II. Ueber die Gränzen der Magnetisirbarkeit des Eisens und des Stahles; von Dr. A. von Waltenhofen,

Professor am Polytechnikum zu Prag.

Wenngleich die Abweichungen der elektromagnetischen Intensitätscurve von der durch die Müller'sche Gleichung bestimmten Form noch nicht vollständig ermittelt worden sind, so kann doch die Frage nach der Gültigkeit des von Lenz und Jacobi aufgestellten Proportionalitätsgesetzes wenigstens insoweit als eine erledigte betrachtet werden, als es nach den vorliegenden Thatsachen außer Zweifel steht, daß es für jeden Elektromagnet eine Gränze giebt über welche hinaus sein Magnetismus selbst durch eine in's Unendliche fortgesetzte Vermehrung der Stromstärke nicht gesteigert werden könnte.

Eine andere Frage aber ist die: wie es sich in jedem Falle mit der absoluten Gröfse der Magnetisirbarkeit der kleinsten Theilchen und mit dem *numerischen Betrage des dem Sättigungszustande entsprechenden magnetischen Momentes der Gewichtseinheit* des magnetisirten Körpers verhält. Die Erörterung dieser Frage bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Vor Allem muß ich bemerken, daß diese Frage in solcher Allgemeinheit bisher noch nicht angeregt worden ist und somit auch keine Beantwortung in diesem Sinne, die ich hier anzuführen hätte, erfahren hat. Ueberhaupt ist die Zurückführung des erregten Magnetismus auf die Gewichtseinheit bei elektromagnetischen Untersuchungen bisher nicht üblich gewesen und kommt nur in wenigen speciellen Fällen vor, die ich zunächst besprechen will.

Vorerst hat W. Weber das magnetische Moment der Gewichtseinheit bei magnetischen Untersuchungen in Betracht gezogen und somit diese Gröfse eingeführt, indem er einerseits in den »Resultaten aus den Beobachtungen des magne-

tischen Vereins« (1840, Seite 89) die Zahl der absoluten Einheiten angiebt, welche die besten Stahlmagnete per Milligramm enthalten ¹⁾ und anderseits bei einer in den »elektrodynamischen Mafsbestimmungen« (Diamagnetismus, Seite 573) mitgetheilten Versuchsreihe mit einem elektromagnetisirten Eisenstäbchen für die erregten Magnetismen, die auf die Gewichtseinheit entfallenden Werthe und auch eine deren Gränzwertb vorstellende Constante ²⁾ seiner an der angeführten Versuchsreihe erprobten Formel berechnet, doch kommt in beiden Fällen meine Frage nicht in Betracht, da es sich in dem einen Falle um den permanenten Magnetismus von Stahlstäben und im anderen Falle nicht um eine vergleichende Ermittlung des magnetischen Maximums der Gewichtseinheit, sondern vielmehr um die zwischen Stromstärke und erregtem Magnetismus bestehenden Gesetzmäßigkeiten und um das Verhältnifs zwischen dem bei gleicher magnetischer Kraft beobachteten Eisen-Magnetismus und Wismuth-Diamagnetismus handelt.

Eine Berechnung des Gränzwertthes für das elektromagnetische Moment der Gewichtseinheit Eisen habe ich in meinen im Jahre 1865 erschienenen »elektromagnetischen Untersuchungen« (Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 52) gegeben, indem ich in die Müller'sche Formel

$$x = A d^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{y}{B d^{\frac{1}{2}}}$$

anstatt des Stabdurchmessers d dessen Gewicht γ einführte und sofort aus der Relation

$$y = \beta \gamma \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha \gamma^{\frac{1}{2}}}$$

die Gröfse $\mu = \lim. \frac{y}{\gamma}$ mit Hülfe der für meine Spiralen

1) Diese wichtige Angabe, auf die ich später zurückkommen werde, findet sich in der Abhandlung: »Messung starker galvanischer Ströme« usw. in der gelegentlich eingeflochteten Bemerkung, *dafs man bei einem sehr starken Stahlmagnet »400 Maafs Magnetismus auf 1 Milligramm Stahl rechnen kann.«*

2) $n\mu = 2324,68$.

bestimmten Constanten, oder vielmehr mit Hülfe des Werthes β , wovon jene Gröfse allein abhängt, berechnete und dieselbe Gröfse auch für die Müller'schen Versuche (für welche sie von Müller selbst nicht berechnet worden ist) in der Art ermittelt habe, dafs ich das unter der Voraussetzung der Dichte 7,78 aus den gegebenen Dimensionen abgeleitete Stabgewicht in Rechnung brachte. Auf diese Art ergab sich aus meinen Versuchen ein theoretisches Maximum von nahe 1679 und aus Müller's Versuchen von nahe 2616 absoluten Einheiten für das Milligramm Eisen.

