Contact des faisceaux de surfaces.

(Par J.-S. et M.-N. VANEČEK, à Jicín - Bohême.)

(Suite et fin.)

I. Sur les faisceaux de la première dimension.

66. On appelle le faisceau de surfaces de la première dimension un système de surfaces R , qui jouit de la propriété que par un point arbitraire passe un nombre fini de ces surfaces. Prenons un plan arbitraire Q ; par son point quelconque q' passe un nombre fini de surfaces R , dont chacune rencontre le plan Q en une courbe ρ . Si cette courbe avait en q' un point double, la surface R serait tangente à Q .

En déterminant alors de telles positions que la courbe ρ ait un point double, nous déterminons donc en même temps les surfaces tangentes au plan Q .

Pour cet effet prenons sur le plan Q une droite arbitraire P et trois points a, b, c comme les centres des faisceaux de droites. Une surface quelconque R' rencontre Q en une courbe ρ' . Du point a traçons les tangentes à la courbe ρ' et considérons une de ces tangentes, qui touche la courbe en un point α . La jonction des points α, b rencontre la courbe ρ' outre le point α encore en $r - 1$ points que nous désignons par β .

Projettons le point α du point c sur la droite P et désignons le point de rencontre de P avec la projectante par A . Les projections des points β du point c , comme le centre, dans la droite P soient B . Appelons les points A, B qui sont, dans le rapport que nous venons d'indiquer, les points correspondants.

Quand le point A coïncide avec son point correspondant B , la droite αb touche la courbe ρ' en α . La courbe ρ' possède donc en α deux tangentes, c'est-à-dire ce point est double de la courbe ρ' .

Nous déterminons le nombre de ces points, en trouvant le nombre de points correspondant à un point A , et réciproquement.

Un point arbitraire A détermine une droite Ac . Chaque courbe ρ coupe cette droite en ρ points. Il y a $m(2r - 1)$ tangentes tracées en ces points aux

courbes ρ , qui passent par le point a . Les points situés sur Ac sont évidemment les points α . Chacun de ces points détermine une droite αb dont chacune rencontre la courbe correspondante ρ en $r-1$ points β et chacun d'eux détermine un point B .

A un point A correspondent donc

$$m(2r-1)(r-1)$$

points B.

Afin que nous trouvions, combien de points A correspondent à un point B , il faut examiner la courbe décrite par le point β . Les courbes ρ rencontrent la droite $b\beta$ en des points qui étant les points de contact de ces courbes avec les tangentes, il y a $m(2r-1)$ de ces tangentes qui passent par le point a . Chacune d'elles détermine sur $b\beta$ un point α , et chaque tel point offre donc $r-1$ points β sur $b\beta$.

Il y a ainsi $m(2r-1)(r-1)$ points β de la courbe (β) sur une droite arbitraire $b\beta$. Mais par le point b passent m courbes ρ , et à chacune d'elles on peut mener $a(r-1)$ tangentes par le point a ; chaque point de contact offre un point α . En traçant la droite αb , elle rencontre la courbe correspondante en b . Le point b est alors multiple d'ordre $mr(r-1)$ de la courbe β . Cette courbe est donc d'ordre

$$m(3r-1)(r-1).$$

Prenons un point arbitraire B . La courbe (β) rencontre la droite Bc en $m(3r-1)(r-1)$ points et à chacun d'eux correspond un seul point α et par suite aussi un point A . Donc:

à un point B correspondent

$$m(3r-1)(r-1)$$

points A.

Le nombre de points en lesquels coïncident deux points correspondants A, B est

$$m(2r-1)(r-1) + m(3r-1)(r-1).$$

Seulement il y a entre eux des points coïncidants qui n'offrent pas des solution, c'est-à-dire qui ne sont pas les points doubles de ρ . Cela arrive:

1.° quand les points α se trouvent sur bc ; il y en a $m(2r-1)$. Le point de rencontre de la droite bc avec P peut être considéré comme le point A auquel correspond un point B comme point multiple d'ordre $r-1$. Le point B coïncide évidemment avec le point correspondant A , mais le point α n'est pas un point double.

Il faut donc soustraire

$$m(2r-1)(r-1)$$

de nombre donné plus haut;

2.° quand la courbe ρ touche la droite ab ; il y a $2m(r-1)$ de telles positions.

Chaque point de contact peut être considéré comme α qui se confond avec son point correspondant β . Il est clair que le point A se confond avec le point correspondant B et néanmoins α n'est pas un point double de ρ .

Le nombre de courbes ρ , douées de points doubles, est donc

$$m(2r-1)(r-1) + m(3r-1)(r-1) - m(2r-1)(r-1) - 2m(r-1)$$

ou

$$3m(r-1)^2.$$

Ainsi

Un plan arbitraire Q touche $3m(r-1)^2$ surfaces R d'un faisceau de la première dimension et d'indice m .

Les courbes ρ forment évidemment sur le plan Q un faisceau de la première dimension et d'indice m . Donc:

Dans un faisceau de courbes planes, qui est de la première dimension et d'indice m , il y a $3m(r-1)^2$ courbes ayant un point double.

II. Sur le faisceau de la deuxième dimension.

67. Considérons un faisceau (R) de la deuxième dimension et d'indice m ; c'est-à-dire par deux points arbitraires passent m surfaces de ce faisceau.

On peut démontrer que, en prenant un plan arbitraire Q et une droite quelconque P dans ce plan, il y a un certain nombre de surfaces de ce faisceau, qui touchent le plan Q en les points de la droite P .

Prenons sur Q deux points b, c pour centres des faisceaux de droites et une droite arbitraire S . Considérons un point α de la droite P . En ce point touchent m surfaces R la droite P . Chaque telle surface rencontre Q en une courbe ρ tangente en α à la droite P . La jonction αb coupe les courbes correspondantes ρ en autres $r-1$ points β .

En projetant le point α du point c sur la droite S , nous obtenons A , c'est-à-dire la droite αc rencontre S en un point A ; et de même la droite βc rencontre S en B . Nous disons que les points A, B se correspondent, quand ils proviennent des points de la même courbe ρ .

Quand le point B coïncide avec son point correspondant A , le point β se confond de même avec α , ou, en d'autres termes, la droite α, b est tangente à ρ au point α .

La courbe ρ possède donc dans ce cas deux tangentes en α , savoir: la droite P et la droite αb ; le point α est, par conséquent, un point double de la courbe ρ .

Quand nous voulons déterminer le nombre de points correspondants qui coïncident, nous cherchons le nombre de points B correspondant à un point A , et réciproquement.

Prenons un point A . La droite Ac rencontre P en un point α' , par lequel passent m surfaces R qui touchent la droite P et par conséquent autant de courbes ρ qui la touchent. La droite $\alpha'b$ coupe chacune de ces courbes en $r - 1$ points β qui déterminent les points B .

A un point A correspondent donc $m(r - 1)$ points B .

Afin que nous trouvions combien de points A correspondent à un point B , examinons d'abord la courbe décrite par le point β .

Un rayon arbitraire passant par b rencontre P en α ; par ce point passent m surfaces R et par conséquent tout autant de courbes ρ , qui touchent la droite P en α . Chacune de ces courbes ρ rencontre le dit rayon encore en $r - 1$ points. Sur un rayon arbitraire passant par b se trouvent donc $m(r - 1)$ points β de la courbe (β) . Le point b détermine un faisceau de surfaces R de la première dimension et d'indice m . Il y a $2m(r - 1)$ surfaces R qui touchent la droite P , et chacune de ces surfaces rencontre le rayon correspondant αb en b . Ce point est donc multiple d'ordre $2m(r - 1)$ de la courbe (β) qui est, par conséquent, d'ordre $3m(r - 1)$.

En prenant un point arbitraire B sur la droite S , la droite cB rencontre la courbe (β) en $3m(r - 1)$ points β . A chacun de ces points correspond un seul point α , et par conséquent de même un seul point A . Ainsi:

A un point arbitraire B correspondent $3m(r - 1)$ points A .

De là suit que sur la droite S se trouvent $4m(r - 1)$ points, en lesquels un point A coïncide avec son point correspondant B . Entre ces points se trouve aussi le point dérivé du point de rencontre des droites cb et P ; ce point dérivé est le point d'intersection des droites bc et S . En ce point (cb, P) touchent m surfaces R et par conséquent de même les courbes ρ la droite P . Chacune d'elles rencontre cb en $(r - 1)$ points β qui offrent $m(r - 1)$ points B coïncidant avec le point correspondant A au point (bc, S) . Il est clair que le point (bc, P) n'est pas un point double des courbes ρ . Il faut donc soustraire le

nombre de ces points de nombre général des points doubles. Donc:

Il y a $3m(r-1)$ courbes ρ ayant leurs points doubles sur la droite P ;

Ou:

Dans un faisceau (R) de surfaces d'ordre r , qui est de la deuxième dimension et d'indice m , il y a

$$3m(r-1)$$

surfaces qui touchent un plan arbitraire Q en des points situés sur une droite P de ce plan.

De là suit que, en prenant tous les points de contact de ces surfaces avec le plan Q , ces points remplissent une courbe. Ainsi:

Les points de contact d'un plan Q avec les surfaces d'ordre r d'un faisceau (R) de la deuxième dimension et d'indice m , engendrent une courbe d'ordre $3m(r-1)$ sur ce plan.

Nous voyons aussi que le faisceau (R) rencontre le plan Q en un faisceau (ρ) de la deuxième dimension et d'indice m de courbes d'ordre r . De là résulte ce théorème:

Les points doubles des courbes ρ qui forment un faisceau (ρ) de la deuxième dimension et d'indice m engendrent une courbe d'ordre

$$3m(r-1).$$

Quand $m = 1$, le lieu de ces points doubles est une courbe qu'on appelle *Jacobienne*.

III. Surfaces et courbes gauches.

68. Nous allons nous servir de théorèmes obtenus dans le précédent à la génération des surfaces et des courbes gauches.

Nous avons vu que $3m(r-1)^2$ surfaces R d'un faisceau (R) de la première dimension et d'indice m touchent un plan arbitraire Q .

Quand le plan Q change de position, les points de contact q le font aussi, et par conséquent quand Q enveloppe une figure, les points q engendrent de même une figure.

Supposons que le plan Q enveloppe une droite P ou, en d'autres termes, que le plan Q forme un faisceau de la première dimension ayant la droite P pour l'axe. On voit immédiatement que sur un plan quelconque de ce faisceau se trouvent $3m(r-1)^2$ points de la figure demandée, qui est par conséquent une courbe gauche.

Quand nous voulons déterminer son ordre, nous allons chercher le nombre de ses points sur la droite P . Il y a $2m(r-1)$ surfaces R qui touchent cette droite, et leurs points de contact appartiennent donc à la courbe demandée.

Ainsi:

Le lieu des points de contact des surfaces R d'ordre r d'un faisceau (R) de la première dimension et d'indice m avec les plans d'un faisceau de la première dimension est une courbe d'ordre

$$m(r-1)(3r-1).$$

69. Examinons maintenant le lieu des points de contact des surfaces R avec les plans Q qui forment un faisceau de la deuxième dimension.

Considérons le cas, quand le plan Q forme un faisceau du premier indice ou quand il pivote autour d'un point fixe a . Nous verrons que sur une droite arbitraire passant par a se trouve un nombre fini de points de contact ou que ce lieu de ces points est une surface.

Prenons une telle droite arbitraire D passant par a . Quand elle contient un tel point, qu'il soit le point de contact d'une surface R avec un plan Q , il faut que ce plan passe par cette droite et que cette surface touche aussi la droite D . On sait, d'après ce qui précède, que $2m(r-1)$ surfaces R touchent la droite D ; leurs points de contact appartiennent à la surface cherchée.

