Eingegangen im Januar 1919.)