Diese Zahlen dienten mir zur Vergleichung der relativen Sättigungsgrade, welche bei Müller's Versuchen und bei den meinigen erreicht worden waren. Weiter habe ich den Gegenstand damals nicht verfolgt. Diese Zahlen und die oben angeführte von Weber waren bis jetzt auch die einzigen für das magnetische Maximum der Gewichtseinheit abgeleiteten Werthe.

Eine Vergleichung derselben (1679 und 2616) könnte wohl nur zu dem Schlusse führen, dafs die fragliche Gröfse (welche ich künftig mit $m = 1000 \mu$, wobei $\mu = \lim. \frac{y}{\gamma} = 90 \beta$ ist, bezeichnen werde ¹⁾) keine absolut bestimmte, sondern von den Dimensionen der Magnetisirungsspiralen abhängige, also im Allgemeinen für verschiedene Elektromagnete eine andere ist.

Und doch sprechen triftige theoretische Gründe für die Annahme, dafs $\mu = \lim. \frac{y}{\gamma}$ eine unter allen Verhältnissen constante Gröfse sey.

Die neueren Untersuchungen über das Verhalten magnetisirter Körper haben bekanntlich zu einer Reihe von That-sachen geführt, welche sich kaum anders als durch die Annahme erklären lassen, dafs der Uebergang aus dem unmagnetischen in den magnetischen Zustand auf einer Bewegung

1) Ich habe nämlich β durchwegs unter der Voraussetzung bestimmt, dafs die Bogen in Graden, die Gewichte γ in Grammen und die Momente y in Millionen von absoluten Einheiten ausgedrückt werden. So erhält man $m = 2616$ für $\beta = 0,0291$.

magnetischer Moleküle beruhe¹⁾). Ich selbst habe einen Beitrag zu diesen Thatsachen geliefert, nicht nur durch die nähere Erforschung der von Wiedemann zuerst nachgewiesenen Aenderungen der Coërcitivkraft des Strahles durch vorausgegangene Magnetisirungen (diese Annalen Bd. 121, S. 452), sondern noch mehr durch die Entdeckung jener überraschenden Erscheinung, die ich unter dem Namen einer »anormalen Magnetisirung des Eisens« um dieselbe Zeit veröffentlicht habe²⁾, einer Erscheinung, welche als einer der schlagendsten Beweise gegen die Hypothese der Fluida (»Scheidungstheorie«) und zu Gunsten jener der drehbaren Molecularmagnete (»Drehungstheorie«) betrachtet werden kann.

Wenn wir nun im Sinne dieser Hypothese den erregten Magnetismus als das Ergebniß einer bis zu einem gewissen Grade vollzogenen Drehung magnetischer Moleküle betrachten, so folgt aus dieser Annahme sofort, *dafs das Maximum des erreichbaren Magnetismus dem Gewichte des magnetisirten Körpers proportional seyn müsse*³⁾. In der That wird dieses Maximum dann erreicht seyn, wenn die Drehung der einzelnen magnetischen Moleküle in allen Gruppen, aus welchen wir uns den magnetisirten Körper zusammengesetzt vorstellen können, soweit vollzogen ist, als es die Grenzen der unter dem Einflusse magnetisirender Kräfte überhaupt zulässigen Bewegungen gestatten. Es folgt hieraus allerdings nicht, dafs alle Gruppen, welche eine gleiche Anzahl von Molekülen umfassen oder gleiche Gewichte haben, bei eintretender magnetischer Sättigung des ganzen Körpers auch gleich stark magnetisch würden⁴⁾, es ist viel-

1) Siehe meine Abhandlung »Ueber das elektromagnetische Verhalten des Stahles« Abdruck aus dem 48. Bd. der Wiener Sitzungsberichte S. 25 und 26.

2) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 48. Auch diese Annalen Jahrgang 1864.

3) Man kann diese Folgerung übrigens auch aus der Scheidungstheorie ableiten, wenn man gleichschweren Moleculen gleiche endliche Mengen der Fluida zuschreibt.

4) Diefs würde nur dann der Fall seyn müssen, wenn man von der Annahme ausgehen wollte, dafs die magnetische Sättigung in einer vollständigen Parallelstellung aller Molecularmagnete bestehe.

mehr von vornherein wahrscheinlich, daß die magnetischen Momente, welche den einzelnen Gruppen im magnetisch gesättigten Körper zukommen, innerhalb gewisser Gränzen alle möglichen Werthe haben können. Wenn man aber erwägt, daß hierbei für jeden Punkt des Körpers alle möglichen Fälle gleich wahrscheinlich sind, indem kein Grund zur Annahme vorliegt, daß von den möglichen Werthen des Molekularmomentes in den einzelnen Schichten des magnetisch gesättigten Körpers gewisse Werthe öfter als andere vorkommen sollten¹⁾, so leuchtet ein, daß der Gränzwert $\lim. \frac{y}{\gamma}$, welcher das auf die Gewichtseinheit des magnetisch gesättigten Eisens entfallende Moment vorstellt, unter allen Verhältnissen als *ein Maß der Drehbarkeit der magnetischen Moleküle* zu betrachten seyn wird. Diese Größe ist daher nach meiner Ansicht mit gleichem Rechte als *eine für die molekulare Beschaffenheit des Eisens charakteristische physikalische Constante* anzusehen, wie z. B. die Constanten seiner Elasticität, Festigkeit, Dichte, Leitungsfähigkeit usw.