Par le point a passent m surfaces R desquelles nous obtenons le même point a sur D . Il suit de là que sur la droite D se trouvent outre le point a qui est un point multiple d'ordre m encore $2m(r-1)$ autres points de la surface cherchée. Nous avons donc le théorème suivant:

Le lieu des points de contact des surfaces R d'ordre r d'un faisceau (R) de la première dimension et d'indice m avec les plans passant par un point a est une surface (T_2) d'ordre

$$m(2r-1)$$

ayant en a un point multiple d'ordre m .

Ce cas mérite encore en peu d'attention. Considérons une surface R' dans le faisceau (R) et faisons passer du point a une surface conique circonscrite à R' . Cette surface conique appartient donc au faisceau de plans Q et touche la surface R' suivant une courbe. En changeant la surface R' , cette courbe de contact change de même, et quand la surface R' remplit le faisceau (R) , la courbe de contact engendre la surface (T_2) .

Nous pouvons donc le théorème précédent énoncer ainsi:

Le lieu des courbes de contact des surfaces coniques circonscrites d'un

point a aux surfaces R d'ordre r d'un faisceau (R) de la première dimension et d'indice m est une surface (T_2) d'ordre

$$m(2r - 1)$$

ayant en a un point multiple d'ordre m .

En coupant tout ce système par un plan passant par le point a , nous obtenons sur le plan sécant un faisceau de droites Q et un faisceau de courbes ρ , ces lignes sont liées par ce théorème:

Les points de contact des courbes planes ρ d'ordre r d'un faisceau (ρ) de la première dimension et d'indice m avec les droites passantes par un point a engendrent une courbe d'ordre

$$m(2r - 1)$$

ayant en a un point multiple d'ordre m .

70. Nous avons trouvé que les point de contact des surfaces R d'un faisceau (R) de la deuxième dimension avec un plan Q engendrent sur ce plan une courbe d'ordre $3m(r - 1)$.

Quand le plan tourne autour d'une droite P , la courbe de contact, dont nous venons de parler, engendre donc une surface (T_3) dont l'ordre nous allons déterminer.

En un point arbitraire p' de P touchent m surfaces R de cette droite, ce qui prouve que la droite P est une ligne multiple d'ordre m de (T_3) . Puisque sur un plan quelconque Q passant par P se trouve toujours encore une courbe d'ordre $3m(r - 1)$, alors la surface (T_3) est d'ordre $m(3r - 2)$.

Ainsi:

Le lieu des points de contact des surfaces R d'un faisceau (R) de la deuxième dimension et d'indice m avec les plans P , passant par une droite P , est une surface (T_3) d'ordre

$$m(3r - 2)$$

ayant la droite P pour ligne multiple d'ordre m .

71. Dans ce qui va suivre nous voulons faire usage des théorèmes précédents.

Considérons un faisceau (R) de la première dimension et d'indices m de surfaces R d'ordre r . Une surface arbitraire R rencontre une courbe quelconque C d'ordre c en cr points.

En construisant les plans tangents T en ces points à la surface R , ces plans T enveloppent une surface développable (T) , puisque nous pouvons démontrer que par un point quelconque passe un certain nombre fini de ces plans.

Prenons un point a et menons de ce point les plans tangents aux surfaces du faisceau (R) . Leurs points de contact remplissent une surface d'ordre $m(2r - 1)$ qui rencontre la courbe C en $cm(2r - 1)$ points, et chacun d'eux offre un plan tangent T de la surface (T) , qui passe en même temps par le point a . Par le point a pris à volonté passent alors $cm(2r - 1)$ plans tangents T . Ainsi:

Une surface R d'ordre r rencontre une courbe C d'ordre c en des points; les plans tangents menés en ces points à R enveloppent une surface développable (T) de la classe

$$cm(2r - 1),$$

quand la surface R forme un faisceau (R) de la première dimension et du premier indice.

72. Remplaçons la courbe C par une surface S d'ordre s . Une surface arbitraire R du faisceau (R) rencontre S en une courbe s . Menons les plans tangents T à R aux points de la courbe s . Quand la surface R remplit le faisceau (R) , les plans T enveloppent une surface générale (T) , car on peut démontrer que par deux points quelconques passe un nombre fini de plans T .

Prenons deux points arbitraires a, b qui déterminent un faisceau de plans dont les points de contact avec les surfaces du faisceau (R) engendrent une courbe d'ordre

$$m(r - 1)(3r - 1).$$

Cette courbe rencontre la surface S en

$$ms(r - 1)(3r - 1)$$

points, et chacun d'eux détermine un plan T passant par les points a, b .

Nous avons donc ce théorème:

Une surface R d'ordre r coupe une surface donnée S d'ordre s en une courbe s ; les plans tangents à R en les points de cette courbe enveloppent une surface générale de la classe

$$ms(r - 1)(3r - 1),$$

quand la surface R remplit un faisceau (R) de la première dimension et du premier indice.

73. On peut faire usage de ce mode aussi dans les cas, en lesquels il ne s'agit pas de faisceaux. Nous pouvons ainsi résoudre ce problème:

Quel est le lieu qu'enveloppent les plans tangents à une surface R d'ordre r aux points de la courbe d'intersection K de cette surface avec une autre surface S d'ordre s ?

Ces plans enveloppent une surface développable, parce que par un point arbitraire a passe un nombre fini de ces plans, que nous déterminons comme il suit.

Prenons un faisceau (R) de la première dimension et du premier indice, qui contient la surface donnée R . En faisant passer du point a les plans tangents aux surfaces de ce faisceau, les points de contact engendrent une surface d'ordre $2r - 1$. Cette surface rencontre la courbe K qui est d'ordre rs en $rs(2r - 1)$ points. Ces points offrent évidemment les plans tangents à la surface donnée R , qui passent par le point a . Il y a entre eux de tels plans qui ne touchent pas la surface R .

La courbe fondamentale du faisceau (R) étant d'ordre r^2 perce la surface S en sr^2 points qui fournissent les plans qui passent par le point a et touchent des surfaces du faisceau (R) excepté la surface considérée R . Il faut donc les soustraire du nombre précédent, ce qui donne $rs(r - 1)$ plans tangents à R aux points de la courbe K . D'où il suit que:

Les plans tangents à une surface R d'ordre r de la courbe d'intersection K de cette surface avec une autre surface S d'ordre s , enveloppent une surface développable de la classe

$$rs(r - 1).$$

74. Nous pourrions résoudre ce problème directement, si nous avions résolu le théorème suivant:

Quel est la courbe de contact de la surface conique circonscrite à une surface R d'un point a ?

Considérons de nouveau un faisceau (R) contenant la surface donnée R , ce faisceau étant de la première dimension et du premier indice.

Les points de contact des plans tangents menés du point a aux surfaces du faisceau (R) engendrent une surface d'ordre $2r - 1$, qui coupe la surface R en une courbe d'ordre $2r^2 - r$. La courbe fondamentale du faisceau (R) , étant d'ordre r^2 , fait une partie de cette courbe; seulement cette courbe fondamentale n'est pas la courbe de contact de la surface donnée R . Alors la courbe propre de contact est d'ordre $r(r - 1)$.

Ainsi:

La surface conique circonscrite d'un point quelconque a à une surface R d'ordre r touche cette surface suivant une courbe d'ordre $r(r - 1)$.

75. En employant la voie que nous avons suivie précédemment, nous pouvons déterminer la classe de la surface engendrée par la loi suivante.

Soit donné un faisceau (R) de la seconde dimension et d'indice m de surfaces d'ordre r . Une surface arbitraire R de ce faisceau rencontre une courbe donnée C en cr points. Menons les plans tangents T en ces points à la surface R . Quand la surface R forme le faisceau (R) , les plans tangents, dont nous venons de parler, enveloppent une surface (T) dont la classe peut être déterminé ainsi.

Deux points arbitraires déterminent un faisceau de plans. Les points de contact de ces plans avec les surfaces du faisceau (R) engendrent une surface d'ordre $m(3r-2)$, qui rencontre la courbe C en $cm(3r-2)$ points, et chacun d'eux détermine un tel plan T passant par les deux points pris à volonté et tangent à la surface R au point de la courbe C .

Donc:

Les surfaces R d'ordre r d'un faisceau (R) de la deuxième dimension et d'indice m rencontrent une courbe C d'ordre c en des points; les plans tangents en ces points aux surfaces R enveloppent une surface de la classe

$$cm(3r-2).$$

IV. Contact des deux faisceaux de la première dimension.

76. Soient (R_1) , (R_2) deux faisceaux de la première dimension et d'indices m_1 , m_2 de surfaces R_1 , R_2 respectivement d'ordre r_1 , r_2 . Nous allons démontrer que sur un plan arbitraire Q se trouve un nombre fini de points de contact d'une surface R_1 avec une surface R_2 . Prenons dans le plan Q une droite P et une droite S qui ne se trouve pas dans ce plan.

Cherchons les surfaces R_1 , R_2 qui jouissent de telle propriété, que leurs plans tangents en un point t commun à ces surfaces et situé sur le plan Q rencontrent le plan Q en une même droite. Supposons que le plan tangent à R_1 rencontre la droite S en un point A et le plan tangent à R_2 rencontre la même droite en un point B . Quand le point A coïncide avec le point B , le point t est le point cherché ou, en d'autres termes, la surface R_1 touche la surface R_2 en ce point.

Prenons sur S un point A et cherchons le nombre de points B correspondant à ce point. Nous désirons donc que le plan tangent T_1 à R_1 passe par le point A de telle manière que la surface R_2 touche la droite τ qui est la droite d'intersection des plans T_1 , Q en le même point t , en lequel le plan T_1 touche la surface R_1 .

Les plans T_1 qui touchent les surfaces du faisceau (R_1) aux points du plan Q et passant par le point A enveloppent d'après le précédent une surface conique de la classe

$$m_1(3r_1 - 1)(r_1 - 1)$$

et rencontrent le plan Q en une courbe enveloppe de la même classe. Supposons que τ_1 soit une telle droite d'intersection du plan Q avec T_1 , qui passe par le point A , et t soit le point de contact. Par t passent m_2 surfaces R_2 et chacune d'elles touche en ce point un même plan T_2 qui rencontre Q en τ_2 .

Soient A_1, B_1 les points en lesquels les droites τ_1, τ_2 rencontrent respectivement la droite P . Quand le point A_1 coïncide avec B_1 , la surface R_2 jouit de telle propriété que son plan tangent T_2 rencontre Q en la droite τ_1 et que T_2 détermine le point B sur S .

Considérons un point arbitraire sur P comme A_1 . Par ce point passent

$$m_1(r_1 - 1)(3r_1 - 1)$$

plans tangents T_1 et par conséquent aussi de tangentes τ_1 .

Par chacun des points de contact passent m_2 surfaces R_2 qui déterminent T_2 et de même autant de points B_1 . Donc:

A un point A_1 correspondent

$$m_1 m_2 (r_1 - 1)(3r_1 - 1)$$

points B_1 .

Considérons un point arbitraire sur P comme B_1 . Les plans tangents issus de ce point à (R_2) ont leurs points de contact sur une surface rencontrant Q en une courbe d'ordre $m_2(2r_2 - 1)$, et les points de contact des plans tangents à (R_1) , menés du point A , engendrent une surface qui coupe le plan Q en une courbe d'ordre $m_1(2r_1 - 1)$. Ces deux courbes se rencontrent en des points qui offrent les points A_1 correspondant au point B_1 .

A un point B_1 correspondent donc

$$m_1 m_2 (2r_1 - 1)(2r_2 - 1)$$

points A_1 .

Le nombre de points coïncidents est alors

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + (2r_1 - 1)(2r_2 - 1)].$$

A ces points correspondent les points B . De là suit que à un point A correspondent

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + (2r_1 - 1)(2r_2 - 1)]$$

points B .

