Eine Erweiterung des Begriffes „konvexer Körper“.

Von

Hellmuth Kneser in Göttingen.

. In seiner Arbeit über „Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme“¹⁾ definiert Herr Steinitz die konvexe Punktmenge in der projektiven Geometrie des Raumes von n Dimensionen folgendermaßen (Bd. 146, S. 34): „Eine Punktmenge A heißt konvex, wenn von den beiden durch zwei Punkte von A bestimmten Strecken jedesmal die eine ganz zu A gehört und wenigstens eine äußere Ebene (Element vom Index $n - 1$) existiert, d. h. eine solche, die keinen Punkt von A enthält“, und fügt hinzu: „Dieser einschränkende Zusatz ist nötig; sonst würden Punktmengen wie die auf einer Seite einer hyperbolisch gekrümmten Fläche zweiter Ordnung, die von den sonst als konvex bezeichneten Mengen ganz verschieden sind, mit zu diesen gerechnet werden.“

Im folgenden werden auch solche Punktmengen als konvex bezeichnet, bei denen die einschränkende Bedingung nicht erfüllt ist; die, bei denen sie erfüllt ist, mögen „konvex im gewöhnlichen Sinne“ heißen. Obwohl bei dieser Erweiterung die bekannten Schlüsse nicht mehr anwendbar sind, gelten doch einige allgemeine Sätze, mit deren Hilfe sich eine Übersicht über die im Falle $n = 3$ hinzutretenden Arten ergibt, die sich dahin zusammenfassen läßt, daß in der Tat im wesentlichen nur die durch hyperbolisch gekrümmte Flächen zweiter Ordnung bestimmten Punktmengen hinzukommen. Hierin ist der Satz von Herrn C. Juel enthalten, daß jede Regelfläche zweiter Ordnung algebraisch ist²⁾. Einen Satz, der bei etwas schärferen Voraussetzungen genau dem Satze 5 entspricht, beweist Herr B. P. Haalmeyer in seiner Dissertation³⁾.

¹⁾ Journal f. d. r. u. ang. Math. 143, S. 129f.; 144, S. 1f.; 146, S. 1f.

²⁾ Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række 1, Nr. 6.

³⁾ Bijdragen tot de theorie der elementairoppervlakken. Amsterdam 1917.

§ 1.

Allgemeines.

Zunächst ist klar, daß die Komplementärmenge B einer konvexen Punktmenge A ebenfalls konvex ist; denn die Definition läßt sich auch so aussprechen: liegen zwei Punkte von A und zwei von B auf einer Geraden, so dürfen die beiden Punktpaare sich nicht trennen.

Durch vollständige Induktion wird bewiesen:

Satz 1. *Gehören $n + 1$ linear unabhängige Punkte $P_0, P_1, \dots, P_n$ zu der konvexen Punktmenge A , so ist ein jeder von ihnen, z. B. P_0 , Ecke eines n -dimensionalen Simplex, dessen innere Punkte sämtlich zu A gehören. Darin ist enthalten, daß P_0 Häufungspunkt innerer Punkte von A ist⁴⁾.*