Diese Erwägung über die Bedeutung des größten magnetischen Momentes der Gewichtseinheit hat mich bestimmt, die numerische Ermittlung dieser Größe²⁾ wieder aufzunehmen und durch Heranziehung möglichst vieler Versuchsdaten mir die Aufklärung zu verschaffen, ob die auffallende Abweichung der oben angeführten Werthe für m oder beziehungsweise β vielleicht auf einer ungenauen Bestimmung beruht, oder ob sich das soeben aufgestellte Theorem,

- 1) Dieß gilt, wie gesagt, nur für den Zustand der Sättigung; denn bevor diese erreicht ist, wird die Magnetisirung im Innern des magnetischen Stabes weniger vorgeschritten seyn als in der Nähe der Oberfläche und gegen die Enden zu weniger als in der Mitte.
- 2) Eine nicht minder interessante Aufgabe wäre die Ableitung eines Ausdrucks für die Arbeit, welche der zur Hervorbringung eines bestimmten Sättigungsgrades erforderlichen Drehung der Molekularmagnete entspricht, wobei vielleicht die Weber'sche Theorie der Molekularmagnete als Grundlage der Rechnung dienen könnte.

nach welchem m und β völlig bestimmte absolute Werthe seyn sollen, überhaupt in der Erfahrung nicht bestätigt.

Um dies zu erreichen, habe ich mir die Aufgabe gestellt, alle bis jetzt vorliegenden Beobachtungsergebnisse über den Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Stromstärke, soweit dieselben zur Berechnung der Größen m und β brauchbar sind, übersichtlich geordnet zusammen zu stellen und die daraus sich ergebenden Werthe zu ermitteln.

Die hierauf bezüglichen tabellarischen und graphischen Zusammenstellungen und Rechnungen sind so umfangreich, daß ich sie wohl nicht vollständig mittheilen kann, ohne meiner Abhandlung eine all zu große Ausdehnung zu geben. Ich werde mich daher darauf beschränken, die benutzten Versuchsreihen genau zu citiren, die dabei in Anwendung gebrachten Spiralen zu bezeichnen und die gefundenen Werthe von β und m anzuführen.

Ich habe bereits oben eines Werthes $\beta = 0,029$ (genauer 0,0291) erwähnt, welcher sich aus einer Beobachtungsreihe von Müller ergeben hat. Dieselbe ist mit dem in meinen »elektromagnetischen Untersuchungen« vom Jahre 1865¹⁾ mit III bezeichneten 30 Centimeter langen Spirale ange stellt worden, wobei Müller für den Coëfficienten B seiner Formel die Zahl 58600 fand, woraus obiger Werth von β folgt, wenn die gegebene Stablänge von 33 Centimetern in Rechnung gebracht und die Dichte des Eisens = 7,78 angenommen wird. — Die betreffenden Versuche sind Seite 503 und 504 von Müller's »Bericht über die neuesten Fortschritte der Physik« verzeichnet. Ich habe aus den Versuchen mit dem 6 Millimeter dicken Stabe, welche zur Bestimmung von B oder β am besten geeignet sind, diese Werthe abgeleitet und ein mit dem Müller'schen sehr nahe übereinstimmendes Resultat erhalten.

Mit derselben Spirale III hat Müller noch eine andere Versuchsreihe ausgeführt, welche im 82. Bande dieser Annalen Seite 184 verzeichnet ist, ohne jedoch für dieselben

1) Abdruck aus dem 52. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie Seite 25 bis 27.

die Constanten seiner Formel zu bestimmen. Hier fand ich aus den Versuchen mit dem dünnsten Stabe (6^{mm}) $\beta = 0,0274$. Ich werde daher für diese Spirale No. III als Werth von β das Mittel der Zahlen 0,0291 und 0,0274 nämlich

$$\beta = 0,0282$$

annehmen.

