SULLA LEGGE DI OSCILLAZIONE DEI DIAPASON E SULLA MISURA
DELL' INTENSITÀ DEL SUONO; PROF. A. STEFANINI. ¹⁾

Il Merkel ²⁾ comincia dal fare osservare che potendo giudicare quando una data sensazione è la media fra altre due, si avrebbe un mezzo per decidere quale delle relazioni fin qui proposte fra l' eccitazione e la sensazione è quella che più è conforme ai risultati sperimentali. Infatti, se fosse vera la relazione logaritmica del Fechner, per due sensazioni E_1 , E_2 prodotte da due stimoli R_1 , R_2 , si dovrebbe avere

$$E_1 = k \log R_1$$

$$E_2 = k \log R_2$$

e quindi la sensazione media, per la quale si avrebbe

$$E_m = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{k}{2} (\log R_1 + \log R_2) = k \log \sqrt{R_1 R_2}$$

dovrebbe corrispondere a uno stimolo R_m tale che fosse

$$R_m = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Se in vece si ammettesse semplice proporzionalità fra E ed R , si dovrebbe avere

$$E_m = k \frac{R_1 + R_2}{2}$$

e la sensazione media sarebbe dovuta allo stimolo

$$R_m = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 5. del fascicolo precedente.

2) Merkel, *Wundt's Phil. Stud.* IV, pag. 541-595, 1887.

Il Merkel non ha considerato altro che queste due relazioni, e con le sue esperienze ha trovato che per le sensazioni luminose lo stimolo che produce la sensazione media non è mai nè la media aritmetica, nè quella geometrica fra i due stimoli estremi; ma che tuttavia le differenze fra R_m e la media aritmetica son sempre minori di quelle fra R_m e la media geometrica.

Dalle esperienze fatte coi metodi usati per riconoscere se la legge di Weber è valida o no, egli deduce poi, come risultato generale, che nella relazione

$$(19) \quad E = k_1 R$$

la k_1 non può ritenersi costante altro che per valori assai grandi di R ; ma che dalle esperienze fatte colla sensazione media si può concludere che, nei limiti entro i quali è valida la legge di Weber, la sensazione deve ritenersi proporzionale all'eccitazione perchè R_m è allora assai prossimo alla media aritmetica fra R_1 e R_2 . Il confronto fra i valori trovati per le sensazioni e quelli delle eccitazioni, esclude poi assolutamente la validità della dipendenza logaritmica fra eccitazione e sensazione.

Il Merkel non si è occupato di verificare se le sue esperienze sulla sensazione media potevano essere interpretate con la formula di Plateau

$$(20) \quad E = c R^k$$

con un valore particolare di k ; e soltanto ha osservato che dalle esperienze fatte con gli altri metodi non risulta che possa porsi $k = \text{costante}$ con $c = 1$; e dice che ha lasciato di occuparsi della formula $E = R^k$, perchè mancano affatto indicazioni precise sul significato delle costanti c e k , e perchè aveva di mira la ricerca delle condizioni in cui si potesse porre $E = k_1 R$.

Ora è facile vedere che i risultati delle esperienze del Merkel sulla sensazione luminosa media concordano perfettamente con quelli che si ottengono dalla formula

$$E = c R^k$$

con $k = 1/2$, che come si è veduto, rappresenterebbe i risultati delle esperienze da me fatte sull'intensità del suono.

Di fatti ammessa la (20) si vede che per la sensazione media deve aversi:

$$E_m = c \frac{R_1^k + R_2^k}{2} ,$$

e che quindi lo stimolo R_m che la produce deve essere tale che si abbia

$$(21) \quad R_m^k = \frac{R_1^k + R_2^k}{2} .$$

Questo risultato è indipendente dalla legge di Weber, se la (20) si prende come formula empirica; ed è anche indipendente da ogni misura assoluta delle sensazioni. È questo un vantaggio incontestabile del metodo della graduazione media, perchè cogli altri metodi bisogna valutare ciascuna sensazione: ciò che è impossibile senza riferirsi ai valori dell'eccitazione, e quindi senza far implicitamente uso di una relazione fra sensazione e eccitazione, o senza far uso di ipotesi sempre contestabili ¹⁾.