Der Satz ist für $n = 1$ richtig; er wird für $n = N - 1$ angenommen und für $n = N$ bewiesen. In der durch $P_1, P_2, \dots, P_N$ bestimmten linearen Mannigfaltigkeit Λ gibt es dann ein $N - 1$ -dimensionales Simplex Σ , dessen innere Punkte zu A gehören; denn der Durchschnitt von Λ und A ist konvex. Die homogenen Koordinaten $x_0 : x_1 : \dots : x_N$ seien so gewählt, daß $x_0 = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$ die Punkte von Σ und $x_0 \neq 0, x_1 = x_2 = \dots = x_N = 0$ den Punkt P_0 kennzeichnet. Ist der Punkt Q mit den Koordinaten $0, \xi_1, \dots, \xi_N$ in Σ enthalten ($\xi_i \geq 0$), so gehören alle Punkte $(x_0 > 0, \xi_1, \dots, \xi_N)$ oder alle Punkte $(x_0 < 0, \xi_1, \dots, \xi_N)$ zu A . Die Punkte Q , von denen das erste gilt, bilden die Menge M_1 ; die, von denen das zweite gilt, die Menge M_2 . M_1 und M_2 bedecken zusammen ganz Σ . Hat M_1 innere Punkte, so gehört ein Simplex P in Σ ganz zu M_1 , das durch $x_0 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_N \geq 0$ dargestellt sei, wobei $y_1, \dots, y_N$ linear unabhängige Linearformen von $x_1, \dots, x_N$ sind. Dann gehört das ganze N -dimensionale Simplex $x_0 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_N \geq 0$ zu A : die Behauptung trifft zu. Hat aber M_1 keinen inneren Punkt, ist M_2 also in Σ überall dicht, so liegen in jedem N -dimensionalen Simplex: $ax_0 + x_1 + \dots + x_N = 0$ ($a \geq 0$), $x_1 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$ die Punkte von A überall dicht. Nach dem für $N - 1$ gültigen Satze 1 kann der Durchschnitt von B mit $ax_0 + x_1 + \dots + x_N = 0$ als konvexe Punktmenge keinen Punkt im Inneren dieses Simplex enthalten (er müßte dann dort innere Punkte haben, A wäre nicht überall dicht); d. h. alle inneren Punkte des Simplex $x_0 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$ gehören zu A . Damit ist der Satz bewiesen.

Hat daher B innere Punkte und erweitert man die konvexe Punktmenge A durch Hinzunahme der nicht in ihr enthaltenen Häufungspunkte

⁴⁾ Wegen der Begriffe Simplex, Umgebung, innerer Punkt, abgeschlossen siehe Steinitz, besonders 146, S. 32f.

zu der abgeschlossenen Punktmenge A' , der *abgeschlossenen Hülle* von A , so hat A' keine anderen inneren Punkte als A ; denn ist P nicht innerer Punkt von A , so ist P Häufungspunkt von Punkten und daher auch von inneren Punkten der konvexen Punktmenge B (Satz 1 wird auf B angewandt), d. h. P ist nicht innerer Punkt von A' .

A' ist ebenfalls konvex⁵⁾. Werde angenommen, es trennen sich auf einer Geraden die Punktepaare P, R und Q, S , und es gehören P und R zu A' , Q und S aber nicht, sind also innere Punkte von B . In jeder Umgebung von P bzw. R gibt es Punkte P_1 bzw. R_1 von A . Wählt man diese Umgebungen genügend eng, so enthält die Gerade $P_1 R_1$ in der Umgebung der inneren Punkte Q und S von B Punkte Q_1 bzw. S_1 von B , die durch P_1 und R_1 getrennt werden. Wäre also A' nicht konvex, so wäre es auch nicht A .

Haben also A und B innere Punkte, so erhält man A aus der abgeschlossenen konvexen Punktmenge A' , indem man einen Teil der Begrenzung von A' wegläßt. Hat aber A (bzw. B) keinen inneren Punkt, so ist A (B) nach Satz 1 in einer linearen Mannigfaltigkeit von weniger als n Dimensionen enthalten; das Problem ist reduziert, da B (A) als Komplementärmenge voll bestimmt ist. Man darf sich also auf den erstgenannten Fall beschränken.