Weitere Versuche hat Müller mit einer Combination von zwei ineinander geschobenen Spiralen von zusammen 780 Windungen, wobei die innere Spirale 532 Millimeter lang war, mit 57 Centimeter langen Stäben angestellt. Ich will diese combinirte Spirale mit IV bezeichnen. Die Versuche mit derselben sind Seite 506 und 507 des oben citirten Berichtes verzeichnet. Müller fand daraus $B = 81390$, woraus

$$\beta = 0,0234$$

folgt.

Eine dritte Versuchsreihe von Müller, welche ebenfalls zur Berechnung von β geeignet ist, hat derselbe mit einer $15\frac{1}{2}$ Centimeter langen Spirale (sie soll mit No. V bezeichnet seyn) von 310 Windungen mit 167 Millimeter langen Stäben angestellt und im 82. Bande dieser Annalen Seite 183 mitgetheilt, jedoch ohne daraus B zu bestimmen. Ich habe aus den Versuchen mit den zwei dünnsten Stäben (6^{mm} und $2,9^{\text{mm}}$) β bestimmt und

$$\beta = 0,0257$$

gefunden.

Endlich hat Müller auch eine Versuchsreihe mit einer 532 Millimeter langen Spirale von 408 Windungen (Spirale VI) mit 588 Millimeter langen Stäben ausgeführt und in der soeben citirten Abhandlung mitgetheilt, jedoch ebenfalls ohne Berechnung der Constanten. Ich fand aus den Versuchen mit den drei dabei benutzten Stäben (12^{mm} , 9^{mm} und 7^{mm} , 1 Durchmesser)

$$\beta = 0,0233.$$

Ferner habe ich die von W. Weber in den »elektrodynamischen Mafsbestimmungen« (Diamagnetismus, Seite 570 bis 573) mitgetheilte Versuchsreihe für meinen Zweck

benutzt. Das magnetisirte Stäbchen war 3^{mm},6 dick und 100^{mm},2 lang und befand sich in einer Spirale (No. VII) von nicht größerer Weite, als zum Hineinlegen des Stäbchens nöthig war. Bei diesem und allen folgenden Versuchen wurde der Einfluss der Spirale auf das Magnetometer durch Compensation eliminirt. Für diese Versuchsreihe fand ich

$$\beta = 0,0234.$$

Ganz neuerlich hat Dub Versuche veröffentlicht, welche ebenfalls eine Bestimmung von β gestatten. Dieselben sind in einer Abhandlung: »Ueber das Eintreten des Sättigungszustandes der Elektromagnete« im 133. Bande dieser Annalen enthalten und mit einer Spirale (No. VII) von etwa 1500 Windungen, 12 $\frac{1}{2}$ Zoll Länge, 1 Zoll Weite und 2 $\frac{3}{4}$ Zoll äußerem Durchmesser angestellt worden. Zur Bestimmung von β eignen sich, wegen der erreichten hohen Sättigungsgrade, am besten die Seite 65 und 66 verzeichneten Versuchsreihen mit den vier dünnsten Stäben ($\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{16}$ und $\frac{1}{8}$ Zoll) von 12 Zoll Länge. Es ergibt sich daraus der Werth

$$\beta = 0,0233.$$

Einen siebenten Werth für β (nämlich mit Ausschluss des in der Einleitung erwähnten aus meinen Untersuchungen vom Jahre 1865) habe ich aus noch nicht veröffentlichten Beobachtungen von A. Waszmuth (Assistent am hiesigen Polytechnikum) entnommen, welchen ich aufgefordert habe, mit meinem im 121. Bande dieser Annalen (Seite 433) angegebenen Apparate und mit genauer Beobachtung des in meinen »elektromagnetischen Untersuchungen« vom Jahre 1865 beschriebenen Verfahrens einige Versuchsreihen mit einer Spirale (No. IX) auszuführen, welche 91 Millimeter lang und 20 Millimeter weit ist, mit einem äußeren Durchmesser von 49 Millimetern und vier Drahtlagen von je 24 Windungen. Von den mit 103 Millimeter langen Stäben vorgenommenen Versuchen habe ich jene mit den drei dünnsten (von nahe 1 bis 3 Millimetern) benutzt und daraus

$$\beta = 0,0230$$

abgeleitet. — Waszmuth wird in seiner Arbeit eine genauere Bestimmung des seinen Beobachtungen entsprechenden Werthes von β bringen, doch dürfte das Resultat voraussichtlich von obiger Zahl in den drei ersten Decimalen nicht abweichen.

