Determinazione delle ipersuperficie che ammettono rappresentazioni geodetiche.

(Di ENRICO BOMPIANI, a Roma.)

1. Una corrispondenza puntuale fra due varietà V_n , V'_n si dice geodetica (e le due varietà rappresentate geodeticamente una sull'altra) quando alle geodetiche di una di esse corrispondono quelle dell'altra.

Dato un elemento lineare *generico* esso non ammette rappresentazioni geodetiche che su elementi lineari uguali o che ne differiscono per una costante moltiplicativa; cioè una V_n *generica* non è geodeticamente rappresentabile che su quelle isometrico-simili ad essa.

Però come esistono tipi di superficie (di LIOUVILLE) che ammettono trasformazioni geodetiche, così esistono tipi di V_n (tutti determinati dal prof. LEVI-CIVITA) che ammettono trasformazioni geodetiche proprie (cioè non prodotti di isometrie per similitudini).

Nel caso delle V_n ($n > 2$) si presenta la questione (che ha sempre risposta affermativa per $n = 2$) di vedere se esistano V_n con trasformazioni geodetiche proprie in un S_{n+1} euclideo, cioè *ipersuperficie* possedenti elementi lineari del LEVI-CIVITA.

Mi è parso che la risoluzione di questa questione riuscisse interessante per la conoscenza più approfondita delle V_n con trasformazioni geodetiche; e perciò la presento qui per le V_3 di S_4 ritenendo non vi siano difficoltà molto maggiori per le V_n di S_{n+1} .

La trattazione consiste nel ricercare quali condizioni impongono ai coefficienti degli elementi lineari di LEVI-CIVITA le equazioni di GAUSS e di CODAZZI (quali si trovano nelle classiche *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. L. BIANCHI, vol. I, alle quali il lettore è pregato di riferirsi senza bisogno di citazioni particolari).

Nella determinazione delle V_3 deformabili in S_4 (cioè per le quali la seconda forma fondamentale non è completamente determinata dalla prima)

poteva supporre che fosse necessario ricorrere alla Memoria del BIANCHI, *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni* [Memorie della Soc. Ital. delle Scienze (detta dei XL), s. III, t. XIII, 1905]; ma dato il tipo particolare degli elementi lineari in esame ciò non è neppure necessario, perchè riesce senza difficoltà la costruzione di modelli sui quali la deformabilità è evidente.

Invece le V_3 rigide con trasformazioni geodetiche, esistenti in uno S_4 euclideo sono: le ipersfere, le iperquadriche (in particolare rotonde, intorno ad un piano principale, o a due piani principali sghembi fra loro), le ipersuperficie rotonde intorno ad una retta (è non intorno ad un piano, escluso il caso detto delle iperquadriche).

Ho poi completato la ricerca, del tutto analoga, aggiungendo la determinazione delle ipersuperficie con trasformazioni geodetiche proprie esistenti in spazi a curvatura costante, di cui ho pure assegnato i modelli.

§ 1. RICHIAMI SULLE EQUAZIONI DI GAUSS E DI CODAZZI.

2. Com'è noto (BIANCHI, *Lezioni* cit., vol. I, pag. 362) un'ipersuperficie V_{n-1} di uno spazio ad n dimensioni è individuata rispetto al gruppo dei movimenti da due forme quadratiche

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{n-1} a_{ik} dx_i dx_k$$

$$\sum_{i,k}^{n-1} \Omega_{ik} dx_i dx_k$$

i coefficienti delle quali sono legati dalle equazioni di GAUSS e di CODAZZI che nel caso di un S_n euclideo si scrivono

$$\Omega_{\alpha\beta} \Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma} \Omega_{\beta\delta} = (\alpha \delta, \beta \gamma) \quad (G)$$

$$\frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t^{n-1} \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ t \end{matrix} \right\} \Omega_{\gamma t} - \sum_t^{n-1} \left\{ \begin{matrix} \alpha \gamma \\ t \end{matrix} \right\} \Omega_{\beta t} = 0 \quad (C)$$

i simboli di RIEMANN e di CHRISTOFFEL sono costruiti rispetto al ds^2 scritto.