Die konvexe Punktmenge A habe demnach innere Punkte, ebenso die Komplementärmenge B . Die gemeinsame Begrenzung von A und B , d. h. der Durchschnitt der abgeschlossenen konvexen Punkt Mengen A' und B' sei Γ . Gehört eine Strecke PQ einer Geraden g ganz zu Γ , so gehört g ganz zu A' oder ganz zu B' . Denn gehört R auf g zu A' und nicht zu B' , S auf g zu B' und nicht zu A' , ist also R innerer Punkt von A' , S von B' , und werden etwa P und R durch Q und S getrennt, so wählen wir je eine Folge innerer Punkte P_i und Q_i von A' und B' , die bezüglich gegen P und Q konvergieren. Auf der Geraden $P_i Q_i$ liegen für genügend großes i innere Punkte R_i und S_i von A' und B' in der Umgebung von R bzw. S derart, daß P_i und R_i zu A' gehörig, durch Q_i und S_i getrennt sind, die als innere Punkte von B' nicht zu A' gehören. Dies ist aber unmöglich. Enthält daher der Durchschnitt Δ von Γ mit einer linearen Mannigfaltigkeit Λ von l Dimensionen innere Punkte bezüglich Λ , d. h. enthält Δ ein l -dimensionales Simplex Σ , so ist jeder Punkt S von Σ Häufungspunkt innerer Punkte (bezüglich Λ) von Δ . Ist P ein Punkt von Δ außerhalb Σ , so gehört von jeder Geraden PS , die P mit einem inneren Punkte S von Σ verbindet, mindestens eine Strecke PS ganz zu Δ ; denn die Gerade PS hat mit Γ eine (S enthal-

⁵⁾ Vgl. Steinitz, 143, S. 150.

tende) Strecke gemeinsam, gehört also ganz zu A' (bzw. B') und trifft Γ und damit Δ genau in der Strecke, die sie mit B' (A') gemeinsam hat. Genau wie beim Beweise des Satzes 1 folgt daraus, daß es in jeder Umgebung eines Punktes von Δ ein Gebiet in Λ gibt, das von Δ überall dicht und wegen der Abgeschlossenheit von Δ vollständig bedeckt wird. Sind P und Q Punkte von Δ , so gibt es also eine Folge Q_i innerer Punkte von Δ , die nach Q konvergiert. Wie schon bewiesen wurde, muß immer von den beiden Strecken PQ_i , also wegen der Abgeschlossenheit von Δ auch von den beiden Strecken PQ , mindestens eine ganz zu Δ gehören; Δ ist konvex, wenn es innere Punkte bezüglich Λ hat.

Zwei nicht zu Δ gehörige Punkte von Λ lassen sich durch eine Strecke außerhalb Δ verbinden. Jeder Punkt dieser Strecke gehört zu genau einer der Mengen A' und B' ; da diese abgeschlossen sind, gehört die ganze Strecke zu A' und nicht zu B' oder zu B' und nicht zu A' . Zwei Punkte von Λ außerhalb Δ gehören also beide zu A' (oder beide zu B'). Die Punkte von Δ sind A' und B' gemeinsam, und es folgt:

Satz 2. Hat der Durchschnitt Δ der gemeinsamen Begrenzung Γ von A' und B' mit einer 1-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit Λ bezüglich Λ innere Punkte, d. h. enthält Δ ein 1-dimensionales Simplex, so gehört Λ ganz zu A' oder ganz zu B' , und Δ ist konvex.

Es habe Λ nun $n-1$ Dimensionen, sei etwa durch $x_0 = 0$ gegeben. Δ habe in Λ innere Punkte, so daß Λ ganz etwa zu A' gehört. Auf der Geraden g sei E Punkt von Δ , F innerer Punkt von Δ , P kein Punkt von Δ , also in n Dimensionen innerer Punkt von A' . In P , nicht aber in E und F sei $x_n = 0$. Man kann zu E und F je eine Umgebung derart bestimmen, daß die Verbindungsgerade zweier Punkte daraus einen inneren Punkt P' von A' (in der Umgebung von P) enthält. Nimmt man einen inneren Punkt Q von B' mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$ in der Umgebung von E , und läßt sich in jeder Umgebung von F ein innerer Punkt R von B' mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$ finden, so werde R so nahe an F gewählt, daß der Schnitt S der Geraden QR mit Λ zu Δ und damit zu A' gehört. Dann liegen die Punkte P' und S , die zu A' gehören, getrennt durch Q und R , die nicht zu A' gehören. Das kann nicht sein. Gibt es also in jeder Umgebung von E Punkte von B' mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$, so gehören in der Umgebung von F alle Punkte mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$ zu A' . Gäbe es in jeder Umgebung von F innere Punkte von A' mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$, so würden auf der Verbindungsgeraden eines solchen Punktes T mit einem Punkte U von B' mit $x_0 \neq 0$ der Schnitt mit $\Lambda(x_0 = 0)$ und U zu B' gehören und durch T und den Schnitt mit $x_0 + px_n = 0$,