In der That hege ich nach den Rechnungen, deren Resultate ich bereits aufgezählt habe, keinen Zweifel mehr, dafs β eine von den Dimensionen des magnetisirten Stabes ¹⁾ völlig unabhängige Gröfse ist, deren absoluter Zahlenwerth bis auf drei Decimalen mit

0,023

übereinstimmen mufs, oder, wie ich bereits oben angedeutet habe, dafs das magnetische Maximum der Gewichtseinheit eine völlig bestimmte für das Eisen charakteristisch physikalische Constante ist, deren Werth in absoluten Einheiten per Milligramm in runder Zahl nicht viel von

2100

abweichen kann. Unter den bereits aufgezählten sieben Werthen für β sind nämlich nicht weniger als fünf, welche die obigen drei Decimalen gemeinschaftlich haben und deren vierte zwischen 0 und 4 schwankt. Diese Uebereinstimmung ist fast überraschend, wenn man erwägt, *dafs die betreffenden fünf Zahlen aus Versuchen hervorgehen, welche von vier verschiedenen Beobachtern mit ebenso vielen verschiedenen Apparaten und Methoden und mit Stäben und Spiralen von den verschiedensten Dimensionen angestellt worden sind.*

Die grössten Abweichungen bestehen zwischen den Resultaten mit der Spirale No. III von Müller und den Resultaten meiner eigenen Versuche vom Jahre 1865, die ich noch besprechen mufs.

Ich habe in der betreffenden mehrfach citirten Abhandlung Versuche mit zwei Spiralen (beide 91 Millimeter lang mit 6 Lagen von je 24 Windungen aus 3 Millimeter dickem doppelt übersponnenem Kupferdrahte) mitgetheilt. Mit der engeren (9^{mm} weiten) Spirale (No. II) sind nur die beiden,

1) wenn derselbe nur überhaupt in der bei den beschriebenen Versuchen beobachteten Weise magnetisirt wird.

Seite 26 der besagten Abhandlung, angeführten Versuchsreihen (mit 103^{mm} langen Stäben von 2,1 und 4,1 Millimeter Durchmesser) ausgeführt worden und ergaben

$$\beta = 0,0214.$$

Anders verhält es sich mit der weiteren (30^{mm} weiten) Spirale (No. I). Mit dieser Spirale wurden viele Versuchsreihen ausgeführt mit ebenfalls 103^{mm} langen Stäben, deren Durchmesser aber innerhalb der weiten Gränzen von 1 bis 28^{mm} variierten. Für β wurde der bereits erwähnte, von allen übrigen beträchtlich abweichende Werth 0,01865 ermittelt ¹⁾. Dabei ist jedoch folgendes zu bemerken.

Meine Versuche haben dargethan, daß die Müller'sche Gleichung auch bei einer und derselben Spirale nur innerhalb gewisser Gränzen auf Stäbe von verschiedenen Durchmessern ausgedehnt werden kann, wenn man für die Constanten der Gleichung dieselben Werthe beibehalten will. Diefß gilt in der Art, daß z. B. die aus Versuchen mit den dünnsten Stäben abgeleiteten Constanten desto größere Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung bedingen, zu je dickeren Stäben man übergeht. — Stellt man sich also die Aufgabe, die Constanten so zu wählen, daß sich die berechneten Werthe den beobachteten für Stäbe von sehr verschiedenen Durchmessern in möglichst gleichem Grade anschließen, so kann dies natürlich nur durch eine entsprechende Aenderung der für die dünnsten Stäbe ermittelten Constanten erreicht werden und erheischt somit auch eine Aenderung gerade desjenigen Werthes von β , welcher zur Berechnung des magnetischen Maximums am besten geeignet wäre, weil ja dieser Gränzwert selbstverständlich aus dem Verhalten der dünnsten Stäbe am sichersten entnommen werden kann. Dies war bei meinen Versuchen mit der Spirale I der Fall, indem ich dabei nicht eine numerische Bestimmung der magnetischen Sättigung, sondern vielmehr die Ermittlung der Gränzen im Auge hatte, innerhalb welcher die Müller'sche Formel, auf Stäbe von möglichst ver-

1) Und für α die Zahl 1,853; siehe die citirte Abhandlung Seite 9.

schiedenen Durchmessern angewendet, noch die Dienste einer brauchbaren Näherungsformel erfüllt.

Läßt man aber diese Aufgabe fallen und sucht man nicht jenen Werth von β , welcher sich (mit einem entsprechenden α) *allen* Beobachtungen möglichst gleichmäÙig anschließt, sondern vielmehr den für die *dünnsten* Stäbe passenden und das magnetische Maximum am genauesten angehenden, so erhält man eine gröÙere Zahl.