Per mostrare se la (21) è o no verificata, nella tavola seguente ho riportato i valori ottenuti sperimentalmente dal Merkel per l'eccitazione R_m che produceva la sensazione luminosa che egli giudicava esser la media fra quella prodotta dagli stimoli R_1 ed R_2 ; vi ho riportato la media geometrica R_g e quella aritmetica R_a fra R_1 e R_2 , prendendo tutti questi valori dalle tavole IX a XIII della Memoria citata; e vi ho aggiunto, nelle ultime due colonne, i valori di R_m^k e di $1/2 (R_1^k + R_2^k)$ ottenuti ponendo $k = 1/2$.

1) Cfr. *Wundt, Psychol. Physiol.* I, 374.

TAVOLA XX.

(Dal Merkel — *Wundt's Phil. Stud.* IV. pag. 567-568. Le notazioni I e II rappresentano due diverse specie di sorgenti luminose. E_1 , E_2 ed E_m sono le distanze alle quali eran poste le diverse sorgenti luminose davanti al diaframma, e cioè E_1 e E_2 son le distanze estreme ed E_m è la distanza per la quale si aveva l'intensità luminosa media).

	E_1	E_2	E_m	R_1	R_2	R_m	R_g	R_a	R_m	$\frac{1}{2}(R_1+R_2)$ ($k = \frac{1}{2}$)
DALLA TAVOLA IX DEL MERKEL.										
I.	400	50	98,05	0,5	32	8,3	4	16,25	2,88	3,18
	400	70,7	121,3	0,5	16	5,45	2,83	8,25	2,33	2,35
	400	100	164,0	0,5	8	2,98	2	4,25	1,72	1,77
	400	141,4	207,6	0,5	4	1,86	1,41	2,25	1,36	1,36
	400	200	261,9	0,5	2	1,166	1	1,25	1,08	1,06
	400	282,8	333,2	0,5	1	0,721	0,71	0,75	0,84	0,85
	400	50	90,16	24	1536	472,3	192	780	21,73	22,05
II.	400	70,7	114,3	24	768	293,8	136,4	396	17,13	16,30
	400	100	156,0	24	384	157,7	96	204	12,55	12,20
	400	141,4	202,6	24	192	93,6	68,2	108	9,66	9,38
	400	200	256,8	24	96	58,21	48	60	7,63	7,35
	400	282,8	310,7	24	48	39,79	34,1	36	6,27	5,91

DALLA TAVOLA XII.

{ 400 I.	50 II.	134,6 II.	0,5	1536	211,7	27,7	768,25	14,54	19,95
{ 200 I.	50 II.	115,4 II.	2	1536	289	55,4	769	17,00	20,30
{ 100 I.	50 II.	97,93 II.	8	1536	399,6	110,8	772	19,98	21,02
{ 50 I.	50 II.	81,34 II.	32	1536	580	221,6	784	24,08	22,43
{ 200 II.	50 II.	79,19 II.	96	1536	736,7	384	816	27,13	24,50
{ 100 II.	50 II.	62 II.	384	1536	999	768	960	31,61	29,10

DALLA TAVOLA XIII.

{ 400 I.	50 II.	140,5 II.	0,5	1536	194,9	27,7	768,25	13,96	19,95
{ 400 I.	100 II.	235,9 II.	0,5	384	68,5	13,85	192,25	8,27	10,15
{ 400 I.	200 II.	293,7 II.	0,5	96	24,8	6,92	48,25	4,98	5,25
{ 400 I.	50 I.	87,6 I.	0,5	32	10,44	4	16,25	3,23	3,18
{ 400 I.	100 I.	149,9 I.	0,5	8	3,56	2	4,25	1,88	1,77
{ 400 I.	200 I.	260,3 I.	0,5	2	1,17	1	1,25	1,08	1,06