die für kleines $p > 0$ beide zu A' und nicht zu B' gehören, getrennt. Daher gehören in der Umgebung von F alle Punkte mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$ zu A' , alle mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$ zu B' , und dasselbe gilt für jeden Punkt der im Inneren von Δ verlaufenden Strecke EF . Auch in der Umgebung von E gehören alle Punkte $\frac{x_0}{x_n} < 0$ zu A' . Denn gäbe es eine Folge $E_i \rightarrow E$ innerer Punkte von B' mit $\frac{x_0}{x_n} < 0$, so würden auf den Verbindungsgeraden $E_i F_i$ mit den Punkten einer Folge $F_i \rightarrow F$ mit $\frac{x_0}{x_n} > 0$, die also schließlich nur innere Punkte von B' enthält, E_i und F_i durch Punkte P_i in der Umgebung von P und T_i in Δ getrennt, die beide zu A' gehören. Demnach gilt

Satz 3. *Hat Λ $n-1$ Dimensionen, Δ in Λ innere Punkte, so daß Λ ganz etwa zu A' gehört, so ist B' in der Umgebung eines Punktes von Δ ganz auf eine Seite von Λ beschränkt, wenn es durch diesen Punkt eine Gerade gibt, von der eine Strecke im Inneren, eine andere außerhalb von Δ verläuft.*

Nebenher folgt daraus, daß Δ ganz Λ erfüllt, wenn eine unpaare Kurve, etwa eine Gerade, ganz im Inneren von Δ verläuft.

§ 2.

Die Fälle $n = 1, 2, 3$.

Für $n = 1$, in der Geraden, ist der einzige Typus einer abgeschlossenen konvexen Punktmenge, die ebenso wie ihre Komplementärmenge innere Punkte hat, die Strecke mit Einschluß der Endpunkte. Verzichtet man auf Abgeschlossenheit, so kann ein Endpunkt oder beide wegbleiben. Bei der leeren Menge und dem einzelnen Punkt sind keine inneren Punkte vorhanden; bei der ganzen Geraden und der Geraden mit Ausschließung eines Punktes hat die Komplementärmenge keine inneren Punkte. Derartige Mengen mußten nur hier erwähnt werden; fortan sind sie immer schon bei kleinerem n erledigt.

Es sei $n = 2$, A' eine abgeschlossene konvexe Punktmenge mit inneren Punkten; die abgeschlossene Hülle B' der Komplementärmenge B habe auch innere Punkte. Zunächst enthalte die Begrenzung Γ kein Geradenstück; dann hat sie auf einer Geraden nur keinen, einen oder zwei Punkte. Sei $P(x_1 = x_2 = 0)$ ein Punkt von Γ . Nehmen wir an, es gäbe keine Gerade, die nur einen Punkt von Γ enthält, so ist für jede Gerade $x_2 = \lambda x_1$ der Wert $\frac{x_0}{x_2} = \xi(\lambda)$ bestimmt, der ihren zweiten Schnitt (außer P) mit Γ angibt, und zwar sind für ein festes λ entweder alle Punkte $\frac{x_0}{x_1} < \xi$ innere Punkte von A' , alle Punkte $\frac{x_0}{x_1} > \xi$ innere Punkte von B' , oder