Ich fand aus den Versuchen mit den drei dünnsten Stäben (von nahe 1 bis 3 Millimeter)

$$\beta = 0,0208 {}^1).$$

Die beiden nahe übereinstimmenden Zahlen 0,0208 und 0,0214 für meine Spiralen I und II sind zwar die kleinsten für β gefundenen Werthe, sie weichen aber doch weniger vom Mittel ab, als der aus Müller's Versuchen mit der Spirale III hervorgehende Mittelwerth 0,0282. — Uebrigens habe ich in Betreff der Müller'schen Versuche bereits hervorgehoben, daÙ bei denselben *nicht* wie bei den übrigen die Wirkung der Magnetisirungsspirale auf das Magnetometer durch Compensation eliminirt war, sondern direkt bestimmt und von der beobachteten Gesamtwirkung von Spirale und Stab in Abzug gebracht wurde. — In der durch dieses Verfahren bedingten Fehlerquelle möchte ich den Erklärungsgrund für die beträchtliche Abweichung der Müller'schen Werthe für β suchen; denn es ist klar, daÙ die bei der besagten Reduktion unvermeidlichen Fehler gerade bei den dünnsten Stäben, welche bei der Ermittlung von β so maßgebend sind, am meisten Einfluss haben (vergl. Weber's „elektrodynamische MaÙbestimmungen“, Diamagnetismus, Seite 567).

In Berücksichtigung dieses Umstandes und in Erwägung, daÙ die aufgezählten neun Werthe für β aus Versuchen von fünf verschiedenen Beobachtern mit sehr verschiedenen experimentellen Hilfsmitteln abgeleitet worden sind, wird

- 1) Das correspondirende α erheischt dann natürlich auch eine entsprechende Aenderung, die jedoch für den vorliegenden Zweck nicht weiter in Betracht kommt.

man meine bereits ausgesprochene Annahme, daß β eine absolute Constante sey und in den drei ersten Decimalen mit 0,023 übereinstimmen müsse, gerechtfertigt finden.

Ich lasse nun eine übersichtliche Zusammenstellung folgen, mit Angabe der Beobachter, aus deren Versuchen die Werthe von β berechnet worden sind, in chronologischer Ordnung.

Spirale	Werth von β	Aus den Beobachtungen von
III	0,0282	Müller
IV	0,0234	
V	0,0257	
VI	0,0233	
VII	0,0234	Weber
I	0,0208	Waltenhofen
II	0,0214	
VIII	0,0233	Dub
IX	0,0230	Waszmuth
Mittel	0,0236	

Aus diesem Mittelwerthe

$$\beta = 0,0236$$

ergiebt sich für die physikalische Constante m , welche ich kurz die »Magnetisirbarkeit« des Eisens nennen will

$$m = 2125$$

absolute Einheiten per Milligramm. Sie beträgt sonach mehr als das Fünffache von der permanenten Magnetisirung der stärksten Stahlmagnete, wenn dieselbe nach Weber zu

$$400$$

absoluten Einheiten per Milligramm angenommen wird. Es ist bemerkenswerth, daß derselbe Sättigungsgrad (400) auch die Gränze bezeichnet, bis zu welcher der temporäre Magnetismus eines elektromagnetisirten Stahlstabes das von mir nachgewiesene Gesetz

$$y = Kx^{\frac{1}{2}}$$

(diese Annalen, Bd. 121, S. 446) befolgt¹⁾. Von hier ab steigt

1) Ich habe nämlich gezeigt, daß dies bis zu $\frac{1}{4}$ des früher angenommenen Maximums (1679) eines gleichschweren Eisenstabes zutrifft, also nahe zu derselben runden Zahl (420) führt.

die Intensitätscurve rasch, um bei einer Magnetisirung von etwa 560 absoluten Einheiten per Milligramm den Inflexionspunkt zu erreichen, und sofort, wie die magnetische Intensitätscurve des Eisens, gegen eine zur Abscissenaxe parallele Asymptote zu convergiren (l. c. S. 448). Ob der Gränzwert des erreichbaren *temporären* Magnetismus für den Stahl derselbe ist wie für das Eisen, läßt sich nach den bisherigen Untersuchungen noch nicht entscheiden. — Ohne darüber eine bestimmte Annahme festzustellen, habe ich in meiner soeben citirten Abhandlung die Sättigungsgrade der Stahlstäbe auf das magnetische Maximum eines gleichschweren Eisenstabes bezogen, was ich hier deshalb erwähne, weil nunmehr anstatt des damals angenommenen Werthes für m von nahe 1680 *der richtigere* 2100 zu setzen ist. Demnach ist auch mein in der Abhandlung über die Müller'sche Formel (Wiener Akad. B. Bd. 52) aufgestellter Satz über die Ausdehnung des convexen Theils der elektromagnetischen Intensitätscurve des Eisens dahin zu modificiren, daß der Inflexionspunkt derselben (nach Maßgabe der Stabdicke) zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{5}$ der Sättigung (nämlich zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ der früher angenommenen) gelegen ist, was Magnetisirungen von etwa 560 bis 840 absoluten Einheiten per Milligramm entspricht. — *Eben bis zu diesen Gränzen, welche jedoch nach meinen Erfahrungen in der Regel nahe an*