Les plans tangents aux surfaces R_1 menés du point A les touchent en des points dont $m_1(2r_1 - 1)$ se trouvent sur $\mathcal{D}$. Par ces points passent m_2 à m_2 surfaces R_2 et par conséquent il y a autant de points B qui se trouvent sur elles, sans qu'ils remplissent la condition que τ_1 coïncide avec τ_2 .

A un point A correspondent donc proprement dit

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + (2r_1 - 1)(2r_2 - 2)]$$

points B .

Par le même raisonnement nous obtenons que à un point B correspondent

$$m_1 m_2 [(r_2 - 1)(3r_2 - 1) + (2r_2 - 1)(2r_1 - 2)]$$

points A .

Le nombre de points coïncidents est donc

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + (r_2 - 1)(3r_2 - 1) + (2r_1 - 1)(2r_2 - 2) + (2r_2 - 1)(2r_1 - 2)].$$

Entre ces points se trouvent aussi les suivants. La droite S rencontre Q en s . Les surfaces des courbes de contact des surfaces coniques circonscrites à (R_1) , (R_2) du point s sont respectivement d'ordre $m_1(2r_1 - 1)$, $m_2(2r_2 - 1)$.

Ces surfaces ayant le point s pour point multiple respectivement d'ordre m_1 , m_2 rencontrent Q encore en

$$m_1 m_2 [(2r_1 - 1)(2r_2 - 1) - 1]$$

points, et pour chacun d'eux coïncident τ_1 , τ_2 et A , B , pendant que les plans T_1 , T_2 ne se confondent pas. En soustrayant ce nombre du nombre général, nous obtenons

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + (r_2 - 1)(3r_2 - 1) - 4(r_1 r_2 - r_1 - r_2 + 1)]$$

des plans tangents communs.

Nous pouvons donc dire:

Les points de contact des surfaces R_1 , R_2 d'ordres r_1 , r_2 des deux faisceaux (R_1) , (R_2) de la première dimension et d'indices m_1 , m_2 engendrent une courbe d'ordre

$$m_1 m_2 [3(r_1^2 + r_2^2) - 4r_1 r_2 - 2].$$

Il est clair que cette formule renferme le cas particulier précédent, quand un des faisceaux de surfaces, dont nous venons de parler, devient un faisceau de plans.

V. Contact d'un faisceau de la première dimension avec un faisceau de la deuxième dimension.

77. Soit donné un faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 de surfaces R_1 d'ordre r_1 et un faisceau (R_2) de la seconde dimension et d'indice m_2 de surfaces R_2 d'ordre r_2 .

Considérons un plan arbitraire P passant par une droite Q et une droite S qui ne rencontre pas la droite Q , et prenons sur Q un point quelconque q par lequel passent m_1 surfaces R_1 , dont les plans tangents T en ce point rencontrent le plan P en des droites τ . Chacune de ces droites est tangente à m_2 surfaces R_2 dont les plans tangents T_2 en q passent évidemment par la droite τ .

Désignons les points de rencontre de la droite S avec les plans T_1, T_2 respectivement par A, B . Quand deux tels points correspondants se réunissent, le point q est évidemment le point de contact des deux surfaces R_1, R_2 .

Considérons un point quelconque de la droite S comme A . Les points de contact des plans tangents issus de ce point aux surfaces R_1 engendrent une surface d'ordre $m_1(2r_1 - 1)$ qui rencontre la droite Q en autant de points dont chacun fournit une droite τ touchée en lui même par m_2 surfaces R_2 ; les plans tangents à ces surfaces en lesdits points déterminent les point B correspondant au point A .

A un point A correspondent donc

$$m_1 m_2 (2r_1 - 1)$$

points B.

Prenons sur Q un point q et sur S un point arbitraire B . Il y a m_2 surfaces R_2 qui touchent la droite qB au point q , et le plan tangent en ce point à chacune de ces surfaces rencontre P en une droite τ_2 .

Les plans tangents en q à m_1 surfaces R_1 passant par le point q coupent le plan P en des droites τ_1 .

Afin que nous trouvions le nombre de points A correspondant au point B pris à volonté, il faut que nous cherchons les positions en lesquelles deux droites τ_1, τ_2 coïncident.

Supposons que les droites τ_1, τ_2 rencontrent une droite V du plan P respectivement en des points A_1, B_1 . Quand A_1 coïncide avec B_1 , nous obtenons la position demandée. Les plans tangents issus d'un point quelconque A_1 de V aux surfaces R_1 touchent celles-ci en des points qui engendrent une surface rencontrant Q en $m_1(2r_1 - 1)$ points. Chacun de ces points q détermine une droite qB tangente à m_2 surfaces R_2 au point q .

A un point A_1 correspondent donc

$$m_1 m_2 (2r_1 - 1)$$

points B_1 .

Prenons un point arbitraire B_1 . Les plans passant par la droite $B_1 B$ touchent les surfaces R_2 en des points qui remplissent une surface rencontrant la droite Q en $m_2(3r_2 - 2)$ points.

Par chacun de ces points passent m_1 surfaces R_1 et par conséquent:
à un point B_1 correspondent

$$m_1 m_2 (3r_2 - 2)$$

points A_1 .

Les points coïncidents sont alors en nombre

$$m_1 m_2 (2r_1 + 3r_2 - 3).$$

Entre ces points se trouve aussi le point d'intersection des droites Q, V . Par ce point passent m_1 surfaces R_1 et, par conséquent, autant de points A_1 coïncident avec ce point. De plus, il y a m_2 surfaces R_2 qui touchent la droite (B, QV) au point QV , en lequel se trouvent donc autant de points B_1 . Le nombre de ces points diminue ainsi le nombre de points correspondant à B .

Nous voyons que:

à un point B correspondent

$$m_1 m_2 (2r_1 + 3r_2 - 4)$$

point A .

De là suit que le nombre de points coïncidents est

$$m_1 m_2 (4r_1 + 3r_2 - 5).$$

Entre ces points se trouve aussi le point d'intersection s de la droite S avec P , qui ne remplit pas les conditions demandées. Les points de contact des plans tangents aux surfaces R_1 issus du point s engendrent une surface d'ordre

$$m_1(2r_1 - 1),$$

qui rencontre la droite Q en le même nombre de points. Chacun d'eux détermine une droite τ_1 tangente à m_2 surfaces R_2 dont les plans tangents T'_2 déterminent sur S le point s , c'est-à-dire les points A, B coïncident en ce point sans qu'il appartienne à la solution. De là suit qu'il y a seulement

$$m_1 m_2 (2r_1 + 3r_2 - 4)$$

points coïncidents A, B qui correspondent à la solution. Ainsi:

Les surfaces R_1 d'ordre r_1 d'un faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 touchent les surfaces R_2 d'ordre r_2 d'un faisceau (R_2) de la deuxième dimension et d'indice m_2 en des points qui engendrent une surface d'ordre

$$m_1 m_2 (2r_1 + 3r_2 - 4).$$

78. Quand (R_1) est un faisceau de plans de la première dimension ou, en d'autres termes, quand ces plans passent par une droite, nous obtenons le théorème connu de ce qui précède:

Les points de contact des plans passant par une droite avec les surfaces d'un faisceau (R_2) engendrent une surface d'ordre

$$m_2 (3r_2 - 1).$$

79. En supposant que (R_2) est un réseau de plans, nous obtenons un autre théorème connu:

Les points de contact des plans d'un réseau avec les surfaces d'un faisceau (R_1) engendrent une surface d'ordre

$$m_1 (2r_1 - 1).$$

Ces sont les deux théorèmes à l'aide desquels nous avons démontré le théorème général qui précède, et qui se présentent comme ses cas particuliers.

80. De la formule générale que nous avons obtenue tout à l'heure, nous pouvons déduire ce qui va suivre.

Supposons que (R_1) est un faisceau d'indice m_1 de plans, c'est-à-dire une surface développable de la $m_1^{\text{ième}}$ classe, et (R_2) est un faisceau de la seconde dimension et d'indice m_2 de plans ou, en d'autres termes, elle est une surface générale de la classe m_2 . Le lieu des points de contact est une surface d'ordre $m_1 m_2$. Seulement ce n'est possible que si les plans tangents de la surface R_1 coïncident avec les plans tangents de la surface R_2 . Nous avons ainsi retrouvé le théorème bien connue:

Une surface développable de la $m_1^{\text{ième}}$ classe a avec une surface générale de la $m_2^{\text{ième}}$ classe $m_1 m_2$ plans tangents communs.

VI. Surface tangentielle des deux faisceaux de la deuxième dimension.

81. Dans ce paragraphe nous allons discuter le cas, quand tous les deux faisceaux sont de la deuxième dimension. Nous verrons qu'il y a un nombre fini de surfaces du premier faisceau qui touchent en un point arbitraire a les surfaces du second faisceau.

Faisons passer par le point a un plan quelconque P et une droite S qui ne passe pas par ce point a et qui n'est pas située dans ce plan.

Considérons une surface R_1 du faisceau (R_1) , qui passe par a . Le plan tangent T_1 en a à cette surface rencontre P en une droite τ . Cette droite est touchée par m_2 surfaces R_2 au point a , dont chacun a en a un plan tangent T_2 . Désignons les points de rencontre des plans T_1 , T_2 avec S respectivement par A , B . Quand le point A coïncide avec B , les surfaces R_1 , R_2 se touchent au point a .

Prenons sur S un point quelconque A . Il y a m_1 surfaces R_1 qui touchent la droite aA en a . Leurs plans tangents en ce point rencontrent P en des droites τ . Chacune de ces droites est tangente en a à m_2 surfaces R_2 dont les plans tangents en ce point rencontrent S en les points B .

A un point A correspondent donc $m_1 m_2$ point B , et vice versa;

la démonstration est la même. Alors il y a $2 m_1 m_2$ points A qui coïncident avec leurs points correspondants B . Entre ces points se trouve aussi le point s en lequel la droite S perce le plan P . On trouve aisément que en ce point coïncident m_2 points B avec leurs m_1 points correspondants A , car m_1 surfaces R_1 et m_2 surfaces R_2 touchent la droite sa en a et leurs plans tangents en ce point passent par cette droite et rencontrent S en le point s , sans qu'il appartienne à la solution. Les plans tangents communs sont donc en nombre $m_1 m_2$, et nous pouvons dire que:

Dans deux faisceaux (R_1) , (R_2) de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 de surfaces R_1 , R_2 d'ordre r_1 , r_2 , il y a $m_1 m_2$ surfaces prises une à une dans ces faisceaux, qui se touchent en un point quelconque.

Quand R_1 et R_2 sont les plans ou, en d'autres termes, quand les faisceaux (R_1) , (R_2) sont les surfaces enveloppes respectivement de la classe m_1 , m_2 , les surfaces qui se touchent, étant les plans, coïncident; ainsi:

Par un point arbitraire dans l'espace passent $m_1 m_2$ plans qui touchent en même temps les surfaces données (R_1) , (R_2) de la classe m_1 , m_2 .

82. Considérons une courbe quelconque C d'ordre c et déterminons dans les faisceaux (R_1) , (R_2) des surfaces qui se touchent en les points de cette courbe. Leurs plans tangents menés en ces points enveloppent une surface développable. Nous déterminons sa classe en trouvant le nombre de ces plans tangents passant par un point quelconque a . Prenons une droite arbitraire P et un point quelconque c sur C , par lequel passent m_1 surfaces R_1 et m_2 surfaces R_2 ; leurs plans tangents rencontrent la droite P respectivement en les points A , B . Quand le point A coïncide avec son correspondant B , le plan tangent, passant par ce point, occupe la position demandée.