umgekehrt. Gilt für einen Wert λ das eine, so gilt es auch für genügend benachbarte und daher für alle Werte. Es treffe also etwa das erste für alle λ zu. Dies steht für große positive oder für große negative λ im Widerspruche damit, daß es auf der Geraden $x_1 = 0$ einen zweiten Schnitt $x_0 = \mu x_2$ gibt, so daß alle Punkte der Geraden mit $\frac{x_0}{x_2} < \mu$ innere Punkte von A' (oder B'), alle Punkte mit $\frac{x_0}{x_2} > \mu$ innere Punkte von B' (oder A') sind. Es muß also eine Gerade geben, die Γ in genau einem Punkte P trifft; sie gehöre ganz zu A' . In nicht homogenen Koordinaten sei $y = 0$ die Gerade, $x = y = 0$ der Punkt P . Ein Dreieck, bei geeigneter Koordinatenwahl etwa $x \leq y, 0 \leq y \leq 1$, gehört ganz zu B' (nach Satz 1). Gibt es in jeder Umgebung von P Punkte, also auch innere Punkte P_i von B' mit $y < 0$, so verbinde man sie mit dem Punkte $Q (x = 0, y = 1)$, der ebenfalls zu B' gehört. Der Schnitt von $P_i Q$ mit $x = 0$ gehört zu A' , also die durch das Unendliche gehende Strecke $P_i Q$ zu B' . Diese Strecken kommen jedem Punkte der Strecke ($x = 0, y < 0$ oder $y > 1$) beliebig nahe, so daß diese Strecke und damit die ganze Gerade $x = 0$ zu B' gehört. In P schneiden sich also zwei Gerade, deren eine ganz zu A' , deren andere ganz zu B' gehört. Liegt nun R mit P und einem inneren Punkte S von A' (oder von B') in gerader Linie, so zeigt die Verbindungsgerade von R mit einem geeigneten Punkte der Umgebung von S , daß auch R und wegen der Abgeschlossenheit und nach Satz 1 jede Gerade durch P , auf der außer P ein Punkt von A' (bzw. B') liegt, ganz zu A' (bzw. B') gehört. Da P nicht der einzige Punkt von Γ ist, enthält Γ eine ganze Gerade, was hier noch ausgeschlossen ist. Es bleibt nur übrig, daß B' in der Umgebung von P auf $y \geq 0$ beschränkt ist. Da die Gerade $y = 0$ sonst im Inneren von A' verläuft, liegt die Gerade $y = -p$ für kleines $p > 0$ ganz im Inneren von A' : B' ist konvex im gewöhnlichen Sinne.

Nunmehr enthalte Γ ein Geradenstück, etwa $y = 0, 0 \leq x \leq 1$. Nach Satz 2 gehört die Gerade $y = 0$ ganz etwa zu A' , und wenn Γ nicht die ganze Gerade enthält, so liegt nach Satz 3 in der Umgebung jener Strecke B' ganz auf einer Seite von $y = 0$, etwa $y \geq 0$. Die Gerade $y = -p$ verläuft wieder ganz im Inneren von A' : B' ist im gewöhnlichen Sinne konvex.

Enthält schließlich Γ eine Gerade, etwa $y = 0$, so ergeben die Verbindungsgeraden eines inneren Punktes von A' mit zwei inneren Punkten von B' , die nicht mit ihm in gerader Linie liegen, zwei weitere Punkte von Γ . Von ihrer Verbindungsgeraden gehören drei Punkte, also eine Strecke zu Γ . Gehörte diese Gerade nicht ganz zu Γ , so könnte nach dem vorigen Absatze Γ auch nicht die Gerade $y = 0$ enthalten. Es gehören daher zwei Gerade, etwa $x = 0$ und $y = 0$ zu Γ . Ist etwa in einem

inneren Punkte von A' $xy > 0$, so gehören alle Punkte $xy \geq 0$ zu A' , alle Punkte $xy \leq 0$ zu B' , mit der selbstverständlichen Erweiterung auf die Punkte der unendlich fernen Geraden. Hiermit ist bewiesen:

Satz 4. *Enthält eine abgeschlossene konvexe Punktmenge in der Ebene ebenso wie ihre Komplementärmenge innere Punkte, so enthält sie eine Gerade im Inneren oder läßt eine Gerade frei, oder sie ist ein Winkelraum, d. h. der eine der beiden Teile, in die die projektive Ebene durch zwei Gerade zerlegt wird.*

Im zweiten Falle ist die Punktmenge im gewöhnlichen Sinne konvex, im ersten und dritten ist es die Komplementärmenge. Auch bei Verzicht auf Abgeschlossenheit ergibt sich nichts Neues: eine aus dem Winkelraum durch Weglassen eines geeigneten Teils der Grenzpunkte entstehende konvexe Punktmenge ist im gewöhnlichen Sinne konvex, wenn sie den Scheitel nicht enthält; sonst ist es die Komplementärmenge.

Sei jetzt $n = 3$; A' und B' (in gewohnter Bezeichnung) haben innere Punkte.

1. Es gebe eine Ebene Λ ($x_0 = 0$), deren Durchschnitt Δ mit Γ innere Punkte hat; Λ gehöre (nach Satz 2) ganz zu A' .

a) Ist $\Delta = \Lambda$, P innerer Punkt von A' , Q von B' , so trifft Γ eine Ebene durch PQ nach Satz 4 in ihrem Schnitt mit Λ und in einer weiteren Geraden. Zwei solche Ebenen liefern zwei sich schneidende, in Γ , aber nicht ganz in Λ gelegene Gerade g und h ⁶⁾. Durch jeden Punkt R in der Ebene E von g und h läßt sich eine Ebene legen, die innere Punkte von A' und B' , aber keinen der Schnittpunkte von g und Λ , h und Λ , g und h enthält. In dieser Ebene kann Γ nach Satz 2 keine inneren Punkte haben. Γ enthält aber in ihr eine Gerade und die beiden Schnittpunkte mit g und h , also deren Verbindungsgerade und damit R . Γ enthält also zwei Ebenen, etwa $x_0 = 0$ und $x_3 = 0$. Ist $x_0 x_3 > 0$ in einem inneren Punkte von A' , so gehören alle Punkte $x_0 x_3 \geq 0$ zu A' , alle Punkte $x_0 x_3 \leq 0$ zu B' : A' ist ein Winkelraum zwischen zwei Ebenen.

b) Ist $\Delta \neq \Lambda$, so ist Δ nach Satz 2 konvex und enthält nach der aus Satz 3 gezogenen Folgerung keine Gerade im Inneren. Nach Satz 4 sind zwei Fälle möglich.

α) Läßt Δ eine Gerade in Λ , etwa $x_0 = x_3 = 0$ frei, so gehören nach Satz 3 in der Umgebung von Δ etwa alle Punkte $\frac{x_0}{x_3} \geq 0$ zu A' , und für kleines $p > 0$ ist die Ebene $x_0 = -p x_3$ von B' frei; B' ist konvex im gewöhnlichen Sinne.

β) Ist Δ ein Winkelraum, etwa $x_1 x_2 \geq 0$, so gehören nach Satz 3 in

⁶⁾ Sollten P , Q und der Schnitt von g und Λ in gerader Linie liegen, so legt man die zweite Ebene durch P und einen Punkt Q' nahe bei Q .

der Umgebung jedes Punktes von Δ außer $x_1 = x_2 = 0$ etwa alle Punkte $\frac{x_0}{x_1 + x_2} \geq 0$ zu A' (die Gerade $x_1 + x_2 = 0$ trifft Δ nur in $x_1 = x_2 = 0$).
 Liegt nun ein Punkt P ($x_0 \neq 0$) mit $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ und einem inneren Punkte Q von A' in gerader Linie, so kann man P mit solchen inneren Punkten Q_0 der Umgebung von Q verbinden, daß die Verbindungsgerade PQ_0 Δ in einem Punkte $\frac{x_1 + x_2}{x_3} > 0$ oder < 0 trifft. Je nach der Lage von P und Q zeigt auf der Geraden PQ_0 die Betrachtung des Punktes Q_0 , eines inneren Punktes $\frac{x_0}{x_1 + x_2} \geq 0$ von A' , des Schnittes mit Δ , der auch zu B' gehört, und des Punktes P , daß auch P zu A' gehört. Demnach besteht A' genau aus den Punkten der Geraden, die $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ mit den Punkten der abgeschlossenen konvexen Punktmenge verbinden, in der A' die Ebene $x_3 = 0$ schneidet; A' ist ein „konvexer Kegel“.