900

*Einheiten liegt*¹⁾, kann, wie ich nachgewiesen habe, das Lenz-Jacobi'sche Proportionalitätsgesetz als annähernd gültig betrachtet werden. — Bei diesen Angaben muß ich übrigens nochmals in Erinnerung bringen, daß der Quotient $\frac{y}{\gamma}$, welcher das durchschnittliche Moment der Gewichtseinheit darstellt, wie ich bereits erörtert habe, nur beim Sättigungszustand die magnetische Erregung aller Schichten kennzeichnet, während er sonst nicht in diesem Sinne aufzufassen ist, da bei geringeren Sättigungsgraden eine ungleichförmige und

1) Dieß zeigen auch schon meine Versuche mit den Stäben 1, 2, 3, 4 u. 5 in der citirten Abhandlung über die Müller'sche Formel.

Führt man aber die Rechnung für alle in dieser Abhandlung aufgezählten Spiralen durch, so erhält man folgende Coëfficienten b der Stablängen:

Spirale	b
I	127
II	131
III	172
IV	143
V	157
VI	142
VII	143
VIII	142
IX	141
Mittel	144

Nach diesen Resultaten erscheint die Annahme dafs B mit der Stablänge l proportional, also $\frac{B}{l} = b$ constant sey, ebenso begründet, wie meine aus der Drehungstheorie gefolgerte Voraussetzung, dafs β constant sey, in den für β gefundenen Werthen ihre Bestätigung fand.

In der That zeigt eine einfache Rechnung, dafs beide Theoreme identisch werden, sobald man in allen Stäben eine gleiche und gleichförmige Dichte annimmt, was im vorliegenden Falle auch ganz zulässig ist.

Erwägt man nämlich, dafs $\gamma = \frac{\pi}{4} d^2 l s$, wobei s das Gewicht eines Cubik-Millimeters Eisen in Grammen bedeutet (weil auch die γ in Grammen, die l und d aber in Millimetern gerechnet wurden) und berücksichtigt zugleich, dafs die von Müller und von mir in Rechnung gebrachten y sich vermöge der gewählten Einheiten wie 10^6 zu 1 verhalten, so erhellet sofort, dafs $B d^2 = 10^6 \beta \gamma = 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 l s$, also $\frac{B}{l} = b = 10^6 \cdot \frac{\pi}{4} \beta s$, weshalb B mit l proportional seyn mufs, wenn β constant seyn soll ¹⁾.

1) Die letzte Gleichung giebt für $\beta = 0,0236$ und $s = 0,00778$ obigen Mittelwerth $b = 144$, also allgemein $B = 144 l$.

Anders verhält es sich mit dem Coëfficienten A der Müller'schen Gleichung, von welchem ich bereits darge-
than habe ¹⁾, daß die Annahme einer verkehrten Proportio-
nalität mit der Stablänge, die mit den ersten Resultaten aus
Müller's Versuchen so gut stimmte, unhaltbar ist.

Anhang.

Die in der vorliegenden Abhandlung benutzte Arbeit
von Dub: »Ueber das Eintreten des Sättigungszustandes
der Elektromagnete« veranlaßt mich, insofern darin auch
meine Abhandlung über die Müller'sche Formel besprochen
wird, noch zu einigen Bemerkungen.

Seite 58 sagt der Herr Verfasser von mir: »Er gelangt
zu Resultaten, welche nicht in allen Beziehungen mit denen
von Müller und mit dessen Formel übereinstimmen, allein
er ist insofern mit Müller einverstanden, als er mit diesem
aus seinen Versuchen den Schluss zieht, daß der Magne-
tismus in keinem Falle der Stromstärke proportional wachse.«

Hier muß ich zur Erläuterung beifügen, daß die Abwei-
chung von der Proportionalität nach der Müller'schen
Formel einerseits und nach meinen Versuchen anderseits
in entgegengesetztem Sinne stattfindet, indem die Curve der
Müller'schen Gleichung stets concav gegen die Ascissenaxe
verläuft, während die graphische Darstellung meiner Ver-
suche eine Curve liefert, die erst convex ist und dann con-
cav wird, indem zwischen den Ordinaten $\frac{1}{4} \cdot 90\beta\gamma$ und
 $\frac{2}{5} \cdot 90\beta\gamma$ ein Inflexionspunkt liegt. Da aber das convexe Cur-
venstück, wie ich (Seite 21) gezeigt habe, nur wenig von
einer Geraden abweicht und sich in der Regel sogar nahe
bis zum Eintritte der halben Sättigung erstreckt ²⁾, so folgt
aus meinen Versuchen zugleich, daß eine annähernde Pro-
portionalität zwischen Magnetismus und Stromstärke inner-
halb viel weiterer Gränzen stattfindet, als diejenigen sind,
welche sich aus der Müller'schen Formel ergeben, diejeni-

1) Siehe meine oben citirte Abhandlung über die Müller'sche Formel.