Prenons sur P un point A . Les plans passant par la droite Aa et tangents aux surfaces R_1 les touchent en des points qui engendrent une surface d'ordre

$$m_1(3r_1 - 2).$$

Cette surface rencontre C en $cm_1(3r_1 - 2)$ point c ; chacun d'eux détermine une surface R_1 dont le plan tangent passe par les points A, a . Considérons un tel point c . Chacune des m_2 surfaces R_2 qui touchent la droite ac au point c possède un plan tangent passant par ac . Ce plan rencontre P en le point B qui correspond au point A pris à volonté sur P . Donc:

à un point A correspondent

$$cm_1m_2(3r_1 - 2)$$

points B .

Par un raisonnement semblable nous obtenons que:

à un point B correspondent

$$cm_1m_2(3r_2 - 2)$$

points A .

De là suit qu'il y a

$$cm_1m_2[3(r_1 + r_2) - 4]$$

point sur P en lesquels un point A coïncide avec son point correspondant B .

Le plan aP rencontre la courbe C en c points c . La jonction ac d'un tel point c avec le point a touche m_1 surfaces R_1 et m_2 surfaces R_2 au point c . Leurs plans tangents en ce point rencontrent la droite P en le même point; cependant ils ne se confondent pas. Il faut donc soustraire cm_1m_2 points du nombre précédent; il s'ensuit que par le point a passent seulement

$$cm_1m_2[3(r_1 + r_2) - 5]$$

plans. Ainsi:

Deux surface R_1, R_2 d'ordres r_1, r_2 des deux faisceaux $(R_1), (R_2)$ de la deuxième dimension et d'indices m_1, m_2 se touchent en les points d'une courbe C d'ordre c ; les plans qui touchent ces surfaces en ces points enveloppent une surface développable de la classe

$$cm_1m_2[3(r_1 + r_2) - 5].$$

83. Remplaçons la courbe C par une surface S d'ordre s . En un point arbitraire s de cette surfaces se touchent m_1m_2 surfaces R_1, R_2 prises une à une dans chacun des faisceaux $(R_1), (R_2)$. Le plan tangent aux dites surfaces en s enveloppe une surface, quand le point s parcourt la surface S . Déterminons sa classe.

En prenant deux points arbitraires a, b dans l'espace, les plans, passant par la droite ab et tangents aux surfaces R_1 , les touchent en des points qui remplissent une surface d'ordre $m_1(3r_1 - 2)$, et les points de contact des plans passant par ab et tangents aux surfaces R_2 engendrent une surface d'ordre $m_2(3r_2 - 2)$.

Ces deux surfaces rencontrent la surface S en

$$m_1 m_2 s (3r_1 - 2)(3r_2 - 2)$$

points dont chacun offre des plans passant par les points a, b et tangents à la fois à deux surfaces R_1, R_2 . Entre ces points se trouvent aussi tels qui ne fournissent pas de plans correspondant à cette condition. Nous les obtenons ainsi.

La droite ab est, comme on sait, une ligne multiple d'ordre m_1 sur une des surfaces de contact auxiliaire et une ligne multiple d'ordre m_2 sur l'autre et par conséquent les points de rencontre de la droite ab avec S se trouvent aussi entre les points dont nous avons donné au-dessus le nombre; il y en a $m_1 m_2 s$. Nous obtenons donc

$$m_1 m_2 s [(3r_1 - 2)(3r_2 - 2) - 1] = 3 m_1 m_2 s [3r_1 r_2 - 2(r_1 + r_2) + 1]$$

points demandés. Ainsi:

Les plans tangents, menés aux points de la surface donnée S aux surfaces R_1, R_2 qui se touchent en ces points, enveloppent une surface de la classe

$$3 m_1 m_2 s [3r_1 r_2 - 2(r_1 + r_2) + 1].$$

VII. Surface tangentielle d'un faisceau de la première dimension et d'un faisceau de la deuxième dimension.

84. Considérons un faisceau (R_1) de la première dimension et un faisceau (R_2) de la deuxième dimension et menons au point de contact d'une surface R avec une surface R_2 le plan tangent T à ces surfaces. Quand nous le faisons en tous les points de contact de deux faisceaux donnés, le plan T enveloppe une surface, car nous pouvons démontrer que par deux points arbitraires a, b passe un certain nombre fini de plans T . Faisons passer par la droite ab les plans tangents aux surfaces R_1 ; leurs points de contact engendrent une courbe d'ordre

$$m_1(r_1 - 1)(3r_1 - 1),$$

qui rencontre la droite ab en $2m_1(r_1 - 1)$ points.

Quand nous répétons le même procédé quant aux surfaces R_2 , nous obtenons une surface d'ordre

$$m_2(3r_2 - 2).$$

La courbe, dont nous venons de parler, rencontre cette surface en

$$m_1 m_2 (r_1 - 1)(3r_1 - 1)(3r_2 - 2)$$

points dont chacun est le point de contact d'une surface R_1 avec une surface R_2 et leur plan tangent commun en ce point passe par la droite ab .

Seulement entre ces points se trouvent aussi tels qui ne correspondent pas à la solution; ce sont les points situés sur la droite ab . La courbe de contact du faisceau (R_1) possède sur cette droite, comme nous avons dit, $2m_1(r_1 - 1)$ points, et la droite ab est une ligne multiple d'ordre m_2 sur la surface des points de contact du faisceau (R_2) . Les points communs à ces deux figures auxiliaires ne correspondent pas à la solution; il y en a

$$2m_1 m_2 (r_1 - 1).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Les surfaces R_1 d'ordre r_1 d'un faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 touchent les surfaces R_2 d'ordre r_2 d'un faisceau (R_2) de la deuxième dimension et d'indice m_2 en des points; les plans tangents communs à ces surfaces en ces points enveloppent une surface de la classe

$$3m_1 m_2 (r_1 - 1)(3r_1 r_2 - 2r_1 - r_2).$$

85. Soit donnée une surface S d'ordre s . La surface de contact des deux faisceaux (R_1) , (R_2) rencontre S en une courbe τ . En chaque point de cette courbe se touchent deux surfaces R_1 , R_2 qui ont par conséquent un plan tangent commun en ce point.

En déterminant tels plans tangents en tous les points de la courbe τ , ces plans enveloppent une surface développable, car nous pouvons démontrer que par un point quelconque a passe un certain nombre fini de plans tangents à cette surface.

Supposons que s soit un point qui jouit de telle propriété que une surface R_1 touche la droite as en s . Son plan tangent en ce point soit T_1 . Il y a m_2 surfaces R_2 qui touchent la droite as au point s . Leurs plans tangents en ce point soient T_2 .

Prenons une droite quelconque P et désignons ses points de rencontre avec les plans T_1 , T_2 respectivement par A , B . On voit immédiatement que, quand le point A coïncide avec le point B , le plan T_1 se confond avec T_2 ,

ou, en d'autres termes, que la surface R_1 touche la surface R_2 de telle sorte que leur plan tangent commun en s passe par le point a .

Considérons un point A sur P . Les plans tangents aux surfaces R_1 , qui passent par la droite Aa , touchent ces surfaces en des points qui engendrent une courbe d'ordre

$$m_1(r_1 - 1)(3r_1 - 1),$$

rencontrant la surface S en

$$m_1s(r_1 - 1)(3r_1 - 1)$$

point s , en lesquels touchent m_2 surfaces R_2 chaque droite as ; leurs plans tangents en ces points déterminent sur P les points B correspondant au point A .

A un point A correspondent donc

$$m_1m_2s(r_1 - 1)(3r_1 - 1)$$

points B .

Considérons un point B sur P . Les plans tangents aux surfaces R_2 , qui passent par la droite Ba , touchent ces surfaces en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_2(3r_2 - 2)$. Ces deux surfaces de contact se rencontrent en une courbe qui perce la surface S en

$$m_1m_2s(2r_1 - 1)(3r_2 - 2)$$

points qui offrent les points A correspondant au point B . Ainsi:

à un point B correspondent

$$m_1m_2s(2r_1 - 1)(3r_2 - 2)$$

points A .

Alors sur la droite P il y a

$$m_1m_2s[(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + (2r_1 - 1)(3r_2 - 2)]$$

points en lesquels les points B coïncident avec leurs points correspondants A .

La surface de contact des surfaces R_1 correspondant au point a rencontre S en une courbe qui perce le plan aP en $m_1s(2r_1 - 1)$ points s qui offrent les plans T_2 ayant avec T_1 les points commun sur P , seulement ces plans ne coïncident pas. De là suit qu'il faut soustraire

$$m_1m_2s(2r_1 - 1)$$

points coïncidents du nombre dont nous venons de parler, parce que ces points ne correspondent pas à la solution. Ainsi:

La surface de contact d'un faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 , avec un autre faisceau (R_2) de la deuxième dimension et

d'indice m_2 rencontre une surface donnée S d'ordre s en une courbe; les plans tangents communs à ces surfaces en les points de cette courbe enveloppent une surface développable de la classe

$$m_1 m_2 s [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1)],$$

les surfaces R_1, R_2 étant respectivement d'ordre r_1, r_2 .

Ce théorème renferme deux autres comme cas particuliers, que nous avons obtenus ailleurs. Supposons que $m_2 = 1, r_2 = 1$, c'est-à-dire que (R_2) soit un faisceau de plans passant par le point b . Le théorème précédent peut être énoncé ainsi:

Il y a

$$m_1 s (r - 1)(3r_1 - 1)$$

plans qui passent par les points a, b et touchent les surfaces R_1 en les points de la surface S .

C'est le résultat que nous avons énoncé autrement dans l'article 72. Quand (R_1) est un faisceau de plans passant par une droite bc , nous obtenons le théorème suivant:

Il y a

$$3m_2 s (r_2 - 1)$$

surfaces R_2 d'un faisceau de la deuxième dimension qui touchent un plan abc en les points de la courbe d'intersection de ce plan avec une surface S d'ordre s .

Nous avons obtenu ce résultat, pour $s = 1$, dans l'article 67.

VIII. Surface tangentielle des deux faisceaux de la première dimension.

86. Considérons un point p en lequel une surface R_1 d'un faisceau (R_1) de la première dimension touche une surface R_2 d'un autre faisceau (R_2) de la même dimension. Menons le plan tangent T en ce point aux surfaces R_1, R_2 . Quand ces surfaces remplissent les faisceaux $(R_1), (R_2)$, le plan T enveloppe une surface développable.

Déterminons le nombre de plans T passant par un point arbitraire a . Pour cet effet prenons une droite S . Les plans tangents issus du point a aux surfaces R_1 touchent ces surfaces en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_1(2r_1 - 1)$. Quand nous appliquons le même procédé quant aux surfaces R_2 ,

nous obtenons une surface d'ordre $m_2(2r_2 - 1)$. Ces deux surfaces se rencontrent en une courbe C . Prenons un point quelconque c sur cette ligne. La droite ac touche une surface R_1 et une surface R_2 au point c . Leurs plans tangents en c rencontrent la droite S respectivement en les points A, B . Quand le point A coïncide avec son point correspondant B , le point c offre le plan désiré qui passe par le point a .

Prenons un point arbitraire A sur S . Les plans tangents aux surfaces R_1 , qui passent par la droite Aa , touchent ces surfaces en des points qui engendrent une courbe d'ordre $m_1(r_1 - 1)(3r_1 - 1)$. Les plans tangents issus du point a aux surfaces R_2 ont leurs points de contact sur une surface d'ordre $m_2(2r_2 - 1)$ qui rencontre la courbe, dont nous venons de parler, en

$$m_1 m_2 (r_1 - 1)(3r_1 - 1)(2r_2 - 1)$$

points c .

Ces points offrent les points B . De plus à un point B correspondent

$$m_1 m_2 (2r_1 - 1)(r_2 - 1)(3r_2 - 1)$$

points A .