2. In allen anderen Fällen enthält A' nach Satz 2 in jeder Ebene eine abgeschlossene konvexe Punktmenge, B' ebenfalls eine solche, die mit der ersten keinen inneren Punkt gemeinsam hat, Γ die gemeinsame Begrenzung. Es wird behauptet, daß durch jeden Punkt von Γ eine ganz zu Γ gehörige Gerade geht, wenn nicht A' oder B' im gewöhnlichen Sinne konvex ist. (Dies trifft auch in den bisher gefundenen Fällen zu.) Legt man nämlich durch einen Punkt P ($x_0 = x_1 = x_2 = 0$) von Γ eine Ebene Λ ($x_0 = 0$), so sind die folgenden Fälle möglich:

a) Λ enthält nicht innere Punkte von A' und von B' , etwa keinen inneren Punkt von A' .

α) Λ schneidet Γ in einer ganzen Geraden. Die Behauptung trifft zu.

β) Der Durchschnitt von Λ und A' ist eine gerade Strecke, die etwa die Gerade $x_3 = x_0 = 0$ nicht trifft. Wäre nun A' in der Umgebung dieser Strecke nicht auf eine Seite von Λ , etwa $\frac{x_0}{x_3} \geq 0$, beschränkt, so gäbe es zwei verschiedene Punkte Q, R der Strecke und je eine Folge Q_i, R_i innerer Punkte von A' , die bezüglich mit $\frac{x_0}{x_3} > 0$ und $\frac{x_0}{x_3} < 0$ gegen Q und R konvergieren. Der Schnitt der Geraden $Q_i R_i$ mit $x_0 = 0$ gehört zu A' ; also müßte die äußere, d. h. die von $x_3 = 0$ getroffene Strecke $Q_i R_i$ und, entgegen der Annahme, die ganze Gerade QR zu A' gehören. Es ist also A' in der Umgebung der Strecke in Λ etwa auf $\frac{x_0}{x_3} \geq 0$ beschränkt und die Ebene $x_0 + p x_3 = 0$ für kleines $p > 0$ von A' frei, A' im gewöhnlichen Sinne konvex.

γ) Λ enthält von A' keinen Punkt außer P . Ist A' in der Umgebung von P etwa auf $\frac{x_0}{x_3} \geq 0$ beschränkt, so ist die Ebene $x_0 + p x_3 = 0$ von A' frei. Sonst gibt es ein Tetraeder mit einer Ecke in P , das ganz zu

A' gehört, und eine von der anderen Seite von Λ her gegen P konvergierende Folge innerer Punkte P_i von A' . Die Betrachtung der Verbindungsgeraden von P_i mit den Punkten des Tetraeders zeigt, daß jede Gerade durch P und einen anderen Punkt des Tetraeders ganz zu A' gehört. Verbindet man ferner einen inneren Punkt Q von A' mit den Punkten dieser Geraden, so sieht man, daß jede Gerade PQ ganz zu A' gehört: A' ist ein konvexer Kegel, und es gehört daher die Verbindungsgerade von P mit einem weiteren Punkte von Γ (dieser ist vorhanden) ganz zu Γ .

b) Λ schneidet A' und B' in je einer konvexen abgeschlossenen Punktmenge mit inneren Punkten, deren gemeinsame Begrenzung Δ ist; P gehört zu Δ .

α) Ist Δ ein Geradenpaar, so ist die Behauptung erfüllt.