2) Nämlich bis etwa $\frac{2}{3}$ derselben.

gen nämlich, innerhalb welcher es zulässig ist, statt $y = \beta\gamma$ arctg $\frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{1}{2}}}$ zu schreiben $y = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma^{\frac{1}{2}} \cdot x$. —

Seite 88 ist eine Stelle aus meiner oben citirten Abhandlung angeführt; dabei ist jedoch der Schlufssatz durch Auslassung einiger Worte unverständlich geworden. Der Satz soll lauten: »Wiedemann hat die Gründe angedeutet, welche — im Widerspruche mit der Annahme einer allgemeinen Gültigkeit des einen oder des anderen der vorgeannten Gesetze — überhaupt kein so einfaches Gesetz erwarten lassen«. Was meine an citirter Stelle angeführten Versuchsergebnisse betrifft, so wollte ich mit dieser Zusammenstellung nur ersichtlich machen, inwiefern die bezügliche Folgerung aus der Müller'schen Gleichung zutrifft, nach welcher die Proportionalität mit der Quadratwurzel der Stabdurchmesser bei gleichen aber *sehr kleinen* Stromstärken auch bei *nicht ähnlich bewickelten* Stäben, nämlich bei ungleich dicken Stäben in *derselben* Spirale annähernd stattfinden soll, während das Dub'sche Gesetz der Durchmesser die besagte Proportionalität nur für *ähnlich* bewickelte Stäbe, aber *ohne* jene Einschränkung auf sehr kleine Stromstärken ausspricht.

Nachdem ich diese Arbeit bereits abgeschlossen hatte, las ich die im 135. Bande dieser Annalen, S. 74, erschienene Abhandlung: »Ueber die sogenannte Magnetisirungs-Constante« von Oberbeck. — Dieselbe enthält auch einige auf absolutes Maafs bezogene Versuchsergebnisse über den durch wachsende magnetisirende Kräfte erregten Magnetismus, bedingt aber dennoch keine Aenderung oder Vervollständigung meiner Rechnungen und ihrer Ergebnisse, weil die beobachteten magnetischen Intensitäten (wie die graphische Darstellung zeigt) einen zu wenig regelmässigen Verlauf nehmen, als dafs es möglich wäre, daraus mit einiger Sicherheit einen Werth für β abzuleiten. — Es möge daher nur bemerkt seyn, dafs der Herr Verfasser die beobachteten Magnetismen auf die Volumseinheit bezieht und auch aus seinen Versuchen auf die Existenz eines von der Gestalt

des magnetisirten Stabes unabhängigen Gränzwertes dieser Gröfse schließt, ohne jedoch den numerischen Werth desselben zu ermitteln oder anzugeben. — In der That zeigen zwei von den (Seite 97) angeführten Versuchsreihen eine Convergenz gegen einen gemeinschaftlichen Gränzwert, insofern die höchsten beobachteten magnetischen Intensitäten der Volumseinheit nahe zusammenfallen, doch ist eine numerische Bestimmung dieses Gränzwertes aus dem oben angegebenen Grunde nicht wohl ausführbar. Die Annahme eines solchen Gränzwertes für die Volumseinheit fällt, wie ich bereits dargethan habe, direkt mit der Annahme zusammen, daß der Coëfficient B der Müller'schen Formel mit der Stablänge proportional ist.

Was den Einfluß der Eisensorte auf das magnetische Maximum der Gewichtseinheit oder das daraus hervorgehende der Volumseinheit betrifft, ist wohl kaum zu zweifeln, daß ein solcher überhaupt stattfindet, wie es ja auch bei den analogen Constanten der Elasticität, Festigkeit usw. mehr oder weniger der Fall ist; doch läßt sich nicht ermitteln, welchen Antheil dieser Einfluß an der Verschiedenheit der Werthe von m hat, welche ich aus den einzelnen Versuchsreihen abgeleitet habe, nur so viel ist ersichtlich, daß die durch die Eisensorte bedingten Verschiedenheiten von m nicht bedeutend seyn können, vorausgesetzt, daß man es überhaupt mit weichem Eisen zu thun hat, von welchem hier durchwegs ausschließlic die Rede ist.

Hinsichtlich des Stahles habe ich in einer früheren Abhandlung (diese Annalen Bd. 121, S. 448) die Vermuthung ausgesprochen, daß der Gränzwert des magnetischen Momentes der Gewichtseinheit kleiner seyn dürfte als beim Eisen und habe auch eine darauf hindeutende Versuchsreihe angeführt. — In dieser Abhandlung jedoch habe ich diese Frage vorläufig ganz fallen gelassen, da es in dieser Richtung noch zu sehr an maßgebenden Thatsachen fehlt.