La surface circonscrite du point a aux surfaces R_1 rencontre la surface circonscrite du même point aux surfaces R_2 en une courbe C d'ordre connu, qui perce le plan aS en

$$m_1 m_2 (2r_1 - 1)(2r_2 - 1)$$

points qui fournissent, excepté le point a multiple d'ordre $m_1 m_2$, sur S les points A coïncidents avec B , sans que les plans tangents menés en ce point aux surfaces R_1, R_2 coïncident. Il s'ensuit:

Les surfaces R_1 d'ordre r_1 d'un faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 touchent les surfaces R_2 d'ordre r_2 d'un faisceau (R_2) de la première dimension et d'indice m_2 en des points; les plans tangents communs à ces surfaces en ces points enveloppent une surface développable de la classe

$$\left. \begin{aligned} m_1 m_2 [(r_1 - 1)(2r_2 - 1)(3r_1 - 1) + (r_2 - 1)(2r_1 - 1)(3r_2 - 1) \\ - (2r_1 - 1)(2r_2 - 1) + 1]. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

87. De ce théorème résulte un autre, exprimant un cas particulier que nous avons traité ailleurs. (R_2) soit un faisceau de la première dimension de plans, c'est-à-dire ces plans passent par la droite ab . Un point arbitraire c détermine un seul plan dans ce faisceau, qui est regardé comme un plan multiple de la surface développable; cette multiplicité est égal au nombre de sur-

faces R_1 qui le touchent. Ce plan est multiple d'ordre $3m_1(r_1 - 1)^2$, ce qui résulte du théorème précédent, ou en d'autres termes:

Un plan quelconque abc est tangent aux

$$3m_1(r_1 - 1)^2$$

surfaces R_1 d'ordre r_1 d'un faisceau de la première dimension et d'indice m_1 .

IX. Sur le contact des trois faisceaux de la deuxième dimension.

88. Considérons trois faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 , m_3 de surfaces R_1 , R_2 , R_3 respectivement d'ordre r_1 , r_2 , r_3 .

En déterminant le point de contact des trois surfaces prises une à une dans ces faisceaux, nous trouverons que le lieu de ce point est une surface. Déterminons ses points de rencontre avec une droite arbitraire Q .

Pour cet effet prenons un point q sur cette droite. Il y a m_1m_2 surfaces R_1 qui touchent en ce point les surfaces R_2 , prises une à une dans les faisceaux (R_1) , (R_2) . Leurs plans tangents en ce point q rencontrent un plan quelconque P passant par la droite Q en des droites T_{12} .

Chacune de ces droites touche m_3 surfaces R_3 en q . Leurs plans tangents en ce point désignons par T_3 . De plus désignons les points de rencontre des plans T_{12} , T_3 avec une droite quelconque S respectivement par A , B . Quand les points A , B coïncident, le point q jouit de telle propriété, qu'il est le point de contact des trois surfaces prises une à une dans les faisceaux donnés.

Considérons un tel point A sur S . Par ce point passent, d'après ce qui précède,

$$m_1m_2[3(r_1 + r_2) - 5]$$

plans tangents communs aux surfaces R_1 , R_2 en les points de la droite Q , qui sont les points q ; les plans tangents rencontrent P en des droites T_{12} , dont chacune touche m_3 surfaces R_3 et leurs plans tangents déterminent sur S les points B correspondant au point A . Donc:

à un point A correspondent

$$m_1m_2m_3[3(r_1 + r_2) - 5]$$

points B .

Prenons un point B sur S et un point q sur Q . Il y a m_3 surfaces R_3 qui touchent la droite qB au point q et chacune d'elles rencontre P en une

droite T_3 rencontrant une droite quelconque U du plan P en un point B_1 . Au point q se touchent $m_1 m_2$ surfaces R_1, R_2 dont les plans tangents communs en ce point coupent la même droite U en des points A_1 . Quand le point A_1 coïncide avec son point correspondant B_1 , le plan tangent commun aux surfaces R_1, R_2 détermine le point A correspondant à B .

Prenons un point A_1 sur U ; par ce point passent

$$m_1 m_2 [3(r_1 + r_2) - 5]$$

plans tangents communs dont les points de contact q se trouvent sur Q . Il y a m_3 surfaces R_3 qui touchent la droite qB au point q et leurs plans tangents déterminent les points B_1 sur U . A un point A_1 correspondent donc

$$m_1 m_2 m_3 [3(r_1 + r_2) - 5]$$

points B_1 .

Prenons un point B_1 . Les points de contact des plans passant par la droite BB_1 et tangents aux surfaces R_3 engendrent une surface d'ordre $m_3(3r_3 - 2)$ qui rencontre la droite Q en autant de points; en chacun d'eux se touchent $m_1 m_2$ surfaces R_1, R_2 dont les plans tangents communs en ce point déterminent T_{12} , et par conséquent de même les points A_1 . A un point B_2 correspondent donc

$$m_1 m_2 m_3 (3r_3 - 2)$$

points A_1 . Il s'ensuit qu'il y a

$$m_1 m_2 m_3 [3(r_1 + r_2 + r_3) - 7]$$

points coïncidents. Seulement tous ces points ne correspondent pas à la solution.

Soit u le point de rencontre des droites Q, U . La droite uB touche m_3 surfaces R_3 en u , et par conséquent en u se trouvent m_3 points B_1 qui se confondent avec les $m_1 m_2$ points A_1 . Il faut donc soustraire $m_1 m_2 m_3$ du nombre précédent. Ainsi:

A un point B correspondent

$$m_1 m_2 m_3 [3(r_1 + r_2 + r_3) - 8]$$

points A .

Il y a donc

$$m_1 m_2 m_3 \{3[2(r_1 + r_2) + r_3] - 13\}$$

points A qui coïncident avec les points correspondants B .

Entre ces points se trouve aussi le point d'intersection s de la droite S avec le plan P . Car par ce point passent, comme nous avons vu,

$$m_1 m_2 [3(r_1 + r_2) - 5]$$

droites T_{12} dont chacune touche m_3 surfaces R_3 au point q . Les plans tangents de ces surfaces en q rencontrent S en les points B qui viennent d'être placés au point s où se trouvent

$$m_1 m_2 [3(r_1 + r_2) - 5]$$

points A , néanmoins les plans tangents ne sont pas communs à toutes les trois surfaces. Donc:

Les points de contact de trois surfaces R_1, R_2, R_3 d'ordre r_1, r_2, r_3 prises une à une dans trois faisceaux $(R_1), (R_2), (R_3)$ de la deuxième dimension et d'indices m_1, m_2, m_3 , engendrent une surface d'ordre

$$m_1 m_2 m_3 [3(r_1 + r_2 + r_3) - 8].$$

Ce théorème renferme beaucoup d'autres comme cas particuliers, dont nous avons déjà considéré quelques uns.

89. Supposons que $(R_1), (R_2), (R_3)$ soient les faisceaux de plans, c'est-à-dire qu'ils soient les surfaces enveloppes $(R_1), (R_2), (R_3)$ des classes m_1, m_2, m_3 . Il est visible que

$$3(r_1 + r_2 + r_3) - 8 = 1$$

et la surface de contact se décompose en des plans. Nous obtenons le théorème:

Trois surfaces enveloppes $(R_1), (R_2), (R_3)$ respectivement de la classe m_1, m_2, m_3 ont $m_1 m_2 m_3$ plans tangents communs.

90. Supposons que deux des faisceaux donnés sont les surfaces enveloppes des classes m_2, m_3 ; le théorème général peut être énoncé ainsi:

Les points de contact des surfaces R_1 d'ordre r_1 d'un faisceau (R_1) de la deuxième dimension et d'indice m_1 avec les plans tangents communs à deux surfaces enveloppes $(R_2), (R_3)$ des classes m_2, m_3 engendrent une surface d'ordre

$$m_1 m_2 m_3 (3r_1 - 2).$$

Quand les deux surfaces $(R_2), (R_3)$ deviennent deux points, nous obtenons le théorème connu:

Les points de contact des plans passant par une droite avec les surfaces R_1 d'ordre r_1 d'un faisceau (R_1) de la deuxième dimension et d'indice m_1 engendrent une surface d'ordre

$$m_1 (3r_1 - 2).$$

91. Quand l'un des faisceaux donnés devient une surface enveloppe, le théorème général peut être énoncé ainsi:

Les points de contact des surfaces R_2, R_3 d'ordres r_2, r_3 des deux

faisceaux (R_2) (R_3) de la deuxième dimension et d'indices m_2, m_3 avec les plans tangents d'une surface enveloppe (R_1) de la classe m_1 engendrent une surface d'ordre

$$m_1 m_2 m_3 [3(r_2 + r_3) - 5].$$

La surface (R_1) étant un point, nous obtenons le théorème connu d'ailleurs:

En déterminant les points de contact des surfaces R_2 d'ordre r_2 d'un faisceau (R_2) de la deuxième dimension et d'indice m_2 avec les surfaces R_3 d'ordre r_3 d'un faisceau (R_3) de la deuxième dimension et d'indice m_3 de telle sorte que ces points sont situés sur une droite arbitraire Q , les plans tangents communs à ces surfaces en ces points enveloppent une surface développable de la classe

$$m_2 m_3 [3(r_2 + r_3) - 5].$$

92. Considérons enfin le cas quand les trois faisceaux vont se confondre en un seul faisceau.

Il est clair que nous pouvons conserver la même marche dans la démonstration comme dans le cas général, seulement il faut poser

$$m_2 = m - 1, \quad m_3 = m - 1 \quad \text{et} \quad r_1 = r_2 = r_3 = r.$$

Nous obtenons le théorème:

Les points de contact des trois surfaces d'ordre r d'un faisceau (R) de la deuxième dimension et d'indice m engendrent une surface d'ordre

$$m(m-1)^2(9r-8).$$

On voit aisément que cette surface consiste en deux parties, savoir: en la surface enveloppe et en la surface de contact.

Quand $r=1$ ou, en d'autres termes, quand le faisceau (R) devient une surface enveloppe de la $m^{\text{ième}}$ classe, nous avons le théorème bien connu:

Une surface enveloppe de la $m^{\text{ième}}$ classe est d'ordre $m(m-1)^2$.

Cette valeur renferme aussi les plans tangents multiples regardés comme la surface de contact du faisceau donné.

X. Sur le contact des deux faisceaux de la deuxième dimension avec un faisceau de la première dimension.

93. Considérons un faisceau (R_1) de la première dimension et deux faisceaux (R_2) , (R_3) de la deuxième dimension. Nous allons démontrer que sur un plan quelconque Q il y a un certain nombre fini de points en lesquels se touchent trois surfaces, prises une à une dans chacun des faisceaux donnés.

Pour cet effet prenons une droite arbitraire S et considérons un point q sur Q , en lequel se touchent deux surfaces R_1, R_2 ; leurs plan tangent commun en ce point soit T_{12} qui rencontre Q en une droite τ_{12} tangente à m_3 surfaces R_3 en q . Désignons les plans tangents de R_3 en q par T_3 . Les plans T_{12}, T_3 rencontrent la droite S respectivement en les points A, B . Quand ces points se confondent, q est le point demandé.

Par un point quelconque A sur S passent

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1)]$$

plans qui jouissent de telle propriété qu'une surface R_1 et une surface R_2 les touchent en un point du plan Q . Nous obtenons ainsi en ces points q une à une droite τ_{12} , dont chacune touche m_3 surfaces R_3 en le point correspondant q . De là suit que:

à un point A correspondent

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1)]$$

points B .

Prenons sur S un point B et considérons un point q en lequel se touchent deux surfaces R_1, R_2 dont le plan tangent T_{12} en ce point rencontre Q en une droite τ_{12} . Il y a m_3 surfaces R_3 qui touchent la droite qB au point q et leurs plans tangents en ce point rencontrent Q en les droites τ_3 . Quand la droite τ_{12} coïncide avec τ_3 , le plan T_{12} rencontre la droite S en le point A qui correspond au point B pris à volonté.