Questa tavola mostra come i valori osservati di R_m^k concor-
dino, più di quello che era da aspettarsi, con quelli calcolati,
nello stesso tempo che mostra quanto grandi e variabili siano
invece le differenze fra i valori di R_m e quelli di R_g e di R_a ;
talchè si può concludere che *la legge di Plateau, che meglio di
ogni altra spiega i risultati ottenuti colle esperienze del Merkel,
vale non solo condizionalmente per le sensazioni sonore delle
quali mi sono occupato, ma anche in modo assoluto per le sen-
sazioni luminose alle quali si riferisce la tavola precedente.*

Sulle sensazioni luminose furon fatte delle esperienze anche
da Lehmann ¹⁾ e da Neiglick ²⁾ collo stesso metodo usato da
Delboeuf, ma cercando di eliminare le influenze del contrasto.
Quelle del Lehmann sono assai limitate, e non andarono scevre
da ogni influenza perturbatrice; quelle più numerose del Neiglick
sono anche più esatte, e furono eseguite per riconoscere se, come
voleva la legge logaritmica del Fechner, si aveva $R_m = R_g$. Que-
sta uguaglianza non fu sempre verificata, e dai risultati otte-
nuti il Neiglick avrebbe concluso che la legge di Weber è valida
soltanto per quelle eccitazioni, che hanno fra loro un dato rap-
porto: cioè che la validità di quella legge è determinata soltanto
dai fenomeni di contrasto. Senza preoccuparmi qui di tale con-
clusione, farò notare soltanto che, ammessa vera la legge di
Plateau con $k = \frac{1}{2}$, si deve avere

$$(\alpha) \quad R_m = \frac{R_a + R_g}{2}$$

con

$$\beta) \quad R_m > R_g$$

e

$$\gamma) \quad R_m < R_a.$$

Ora dalle tavole che riassumono i risultati del Delboeuf ³⁾,
del Lehmann e del Neiglick, si vede appunto che i valori ottenuti
sperimentalmente per R_m soddisfano sempre alla (β), e nel mag-
gior numero dei casi alla (α) e alla (γ), precisamente come av-
viene per valori riportati nella tavola XX: e questo confer-

1) Lehmann, *Wundt's Phil. Stud.* III, 1886.

2) H. Neiglick, *Wundt's Phil. Stud.* IV, pag. 28, 1887.

3) Cfr. Delboeuf, *Etude psychophys.* pag. 67 68.

ma sempre più la conclusione che ho tratto dalle esperienze del Merkel sulle sensazioni luminose.

Tutto ciò è confermato anche da altre esperienze fatte da Ph. Breton ¹⁾ sulle sensazioni luminose. Egli osservò da prima che adoperando una litofania ($\lambda\eta\theta\epsilon\phi\acute{\alpha}\nu\epsilon\iota\alpha$) di carta, cioè un pacco di striscie di carta, di grandezza sempre decrescente, e disposte in modo che, essendo tutte unite ad un capo, le loro lunghezze equidifferenti si sorpassino successivamente di una quantità costante, la quantità di luce che l'attraversa dovrebbe, secondo la legge di Fechner, diminuire uniformemente da un capo all'altro; mentre ciò non avviene.

Riconosciuta così l'inesattezza della legge logaritmica, egli volle determinare sperimentalmente la dipendenza fra la sensazione e l'eccitazione; e per questo pose uno schermaglio bianco davanti a una tavola nera, e su di esso proiettò con 4 candele l'ombra d'una tavoletta nera, disponendo le candele in modo che le 4 ombre portate dividessero lo schermaglio in cinque zone, di un centimetro di larghezza per ciascuna. La prima zona riceveva soltanto la luce diffusa (D), che si distribuiva uniformemente su tutto lo schermaglio: la seconda, oltre la quantità di luce D, riceveva anche la luce di una candela; ognuna delle altre zone seguenti riceveva la luce di una candela di più delle precedenti. Quando due osservatori percepivano cinque contrasti perfettamente uguali di sensazioni luminose, dal nero assoluto del fondo a uno splendore assai vivo, che gli occhi non potessero sostenere per alcuni minuti senza fatica, furon misurate le distanze dalle 4 candele al quadro; e così fu trovato che le quantità di luce che giungevano sulle singole zone crescevano come i quadrati dei numeri naturali; talchè il Breton conclude che la curva figurativa delle illuminazioni totali in funzione delle sensazioni luminose è la parabola

$$H = c S^2,$$

ove H è l'illuminazione totale, S la sensazione, e c un coeffi-

1) Ph. Breton, *Compt. rend.* 105, pag. 426, 1887 o *Beibl.* XII, pag. 252, 1888.

ciente personale e momentaneo; precisamente come si deduce dalla (18) ¹⁾.