β) Δ ist eine konvexe Kurve, deren Innengebiet etwa zu A' , deren Außengebiet zu B' gehört. Ist g eine Stützgerade an Δ in P , so hat g mit Δ und Γ nur P oder eine P enthaltende Strecke gemeinsam, und in der Umgebung von P oder dieser Strecke liegt A' auf einer Seite von g . Da die Punkte von Λ außer denen von Δ innere Punkte von A' oder B' sind, bleibt dies bestehen, wenn man Λ um g dreht, solange keiner der besprochenen Fälle eintritt. Dies muß aber geschehen; denn nach Drehung um 180° liegen die Punkte von A' in Λ auf der anderen Seite von g . Damit ist dieser Fall auf die anderen zurückgeführt und die Behauptung vollständig erwiesen.

Gibt es nun eine Ebene Λ , die Γ in genau einer Geraden g trifft, so gehört Λ ganz etwa zu B' . A' kann nicht in der Umgebung jedes Punktes von g auf einer Seite von Λ liegen; denn durchläuft man g , so kommt man von einer Seite von Λ auf die andere. Liegen also in jeder Umgebung von P (auf g) Punkte von A' beiderseits Λ , so zeigt sich genau wie unter (2a γ), daß A' ein konvexer Kegel mit der Spitze in P ist.

Nunmehr enthalte jede Ebene, die eine Gerade g von Γ enthält, noch eine zweite h . Gehen drei Gerade g, h, j von Γ durch einen Punkt P , so kommt man auf schon erledigte Fälle. Liegen nämlich g, h, j in einer Ebene, so hat Γ in dieser innere Punkte. Gehen alle Gerade von Γ durch P , so sind A' und B' konvexe Kegel. Ist l eine Gerade von Γ , die nicht durch P geht, m die zweite Gerade, in der Γ eine P nicht enthaltende Ebene durch l trifft, so bildet l oder m mit zweien der Geraden g, h, j ein Dreieck, und in der Ebene dieses Dreiecks hat Γ innere Punkte. Gehen daher keine drei Gerade von Γ durch einen Punkt, so schneiden sich nicht zwei von den zweiten Geraden t, u, v , die drei Ebenen durch eine Gerade g von Γ mit Γ außer g gemein haben. Dreht man eine Ebene M um t , so ist die zweite Gerade w , in der M und Γ sich schneiden,

durch die Schnitte mit u und v bestimmt: w gleitet längs der drei windschiefen Geraden t , u , v , d. h. w durchläuft eine Schar reeller Erzeugender einer Fläche zweiter Ordnung. Ist $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ die Gleichung dieser Fläche und in einem inneren Punkte von A' $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$, so legt man Gerade durch diesen Punkt und sieht, daß A' aus den Punkten $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0$, B' aus den Punkten $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \leq 0$ besteht.

Das Ergebnis über den Fall $n = 3$ ist also:

Satz 5. Eine abgeschlossene konvexe Punktmenge in drei Dimensionen mit inneren Punkten, die nicht den ganzen Raum erfüllt, deren Komplementärmenge also innere Punkte hat, ist im gewöhnlichen Sinne konvex, oder enthält eine Ebene ganz im Inneren, ist also die abgeschlossene Hülle der Komplementärmenge einer im gewöhnlichen Sinne konvexen, abgeschlossenen Menge, oder ist ein konvexer Kegel, oder besteht aus den Punkten auf der einen Seite einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung.

Nicht abgeschlossene konvexe Punktmengen, die ebenso wie ihre Komplementärmenge innere Punkte haben, können sich von diesen Typen nur durch den Wegfall von Grenzpunkten unterscheiden, wobei die Bedingung zu erfüllen ist, daß von einer der Begrenzung ganz oder teilweise angehörenden Geraden die ganze Gerade oder die Gerade bis auf einen Punkt oder eine Strecke mit oder ohne Endpunkte oder ein Punkt oder kein Punkt zur Punktmenge gehört.

(Eingegangen am 20. 7. 1920.)