Supposons que la droite τ_{12} rencontre une droite arbitraire P du plan Q en un point A_1 et la droite τ_3 rencontre la même droite en B_1 . Considérons un tel point A_1 . Par ce point passent

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1)]$$

plans T_{12} qui déterminent sur Q les points q , dont chacun détermine avec B une droite tangente aux m_3 surfaces R_3 en le point q . Ces surfaces déterminent les droites τ_3 et celles-ci les points B_1 . Ainsi:

à un point A_1 correspondent

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1)]$$

points B_1 .

Prenons sur P un point B_1 . Par la droite BB_1 passent les plans qui touchent la surfaces R_3 en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_3(3r_3 - 2)$. La surface des points de contact des faisceaux $(R_1), (R_2)$ est d'ordre

$$m_1 m_2 (2r_1 + 3r_2 - 4).$$

Ces deux surfaces rencontrent le plan Q en

$$m_1 m_2 m_3 (3r_3 - 2)(2r_1 + 3r_2 - 4)$$

points dont chacun offre un point A_1 . Donc:

à un point B_1 correspondent

$$m_1 m_2 m_3 (3r_3 - 2)(2r_1 + 3r_2 - 4)$$

points A_1 .

Seulement tous les points A_1 coïncidents avec B_1 n'offrent pas les points A . La surface de contact des deux faisceaux (R_1) , (R_2) rencontre P en

$$m_1 m_2 (2r_1 + 3r_2 - 4)$$

points, dont les droites correspondantes τ_1 , τ_3 ne coïncident pas, quoique le point A_1 se réunit avec B_1 . Ainsi:

à un point A correspondent

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1) + 3(2r_1 + 3r_2 - 4)(r_3 - 1)]$$

points B .

Mais il y a entr'eux encore des points pour lesquels le plan T_{12} est différent du plan T_3 , quoique les points A , B coïncident. Par le point d'intersection s de la droite S avec Q passent

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1) + 3(2r_1 - 1)(r_2 - 1)]$$

plans T_{12} . Chacune de leurs droites τ_{12} touche m_3 surfaces R_3 en le point correspondant q . Les plans T_3 déterminés par ces surfaces passent aussi par le points s . Nous voyons donc que les points A , B coïncident en s , pendant que les plans T_{12} et T_3 sont différents. Il y a ainsi

$$m_1 m_2 m_3 [9r_2 r_3 + 6(r_2 + r_3)(r_1 - 2) + 3r_1^2 - 16r_1 + 16]$$

points A coïncidents avec leurs points correspondants B . Nous pouvons donc dire:

Les points de contact des trois faisceaux R_1 , R_2 , R_3 d'ordre r_1 , r_2 , r_3 prises une à une dans les faisceaux (R_1) , (R_2) de la deuxième dimension et d'indices m_2 , m_3 et dans le faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 , engendrent une courbe d'ordre

$$m_1 m_2 m_3 [9r_2 r_3 + 6(r_2 + r_3)(r_1 - 2) + 3r_1^2 - 16r_1 + 16].$$

94. Ce théorème renferme de nouveau comme cas particuliers quelques uns des théorèmes que nous avons obtenus ailleurs.

Supposons que (R_1) est un faisceau de plans de la première dimension et du premier indice, c'est-à-dire il est un faisceau de plans passant par une

droite ou $r_1 = 1$, $m_1 = 1$. S étant une surface d'ordre s , nous obtenons ce théorème connu:

Les plans tangents aux surfaces R_2 en les points d'une surface S , en lesquels les touchent les surfaces R_3 enveloppent une surface de la classe

$$m_2 m_3 s [9r_2 r_3 - 6(r_2 + r_3) + 3].$$

Supposons que (R_3) soit un faisceau de plans passant par un point a ; nous avons le théorème:

Les plans tangents aux surfaces R_2 d'un faisceau de la deuxième dimension en les points d'une surface S , en lesquels les touchent les surfaces R_1 d'un faisceau (R_1) de la première dimension, enveloppent une surface développable de la classe

$$s m_1 m_2 (3r_1^2 - 10r_1 + 6r_1 r_2 - 3r_2 + 4).$$

Supposons que (R_1) est un faisceau de plans de la première dimension, donné par deux points a , b et (R_3) est un faisceau de plans passant par un point c . La surface de contact de ces deux faisceaux est un plan. Les surfaces R_2 le touchent en des points qui engendrent une courbe d'ordre

$$3m_2(r_2 - 1),$$

c'est le résultat obtenu dans la première partie.

95. Nous pouvons déduire du théorème général encore un autre théorème connu. (R_2) , (R_3) soient les faisceaux des plans donnés respectivement par les points a , b .

Les surfaces R_1 touchent les plans communs aux faisceaux (R_2) , (R_3) , (les plans passant par la droite ab), en des points qui engendrent une courbe d'ordre

$$m_1(3r_1^2 - 4r_1 + 1).$$

Ce qui est d'accord avec un résultat obtenu ailleurs.

XI. Sur le contact des deux faisceaux de la première dimension avec un faisceau de la deuxième dimension.

96. Soient (R_1) , (R_3) deux faisceaux de la première dimension et (R_2) un faisceau de la deuxième dimension. Nous allons déterminer les points en lesquels se touchent trois surfaces prises une à une dans les faisceaux donnés.

Pour cet effet prenons deux droites quelconques P , S . Par un point arbitraire s sur S passent, d'après ce qui précède, (c) plans qui jouissent de telle

propriété qu'ils touchent les surfaces R_1 en leurs points de rencontre t avec les surfaces R_3 .

Considérons un tel point t . Il y a m_2 surfaces R_2 qui touchent la droite st au point t . Désignons leurs plans tangents en ce point par T_2 et les points de rencontre de ces plans avec P par B . Le plan tangent T_{13} aux surfaces R_1 , R_3 en t coupe la droite P en le point A . Quand ce point coïncide avec son point correspondant B , le point t occupe la position demandée.

Par un point quelconque A sur P passent (*) (α) plans T_{13} qui déterminent autant de points t , et chaque droite At touche m_2 surfaces R_2 en t . Ainsi:

à un point A correspondent

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(2r_3 - 1)(3r_1 - 1) + (r_3 - 1)(2r_1 - 1)(3r_3 - 1) - (2r_1 - 1)(2r_3 - 1) + 1]$$

points B .

Prenons sur P un point B . Une droite Bt touche m_2 surfaces R_2 en t et nous obtenons autant de plans T_2 qui rencontrent la droite S en les points B_1 . Le plan tangent T_{13} au point t coupe S en A_1 . Quand ce point coïncide avec B_1 , le plan T_{13} détermine sur P un point A correspondant au point B pris à volonté.

Par un point A_1 sur S passent (α) plans tangents T_{13} . Chaque droite tB touche m_2 surfaces R_2 en t , et leurs plans tangents en ce point déterminent les points B_1 .

A un point A_1 correspondent donc

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(2r_3 - 1)(3r_1 - 1) + (r_3 - 1)(2r_1 - 1)(3r_3 - 1) - (2r_1 - 1)(2r_3 - 1) + 1]$$

points B_1 .

Prenons sur S un point arbitraire B_1 . Par la droite BB_1 passent des plans qui touchent les surfaces R_2 en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_2(3r_2 - 2)$ rencontrant la courbe de contact des faisceaux (R_1) , (R_3) , qui est d'ordre

$$m_1 m_3 [3(r_1 - r_3)^2 + 2(r_1 r_3 - 1)],$$

en des points t . Ces points offrent les plans T_{13} qui déterminent les points A_1 . Ainsi:

à un point B_1 correspondent

$$m_1 m_2 m_3 (3r_2 - 2) [3(r_1 - r_3)^2 + 2(r_1 r_3 - 1)]$$

points A_1 .

(*) Voir la première partie, tome XIV, p. 98.

De là suit que :

à un point B correspondent

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(2r_3 - 1)(3r_1 - 1) + (r_3 - 1)(2r_1 - 1)(3r_3 - 1) \\ - (2r_1 - 1)(2r_3 - 1) + 3(3r_2 - 2)(r_1 - r_3)^2 + 2(3r_2 - 2)(r_1 r_3 - 1) + 1]$$

points A .

A l'aide de ces résultats nous pouvons déterminer le nombre de points coïncidents A , B qui offrent les points demandés. Seulement il y a entr'eux des points singuliers qui ne correspondent pas à la solution. Déterminons ces points.

Quand la droite st rencontre P , les points A , B coïncident en leur point d'intersection, et les plans T_{13} , T_2 ne se réunissent pas. Déterminons telles positions de la droite st .

Pour cet effet considérons la surface suivante. Par un point s de S passent (c) plans T_{13} et sur chacun d'eux se trouve un point de contact t . La jonction de ce point avec s engendre une surface (st) , quand le point s parcourt la droite S . Cherchons l'ordre de cette surface.

On voit immédiatement que par un point quelconque de la droite S passent (c) droites st , ou, en d'autres termes, que la droite S est une ligne multiple d'ordre (c) sur la surface (st) .

Faisons passer par la droite S un plan arbitraire qui rencontre la courbe de contact des faisceaux (R_1) , (R_2) en

$$m_1 m_3 [3(r_1 - r_3)^2 + 2(r_1 r_3 - 1)]$$

points t , dont chacun détermine une droite st située sur ce plan. La surface auxiliaire est par conséquent d'ordre

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(2r_2 - 1)(3r_1 - 1) + (r_2 - 1)(2r_1 - 1)(3r_2 - 1) \\ + (2r_1 - 1)(2r_2 - 1) + 1] + m_1 m_3 [3(r_1 - r_3)^2 + 2(r_1 r_3 - 1)]$$

et rencontre la droite P en autant de points; en chacun d'eux coïncide un point A avec m_2 points B . Ainsi :

Étant donnés deux faisceaux (R_1) , (R_3) de la première dimension et d'indices m_1 , m_3 et un faisceau (R_2) de la deuxième dimension et d'indice m_2 , il y a

$$m_1 m_2 m_3 [(r_1 - 1)(2r_3 - 1)(3r_1 - 1) + (r_3 - 1)(2r_1 - 1)(3r_3 - 1) \\ - (2r_1 - 1)(2r_3 - 1) + 3\{3(r_1 - r_3)^2 + 2(r_1 r_3 - 1)\}(r_2 - 1) + 1]$$

points, en lesquels se touchent trois surfaces R_1 , R_2 , R_3 , prises une à une dans chacun des faisceaux donnés.

97. Considérons quelques cas particuliers du théorème précédent.

Supposons que (R_2) soit un faisceau de plans d'indice 1, où qu'il soit un faisceau de plans passant par une droite. Nous obtenons le théorème:

Les surfaces d'un faisceau (R_2) de la deuxième dimension et d'indice m_2 touchent les surfaces d'un autre faisceau (R_1) de la première dimension et d'indice m_1 en des points; leurs plans tangents communs en ces points enveloppent une surface de la classe

$$m_1 m_2 [(r_1 - 1)(3r_1 - 1)(3r_2 - 2) - 2(r_1 - 1)];$$

ce qu'on peut démontrer d'une autre manière.

Supposons que $r_2 = 1$, $m_2 = 1$, c'est-à-dire que (R_2) soit un faisceau de plans passant par un point a ; nous parviendrons au théorème (c).

Quand $m_3 = 1$, $r_3 = 1$ et $m_2 = 1$, $r_2 = 1$, nous avons ce théorème connu:

Dans un faisceau de la première dimension et d'indice m_1 il y a

$$3m_1(r_1 - 1)^2$$

surfaces d'ordre r_1 qui touchent un plan donné.