Una nuova conferma della validità generale della legge di Plateau si trova finalmente nelle esperienze che il Dr. Merkel ha eseguito di recente sulle sensazioni di pressione. I risultati ottenuti con quelle esperienze ²⁾ sono riportati in parte nella tavola XXI, nella quale R_m indica il valore dell'eccitazione che produce una sensazione di pressione che è giudicata la media fra quelle prodotte dalle eccitazioni R_1 ed R_2 . Le altre notazioni corrispondono a quelle della tavola XX; ma qui ho riportato anche i valori degli errori relativi di R_g , di R_a e di R_m^k , definiti dalle equazioni

$$F_g = \frac{R_m}{R_g} - 1; \quad F_a = \frac{R_m}{R_a} - 1;$$

$$F_p = \frac{R_m^k}{\frac{1}{2}(R_1^k + R_2^k)} - 1,$$

per mostrare che anche per queste sensazioni, per le quali l'approssimazione che si otterrebbe colla formula $E = k_1 R$ del Merkel è maggiore di quella che si ha per le sensazioni luminose, nel maggior numero dei casi la formula di Plateau si presta sempre assai meglio per rappresentare i risultati sperimentali.

Come si vede dalla tavola XXI (pag. 106-107) le divergenze maggiori fra i valori osservati e quelli calcolati di R_m^k si hanno per quei casi, (Tav. XXIV *b* del Merkel) nei quali il rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ è molto grande; ma in questi casi la determinazione esatta di R_m è più difficile che negli altri, perchè qui si fa maggiormente sentire l'influenza perturbatrice del contrasto.

1) Anche Plateau fece alcune esperienze sulla misura delle sensazioni luminose, allorchando si occupava dei fenomeni soggettivi della visione. Scelti due cartoni, uno bianco e l'altro nero più che fosse possibile, ne fece dipingere un terzo da diverse persone competenti, in modo che la tinta ne fosse precisamente intermedia fra il bianco e il nero, e costatò che tutte queste tinte differivano pochissimo l'una dall'altra. Quella che sembrava la media fra tutte, misurata al fotometro, emetteva circa $\frac{1}{8}$ di luce bianca; e da ciò Plateau concluse provvisoriamente che il valore di k nella sua formula poteva porsi uguale a $\frac{1}{8}$; ma distratto da altri lavori, egli abbandonò presto queste esperienze.

2) J. Merkel, *Wundt's Ph. St.* V, pag. 245-291, 1888.

Per le sensazioni luminose e per quelle della pressione il Merkel fece anche numerose esperienze per determinare qual'è il valore R_1 dell'eccitazione che produce una sensazione doppia di quella prodotta da un'altra eccitazione R ; e trovò che per piccoli valori di R la R_1 è maggiore di $2R$, mentre che quando R è assai grande si ha molto prossimamente $R_1 = 2R$. Questo risultato, mentre confermerebbe la validità della formula (19) del Merkel, sarebbe contrario a quella di Plateau nella forma (18) da me proposta; ma non già in modo assoluto: perchè per piccoli valori dell'eccitazione sarebbe sempre la formula di Plateau che rappresenterebbe i risultati sperimentali meglio di quella del Merkel. E qui conviene anche osservare che le esperienze fatte in questo modo non posson meritare la stessa fiducia di quelle fatte col metodo della graduazione media; perchè se può essere relativamente facile di giudicare quando tre sensazioni a , b , c son tali che la differenza fra a e b sia uguale a quella che è fra b e c , non si ha nessun criterio preciso per riconoscere quando una sensazione è doppia di un'altra; e per di più col metodo della sensazione doppia si fa risentire del tutto l'influenza perturbatrice del contrasto, che si elimina invece in gran parte col metodo della graduazione media. Il fatto stesso poi che per piccole pressioni, per es., la sensazione doppia si attribuisce a un'eccitazione maggiore del doppio di quella che serve di confronto, e che in vece per grandi pressioni si trova prossimamente $R_1 = 2R$, mi sembra che accenni alla validità generale della formula di Plateau; perchè per valori di R dell'ordine di quelle eccitazioni che siamo soliti di provare, il nostro giudizio molto probabilmente deve essere influenzato dall'abitudine che abbiamo di ritenere doppia la sensazione che si prova alzando o sostenendo un peso doppio di un altro; mentre il nostro apprezzamento, quantunque sempre incerto, è più libero per quelle sensazioni che non ci sono abituali; e allora si trova che R_1 è sempre assai maggiore di $2R$, come vuole la legge di Plateau.

Dall'aver trovato che la (18) è verificata in quelle esperienze che meritano maggior fiducia, non si potrà tuttavia concludere che è vera l'ipotesi di Plateau; perchè per affermar questo bisognerebbe sapere per altra via se il principio di Weber è o no

TAVOLA XXI.

(Dal Merkel — *Wundt's Ph. Stud.* V. pag. 269 e 270)

R_1	R_2	R_m	R_g	R_a	R_m	$\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$	F_g	F_a	F_p
DALLA TAVOLA XXIII DEL MERKEL									
1	10	4,689	3,162	5,5	2,16	2,08	0,483	-0,157	+0,04
2	20	9,801	6,325	11	3,13	2,94	0,550	-0,109	+0,06
5	50	21,97	15,81	27,5	4,68	4,65	0,390	-0,201	+0,006
10	100	46,36	31,62	55	6,79	6,58	0,466	-0,157	+0,03
20	200	92,37	63,25	110	9,60	9,31	0,460	-0,160	+0,03
50	500	215,3	158,1	275	14,66	14,72	0,386	-0,220	-0,004
100	1000	430,7	316,2	550	20,73	20,81	0,362	-0,217	-0,004
200	2000	948,3	632,5	1100	30,79	29,93	0,499	-0,133	-0,029
500	5000	2435	1581	2750	49,34	46,53	0,540	-0,119	+0,06

DALLA TAVOLA XXIV b

1	51	20,96	7,141	26	4,58	4,07	0,953	—0,194	0,12
3	51	23,87	12,37	27	4,87	4,44	0,930	—0,116	0,09
6	51	27,34	17,49	28,5	5,22	4,79	0,564	—0,041	0,09
11	51	30,03	23,69	31	5,48	5,23	0,268	—0,031	0,04
21	51	35,60	32,73	36	5,96	5,86	0,100	—0,011	0,017
51	4010	1998	452,2	2030,5	44,72	35,32	3,411	—0,016	0,27
110	4010	2061	636,4	2060	45,39	36,99	2,239	—0,000	0,23
210	4010	2132	897,8	2110	46,17	39,1	1,375	—0,010	0,19
510	4010	2397	1416	2260	48,99	43,04	0,693	—0,061	0,13
1010	4010	2664	2012	2510	51,59	47,57	0,324	—0,061	0,08
2010	4010	3361	2839	3010	57,97	54,12	0,184	—0,117	0,07

verificato, Cioè: potrebbe benissimo ritenersi che la (18) derivasse dalla combinazione di due o più ipotesi, diverse da quella di Weber $\frac{\Delta R}{R} = \text{costante}$ e da quella di Plateau $\frac{\Delta E}{E} = \text{costante}$.

Pur tuttavia si è veduto che l'ipotesi di Plateau non è di per sè stessa inverosimile, e che anche il Fechner convenne che essa teoricamente vale quanto la sua. Le obiezioni che le erano fatte consistevano nel non ritenerla; conforme ai risultati sperimentali, e nella mancanza di significato dell'esponente k . Con la discussione, e con le tavole precedenti XX e XXI, ho mostrato che non può più ritenersi che le conseguenze tratte da quell'ipotesi non siano sperimentalmente verificate; e terminerò mostrando come può esser determinato anche il significato dell'esponente k .