XII. Surface tangentielle des trois faisceaux de la deuxième dimension.

98. La surface de contact des trois faisceaux donnés coupe une surface S d'ordre s en une courbe Σ . En menant les plans tangents communs à ces surfaces aux points de la courbe Σ , ces plans enveloppent une surface développable dont la classe nous allons déterminer.

Cherchons le nombre de plans tangents T_{123} qui passent par un point arbitraire a . Considérons un point σ sur S , en lequel se touchent deux surfaces R_1 , R_2 de telle manière que leur plan tangent commun en ce point passe par a . La droite $a\sigma$ touche m_3 surfaces R_3 en σ , dont les plans tangents en ce point nous allons désigner par T_3 . Ces plans rencontrent une droite quelconque P en les points B et les plans correspondants T_2 en A . Quand le point A coïncide avec B , le point σ offre un plan T_{123} passant par a .

Prenons un point A sur P . Le point en lequel se touchent à la fois une surface R_1 , une surface R_2 et un plan passant par la droite aA engendre une courbe d'ordre

$$m_1 m_2 [9r_1 r_2 - 6(r_1 + r_2) + 3],$$

qui perce la surface S en des points qui offrent les plans T_3 et par conséquent

aussi les points B . Ainsi:

à un point A correspondent

$$m_1 m_2 m_3 s [9r_1 r_2 - 6(r_1 + r_2) + 3]$$

points B .

Prenons sur P un point B . Les plans qui passent par la droite aB et touchent les surfaces R_3 ont leurs points de contact sur une surface d'ordre $m_3(3r_3 - 2)$. Les points de contact d'une surface R_1 avec une surface R_2 et avec le plan passant par a engendrent une surface d'ordre

$$m_1 m_2 [3(r_1 + r_2) - 5].$$

Ces deux surfaces rencontrent S en

$$m_1 m_2 m_3 s (3r_3 - 2) [3(r_1 + r_2) - 5]$$

points qui fournissent les points A . Donc:

à un point B correspondent

$$m_1 m_2 m_3 s (3r_3 - 2) [3(r_1 + r_2) - 5]$$

points A .

Entre les points coïncidents A , B se trouvent aussi tels qui ne correspondent pas à la solution.

Considérons un plan passant par a qui touche une surface R_1 et une surface R_2 en le même point. Quand le plan considéré pivote autour a , ce point de contact engendre une surface d'ordre

$$m_1 m_2 [3(r_1 + r_2) - 5],$$

qui rencontre le plan P et la surface S en des points singuliers. Ainsi:

Trois surfaces R_1 , R_2 , R_3 d'ordres r_1 , r_2 , r_3 prises une à une dans trois faisceaux de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 , m_3 se touchent en un point situé sur une surface S d'ordre s ; le plan tangent T_{123} commun à ces trois surfaces enveloppe une surface développable de la classe

$$3m_1 m_2 m_3 s [3(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) - 5(r_1 + r_2 + r_3) + 6]. \quad (d)$$

99. Pour abréger, nous ne voulons pas faire mention de cas particuliers contenus dans le théorème précédent. Seulement nous le pouvons regarder aussi d'un autre point de vue, savoir: les plans passant par le point a forment un faisceau de la deuxième dimension et d'indice 1 de surfaces du premier ordre. Le lieu de contact de tels quatre faisceaux de la deuxième dimension est une courbe.

Nous allons traiter plus loin le cas, quand les éléments de ce quatrième faisceau sont d'ordre supérieur.

XIII. Surface tangentielle des trois faisceaux de la deuxième dimension. (Suite.)

100. Soient donnés trois faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) de la deuxième dimension. Considérons un point t , en lequel se touchent trois surfaces R_1 , R_2 , R_3 prises une à une dans les faisceaux donnés, et puis le plan tangent T_{123} à ces trois surfaces au point t . Tous les points t offrent des plans qui enveloppent une surface dont la classe nous pouvons déterminer, en trouvant le nombre de plans T_{123} passant par deux points arbitraires a , b .

Supposons qu'une surface R_1 , une surface R_2 et un plan passant par la droite ab se touchent en un point qui engendre une courbe d'ordre

$$m_1 m_2 [9r_1 r_2 - 6(r_1 + r_2) + 3].$$

Il faut déterminer le nombre de points de cette courbe situés sur la droite ab . Pour cet effet prenons une droite arbitraire P et un point quelconque sur ab . Il y a m_1 surfaces R_1 et m_2 surfaces R_2 qui touchent ab en ce point. Les plans tangents T_1 , T_2 , menés à ces surfaces en le même point, rencontrent la droite P respectivement en les points A , B . Quand ces points coïncident, le point pris sur ab est le point demandé.

Prenons un point A sur P . Le plan (Aab) touche $3m_1(r_1 - 1)$ surfaces R_1 en les points de la droite ab et de plus il touche en les mêmes points m_2 surfaces R_2 . Par conséquent à un point A correspondent $3m_1 m_2 (r_1 - 1)$ points B et à un point B correspondent $3m_1 m_2 (r_2 - 1)$ points A . Ainsi:

La courbe de contact rencontre la droite ab en

$$3m_1 m_2 (r_1 + r_2 - 2)$$

points.

Les surfaces R_3 touchent les plans passant par ab en des points qui engendrent, comme on sait, une surface d'ordre $m_3(3r_3 - 2)$, qui rencontre la courbe, dont nous venons de parler, en des points qui correspondent à la solution, seulement il en faut soustraire $3m_1 m_2 m_3 (r_1 + r_2 - 2)$ points d'intersection de la droite ab , parce que la dite surface auxiliaire passe par cette droite. Donc:

Les plans tangents menés en les points de contact des trois surfaces R_1 , R_2 , R_3 d'ordre r_1 , r_2 , r_3 prises une à une dans trois faisceaux de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 , m_3 , à ces surfaces, ces plans enveloppent une surface de la classe

$$9m_1 m_2 m_3 [3r_1 r_2 r_3 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + r_1 + r_2 + r_3]. \quad (e)$$

XIV. Contact des quatre faisceaux de la deuxième dimension.

101. Considérons quatre faisceaux $(R_1), (R_2), (R_3), (R_4)$ de la deuxième dimension et d'indices m_1, m_2, m_3, m_4 de surfaces d'ordre r_1, r_2, r_3, r_4 et puis un plan arbitraire Q et une droite quelconque S .

Soit q le point du plan Q en lequel se touchent trois surfaces R_1, R_2, R_3 prises une à une dans les faisceaux donnés. Leur plan tangent commun T_{123} au point q rencontre S en un point A . Le plan T_{123} coupe le plan Q en une droite τ_{123} qui touche m_4 surfaces R_4 au point q . Les plans tangents T_4 de ces surfaces en q rencontrent S en des points B .

Quand le point A coïncide avec son point correspondant B , les plans T_{123}, T_4 se confondent de même et q est le point demandé.

Prenons sur S un point arbitraire A par lequel passent (d) plans T_{123} dont chacun détermine un point q et une droite τ_{123} en ce point. Cette droite touche m_4 surfaces R_4 en q et leurs plans tangents en ce point déterminent les points B . Ainsi:

à un point A correspondent

$$3m_1m_2m_3m_4[3(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) - 5(r_1 + r_2 + r_3) + 6]$$

points B .

Prenons une droite P sur le plan Q et un point quelconque B sur S . Considérons de nouveau le point q en lequel se touchent trois surfaces, dont le plan tangent T_{123} en ce point rencontre P en un point A_1 . La droite qB touche m_4 surfaces R_4 en q , dont les plans tangents en ce point rencontrent P en les points B_1 . Par un point quelconque A_1 sur P passent (d) plans T_{123} dont chacun contient un point q et la droite qB touche m_4 surfaces R_4 .

A un point A_1 correspondent donc

$$3m_1m_2m_3m_4[3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3) - 5(r_1 + r_2 + r_3) + 6]$$

points B_1 .

Prenons un point B_1 sur P . Par la droite BB_1 passent des plans qui touchent les surfaces R_4 en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_4(3r_4 - 2)$. Cette surface rencontre la surface de contact d'autres trois faisceaux en une courbe déterminant sur Q les points q qui offrent les points A_1 . Alors:

à un point B_1 correspondent

$$m_1m_2m_3m_4(3r_4 - 2)[3(r_1 + r_2 + r_3) - 8]$$

points A_1 .

La surface de contact des faisceaux $(R_1), (R_2), (R_3)$ rencontre la droite P en des points qui n'offrent pas les points A , parce que τ_4 ne coïncide pas avec la droite τ_{123} quoique A_1 se réunit avec B_1 . Il y a donc

$$m_1 m_2 m_3 m_4 [3(r_1 + r_2 + r_3) - 8]$$

points qui ne correspondent à la solution. Ainsi:

à un point B correspondent

$$m_1 m_2 m_3 m_4 [9(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) - 24(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + 42]$$

points A .

Par le point d'intersection s de la droite S avec Q passent $\frac{1}{s}$ (d) plans T_{123} .

Les droites τ_{123} de ces plans touchent m_4 surfaces R_4 en les points q de telle sorte que les plans T_4 passent par le point s sans que T_4, T_{123} coïncident.

Nous avons donc le théorème:

Quatre surfaces R_1, R_2, R_3, R_4 d'ordres r_1, r_2, r_3, r_4 prises une à une dans quatre faisceaux de la deuxième dimension et d'indices m_1, m_2, m_3, m_4 se touchent en les points qui engendrent une courbe d'ordre

$$\begin{aligned} & 3m_1 m_2 m_3 m_4 [3(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) \\ & \quad - 8(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + 14]. \end{aligned} \quad (f)$$

XV. Contact des trois faisceaux de la deuxième dimension et d'un faisceau de la première dimension.

102. Soit donné un faisceau (R_1) de la première dimension, d'indice m_1 et trois faisceaux $(R_2), (R_3), (R_4)$ de la deuxième dimension et d'indices m_2, m_3, m_4 ; les surfaces qui forment ces faisceaux sont respectivement d'ordre r_1, r_2, r_3, r_4 .

Cherchons les points en lesquels se touchent à la fois quatre surfaces R_1, R_2, R_3, R_4 prises une à une dans les faisceaux donnés.

Prenons deux droites arbitraires P, S et un point quelconque s sur S . Considérons un plan passant par le point s , qui touche trois surfaces R_2, R_3, R_4 en un même point, ce point engendre une courbe d'ordre

$$3m_2 m_3 m_4 [3(r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) - 5(r_2 + r_3 + r_4) + 6],$$

quand le plan tangent pivote sur le point s . Le même plan touche les surfaces R_1 en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_1(2r_1 - 1)$.

Cette surface rencontre la courbe, dont nous venons de parler, en des points que nous allons désigner par q . Le plan tangent T_i mené en un point q à R_i rencontre P en un point A et le plan tangent commun T_{234} aux surfaces R_2, R_3, R_4 en le même point q coupent P en les points B .

Quand deux points A, B coïncident, le point q est le point demandé. Prenons un point A sur P et considérons un point q en lequel se touchent trois surfaces R_2, R_3, R_4 ; le plan tangent T_{234} commun à ces surfaces en ce point rencontre S en un point B_1 , et le plan tangent T_i en q à la surface R_i passant par le point q coupe la droite S en un point A_i . Quand le point A_i se réunit avec B_1 , le plan T_{234} offre le point B .

Un point quelconque A_i sur S détermine avec A une droite AA_i , par laquelle passent des plans qui touchent les surfaces R_i en des points qui engendrent une courbe d'ordre

$$m_i(r_i - 1)(3r_i - 1).$$

Cette ligne rencontre la surface de contact des autres trois faisceaux en des points qui offrent des plans T_{234} déterminant les points B_1 . Ainsi:

à un point A_i correspondent

$$m_1 m_2 m_3 m_4 (r_1 - 1)(3r_1 - 1)[3(r_2 + r_3 + r_4) - 8] \quad (g)$$

points B_1 .