Plateau pose

$$(22) \quad \frac{dE}{E} = k \frac{dR}{R} ,$$

e ottenne, come si è veduto:

$$E = c R^k .$$

Ora dalla (22) si vede che per $dR = R$ si ha

$$dE = kE ;$$

dunque k rappresenta l'aumento che subisce la sensazione, quando l'aumento dell'intensità dell'eccitazione è uguale all'eccitazione iniziale, supponendo che questo valore iniziale dell'eccitazione sia piccolissimo, e prendendo per unità di sensazione la sensazione che vi corrisponde. Poichè le esperienze sulle sensazioni luminose e su quelle sonore hanno mostrato che deve porsi

$$k = \frac{1}{2} ,$$

si può dunque concludere che quando l'intensità di una piccolissima eccitazione è raddoppiata, la sensazione non aumenta che della metà del valore che aveva la sensazione corrispondente

all'eccitazione iniziale. E per le sensazioni di grandezza finita dalla legge di Plateau

$$E = c \sqrt{R}$$

si può concludere che quando l'eccitazione diviene n volte maggiore, la sensazione è divenuta soltanto $\sqrt{n}$ volte più grande; cioè che l'eccitazione nervosa centrale cresce sempre più lentamente dell'irritazione esterna.

Aggiunta. — Il Dott. Merkel, al quale comunicai questa mia Nota, dopo che fu stampata negli *Atti dell' Accademia Lucchese*, completò le sue ricerche sulla dipendenza fra l'intensità dell'eccitazione e quella della sensazione, studiando le sensazioni sonore ¹⁾; e trovò che i risultati ottenuti per tali sensazioni col metodo della graduazione media son rappresentati meglio dalla sua formula

$$E = k_1 R$$

che da quella da me proposta

$$(18) \quad E = c \sqrt{R}.$$

A questa conclusione egli giunse verificando pel valore $k = 1/2$ la formula che si ottiene elevando a quadrato ambedue i membri della (21), anzichè la (21) stessa che è quella che si deduce direttamente dall'applicazione del metodo del Merkel alla legge di Plateau. Applicando poi lo stesso metodo di verificaione, col quale si viene ad aumentare il numero dei casi sfavorevoli alla legge di Plateau nella forma da me proposta, anche alle altre sensazioni, il Merkel trovò che per quelle esperienze nelle quali si avevano le stesse condizioni rispetto ai valori di R_1 e R_2 , la formula (18) è preferibile alla sua

in 27 casi su 36 per le sensazioni luminose,	
» 56 » 98 » di pressione,	
» 19 » 78 » sonore;	

mentre dal confronto fra gli errori relativi F_p e F_a , calcolati colle formule della pagina 104 di questo fascicolo, si troverebbe che la formula (18) è preferibile a quella del Merkel

in 29 casi su 36 per le sensazioni luminose,				
» 72	»	100	»	di pressione,
» 36	»	118	»	sonore.

I 40 casi che sono stati considerati qui in più per le sensazioni sonore, son quelli nei quali le relazioni fra R_1 e R_2 eran diverse da quelle che si avevano negli studi sulle altre sensazioni, e son quasi tutti favorevoli alla formula del Merkel; talchè si vede che il diverso modo di fare il confronto non altera sostanzialmente i risultati finali.

Dalla discussione di tutti i risultati ottenuti, il Merkel conclude poi che per tutte le sensazioni da esso studiate si presterebbe meglio di ogni altra una relazione della forma

$$E = (k_1 R)^{1/\varepsilon}, \quad 1 \leq \varepsilon \leq 2,$$

con $1/\varepsilon$ dipendente dal valore del rapporto $R_1 : R_2$, e tanto più prossimo al valore $1/2$ quanto più son diversi fra loro R_1 e R_2 ; ma che dalle esperienze fin qui eseguite resulta frattanto che per le sensazioni sonore, studiate col metodo della graduazione media, vale meglio di ogni altra la sua formula

$$E = k_1 R,$$

mentre per quelle luminose vale meglio la formula di Plateau nella forma da me proposta

$$E = c \sqrt{R}.$$