Prenons un point B_1 sur S les points de contact des plans passant par B_1 et tangent à la fois à trois surfaces R_2, R_3, R_4 engendrent une courbe qui perce la surface de contact des faisceaux $(A), (R_i)$ en des points qui fournissent les plans T_i déterminant les points A_i .

De là suit que:

à un point B_1 correspondent

$$3m_1 m_2 m_3 m_4 (2r_1 - 1)[3(r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) - 5(r_2 + r_3 + r_4) + 6] \quad (h)$$

points A_i .

De plus:

à un point A correspondent $(g) + (h)$ points B .

Considérons un point B sur P et un point A_i sur S . La surface de contact du faisceau (A_i) de plans avec (R_i) rencontre la courbe de contact des faisceaux $(B), (R_2), (R_3), (R_4)$ en des points qui offrent les points B_1 . Donc:

à un point A_i correspondent (h) points B_1 .

Prenons sur S un point B_1 . Par la droite BB_1 passent

$$9m_2 m_3 m_4 [3r_2 r_3 r_4 - 2(r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4) + r_2 + r_3 + r_4] \quad (i)$$

plans tangents à la fois à trois surfaces R_2, R_3, R_4 . Par chacun de leurs points de contact passent m_1 surfaces R_1 dont les plans tangents déterminent les points A_1 .

*A un point B_1 correspondent donc $m_1(i)$ points A_1 ,
et par conséquent:*

à un point B correspondent $(h) + m_1(i)$ points A .

Afin que nous trouvions les points en lesquels coïncident les points A, B et qui néanmoins ne correspondent pas à la solution, nous allons nous servir de la surface suivante.

En prenant sur S un point s nous obtenons un faisceau (s) de plans, qui détermine avec les faisceaux $(R_2), (R_3), (R_4)$ une courbe de contact d'ordre connu et avec le faisceau (R_1) une surface de contact. Ces deux figures se rencontrent en des points p dont les jonctions avec s sont les génératrices de la surface auxiliaire (ps) . On voit que la droite S est une ligne multiple d'ordre (d) sur cette surface.

Déterminons le nombre de génératrices de cette surface, qui sont situées sur un plan arbitraire passant par la droite S . Supposons que les plans T_1, T_{234} rencontre cette droite respectivement en des points A_1, B_1 . Nous trouvons que:

à un point B_1 correspondent $m_1(d)$ points A_1 ,

et

à un point A_1 correspondent

$$m_1 m_2 m_3 m_4 (2r_1 - 1) [3(r_2 + r_3 + r_4) - 8]$$

points B_1 .

Seulement il y a

$$m_1 m_2 m_3 m_4 [3(r_2 + r_3 + r_4) - 8]$$

points qui ne correspondent pas à la solution quoique les points A_1, B_1 coïncident.

De là suit que sur un plan passant par S se trouvent encore

$$m_1(d) + 2m_1 m_2 m_3 m_4 (r_1 - 1) [3(r_2 + r_3 + r_4) - 8]$$

droites de la surface (ps) dont l'ordre est ainsi déterminé. Cette surface rencontre la droite P en des points, en lesquels coïncident les points A, B sans qu'ils correspondent à la solution. Nous pouvons donc dire que:

il y a

$$3m_1 m_2 m_3 m_4 \left\{ 9r_1 r_2 r_3 - 6(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + 3(r_1 + r_2 + r_3) + (r_1 - 1) \right. \\ \left. \times [6(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) - 10(r_1 + r_2 + r_3) + 12 + (r_1 - 1) \{ 3(r_1 + r_2 + r_3) - 8 \}] \right\}$$

points en lesquels se touchent quatre surface prises une à une dans trois faisceaux de la deuxième dimension et dans un faisceau de la première dimension.

XVI. Surface tangentielle des quatre faisceaux de la deuxième dimension.

103. Supposons que soient donnés quatre faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 , m_3 , m_4 . Les points en lesquels se touchent à la fois quatre surfaces prises une à une dans les faisceaux donnés engendrent une courbe; les plans tangents T_{1234} communs à ces surfaces en ces points enveloppent une surface développable. Déterminons le nombre de plans T_{1234} passant par un point arbitraire a .

Considérons un point q en lequel se touchent trois surfaces R_1 , R_2 , R_3 et leur plan tangent T_{123} en ce point passe par a . La droite aq touche m_4 surfaces R_4 en q et les plans tangents T_4 de ces surfaces menés en ce point rencontrent une droite arbitraire S en des points A ; les plans T_{123} la coupent en des points B . Quand les points A , B coïncident, le point q offre le plan demandé T_{1234} .

Prenons sur S un point A . La surface de contact du faisceau (R_4) et du faisceau de plans passant par la droite aA est d'ordre $m_4(3r_4 - 2)$. Les points de contact des plans passant par le point a avec les surfaces R_1 , R_2 , R_3 engendrent une courbe d'ordre

$$3m_1m_2m_3[3(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) - 5(r_1 + r_2 + r_3) + 6]$$

qui perce la surface précédente en des points, desquels on peut déduire les points B .

Ainsi:

à un point A correspondent

$$3m_1m_2m_3m_4(3r_4 - 2)[3r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3] - 5(r_1 + r_2 + r_3) + 6]$$

points B .

En prenant un point B sur S , par la droite aB passent

$$9m_1m_2m_3[3r_1r_2r_3 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + r_1 + r_2 + r_3]$$

plans T_{123} . Leurs points de contact q avec les trois surfaces R_1 , R_2 , R_3 déterminent autant de droites aq dont chacune touche m_4 surfaces R_4 en q .

A un point B correspondent donc

$$9m_1m_2m_3[3r_1r_2r_3 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + r_1 + r_2 + r_3]$$

points A .

Seulement tous les points coïncidents A , B ne correspondent pas à la solution. Le plan αS rencontre le courbe de contact du faisceau de plans passant par α avec le faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) en des points qui fournissent les plans T_4 rencontrant S en les même points comme T_{123} , sans que ces plans se confondent. Il s'ensuit que:

Quatre surfaces R_1 , R_2 , R_3 , R_4 respectivement d'ordre r_1 , r_2 , r_3 , r_4 prises une à une dans les faisceaux donnés (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 , m_3 , m_4 se touchent en un point; le plan tangent en ce point à ces surfaces enveloppe une surface développable de la classe

$$\left. \begin{aligned} &9m_1m_2m_3m_4[3(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) \\ &- 5(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) + 6(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) - 6]. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

XVII. Contact des cinq faisceaux de la deuxième dimension.

104. Il nous reste encore à examiner le contact des cinq faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) , (R_5) , de la deuxième dimension et d'indices m_1 , m_2 , m_3 , m_4 , m_5 . Nous allons démontrer qu'il y a un certain nombre fini de points en lesquels se touchent à la fois cinq surfaces R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 d'ordres r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , r_5 prises une à une dans chacun de ces faisceaux donnés.

Pour cet effet, prenons deux droites arbitraires P , S . Par un point quelconque sur S passent (k) plans T_{1234} dont chacun contient un point q en lequel se touchent quatre surfaces prises une à une dans les faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) , T_{1234} étant leur plan tangent commun en q . La droite qs touche m_5 surfaces R_5 en q ; leurs plans tangents T_5 en ce point rencontrent P en des points A et les plans T_{1234} la coupent en B . Quand les points A , B se réunissent, le point q est le point désiré.

Prenons sur P un point A . Soit p le point en lequel se touchent les surfaces des premiers quatre faisceaux donnés; leur plan tangent commun T_{1234} en ce point rencontre S en un point B_1 . La droite Ap touche un certain nombre de surfaces R_5 en p ; leurs plans tangents en ce point rencontrent S en des points A_1 . Quand le point A_1 coïncide avec B_1 , le plan T_{1234} offre le point B correspondant au point A .

Prenons un point A_1 . Les plans passant par la droite AA_1 touchent les surfaces R_5 en des points qui engendrent une surface d'ordre $m_5(3r_5 - 2)$ rencontrant la courbe de contact des faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) en des points p qui fournissent les plans T_{1234} et ceux-ci les points B_1 .

En prenant un point B_1 sur S , il y a (k) plans T_{1234} qui passent par ce point et déterminent les points p . Chaque droite pA touche m_5 surfaces R_5 en p .

A un point A correspondent donc

$$3m_1m_2m_3m_4m_5(3r_5 - 2)[3(r_1r_2 + \dots + r_3r_4) - 8(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + 14] \\ + 9m_1m_2m_3m_4m_5[3(r_1r_2r_3 + \dots + r_2r_3r_4) \\ - 5(r_1r_2 + \dots + r_3r_4) + 6(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) - 6]$$

points B.

Par un point arbitraire B sur P passe un certain nombre de plans T_{1234} ; sur chacun d'eux se trouve un point q . Chaque ce plan rencontre la droite S en un point s . La droite qs touche m_5 surfaces R_5 en q . De là suit que:

à un point B correspondent

$$9m_1m_2m_3m_4m_5[3(r_1r_2r_3 + \dots + r_2r_3r_4) \\ - 5(r_1r_2 + \dots + r_3r_4) + 6(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) - 6]$$

points A.

Quand la droite qs rencontre P , le point A coïncide avec B sans que le plan T_5 se confonde avec T_{1234} . Il faut donc déterminer le nombre de ces points de rencontre.

Pour cet effet, déterminons l'ordre de la surface (qs) . Le nombre de droites qs , passant par un point arbitraire s , est égal au nombre de plans T_{1234} passant par le même point. La multiplicité de la droite S sur la surface (qs) est égal à ce nombre. Un plan quelconque passant par la droite S rencontre la courbe de contact des faisceaux (R_1) , (R_2) , (R_3) , (R_4) en des points qui fournissent les droites qs contenues dans ce plan. Il y a donc

$$3m_1m_2m_3m_4m_5[9(r_1r_2r_3 + \dots + r_2r_3r_4) - 12(r_1r_2 + \dots + r_3r_4) \\ + 10(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) - 4]$$

points en lesquels le point A coïncide avec B et qui ne correspondent pas à la solution. Nous avons le théorème:

Il y a

$$9m_1m_2m_3m_4m_5[3(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + r_1r_3r_4 + r_1r_3r_5 \\ + r_1r_4r_5 + r_2r_3r_4 + r_2r_3r_5 + r_2r_4r_5 + r_3r_4r_5) \\ - 8(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_1r_5 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_2r_5 + r_3r_4 + r_3r_5 + r_4r_5) \\ + 14(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) - 20]$$

points dans l'espace en lesquels se touchent à la fois cinq surfaces prises une à une dans cinq faisceaux donnés de la deuxième dimension.

105. Quand $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 1$, etc., ce nombre est égal à zéro, ce qui exprime la propriété des cinq surfaces enveloppes, qu'elles ne possèdent, en général, aucun plan tangent commun.

Quand $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r$, la formule générale prend la forme

$$9m_1m_2m_3m_4m_5(30r^3 - 80r^2 + 70r - 20).$$

Quand un, deux ou trois des faisceaux deviennent les faisceaux de plans, ils résultent du théorème général les trois théorèmes obtenus ailleurs, savoir:

la classe de la surface développable enveloppée du plan T_{1234} ;

la classe de la surface enveloppée du plan T_{1234} ;

le nombre de points de contact d'un plan en lesquels se touchent à la fois deux à deux surfaces prises une à une dans deux faisceaux de la deuxième dimension.

106. On voit aisément que les surfaces tangentielles sont les cas particuliers d'un faisceau de plans de la première ou de la deuxième dimension, et qu'on peut leurs classes déduire des théorèmes sur le contact.

(Traduit du manuscrit tchèque par les Auteurs.)