Nel caso di una V_3 di S_4 (posto $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$) e supposto, come

accadrà nel nostro caso, il ds^2 del tipo

$$ds^2 = H_1 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2$$

si ha

$$\begin{aligned} (12, 12) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \left\{ \left(\frac{\partial H_1}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \left\{ \left(\frac{\partial H_2}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial v} \right\} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial w} \\ (12, 23) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial u \partial w} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial u} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial w} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial w}, \end{aligned}$$

quindi le equazioni di GAUSS si scrivono:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial u^2} \right\} + \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \left\{ \left(\frac{\partial H_1}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \left\{ \left(\frac{\partial H_2}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial v} \right\} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial w} \\ \Omega_{22} \Omega_{33} - \Omega_{23}^2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 H_2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 H_3}{\partial v^2} \right\} + \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \left\{ \left(\frac{\partial H_2}{\partial w} \right)^2 + \frac{\partial H_2}{\partial v} \frac{\partial H_3}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \left\{ \left(\frac{\partial H_3}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial H_3}{\partial w} \right\} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial u} \\ \Omega_{33} \Omega_{11} - \Omega_{13}^2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 H_3}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial w^2} \right\} + \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \left\{ \left(\frac{\partial H_3}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial H_3}{\partial w} \frac{\partial H_1}{\partial w} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \left\{ \left(\frac{\partial H_1}{\partial w} \right)^2 + \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial H_1}{\partial u} \right\} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial v} \end{aligned} \quad (G_1)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{12} \Omega_{23} - \Omega_{13} \Omega_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial u \partial w} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_2}{\partial u} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial w} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial w} \\ \Omega_{23} \Omega_{31} - \Omega_{21} \Omega_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_3}{\partial v \partial u} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_3}{\partial v} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_3}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_3}{\partial u} \\ \Omega_{31} \Omega_{12} - \Omega_{32} \Omega_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial w \partial v} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial w} - \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{\partial H_1}{\partial v} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{\partial H_1}{\partial v} \end{aligned} \quad (G_2)$$

e quelle di CODAZZI:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v} \left(\Omega_{11} + \frac{H_1}{H_2} \Omega_{22} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_2 | H_1}}{\partial u} \Omega_{12} + \\
 &\quad + \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial w} \Omega_{23} \\
 \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial w} - \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial w} \left(\Omega_{11} + \frac{H_1}{H_3} \Omega_{33} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_3 | H_1}}{\partial u} \Omega_{13} + \\
 &\quad + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v} \Omega_{23} \\
 \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial w} - \frac{\partial \Omega_{23}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial w} \left(\Omega_{22} + \frac{H_2}{H_3} \Omega_{33} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_3 | H_2}}{\partial v} \Omega_{23} + \\
 &\quad + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u} \Omega_{31} \\
 \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{21}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u} \left(\Omega_{22} + \frac{H_2}{H_1} \Omega_{11} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_1 | H_2}}{\partial v} \Omega_{21} + \\
 &\quad + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial w} \Omega_{31} \\
 \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial w} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial u} \left(\Omega_{33} + \frac{H_3}{H_1} \Omega_{11} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_1 | H_3}}{\partial w} \Omega_{31} + \\
 &\quad + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial v} \Omega_{12} \\
 \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{32}}{\partial w} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial v} \left(\Omega_{33} + \frac{H_3}{H_2} \Omega_{22} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_2 | H_3}}{\partial w} \Omega_{32} + \\
 &\quad + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial u} \Omega_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{C_1}$$

$$\tag{C_2}$$

$$\tag{C_3}$$

È noto che date H_1, H_2, H_3 le equazioni $(G_1), (G_2)$ definiscono, *in generale*, le Ω_{ik} e allora la V_3 è indeformabile; affinché poi esista effettivamente in S_4 occorre e basta che i valori così ricavati soddisfino alle $(C_1), (C_2), (C_3)$. Se invece le $(G_1), (G_2)$ non individuano le Ω_{ik} , allora la V_3 è deformabile sempre che siano soddisfatte in conseguenza le equazioni di CODAZZI.

3. Poichè nel seguito accadrà sempre che i secondi membri delle (G_2) sono nulli, vediamo come si semplifichino in tal caso le equazioni precedenti.

I). Se $(12,12) \cdot (23,23) \cdot (31,31) \neq 0$ (in punti generici della V_3) è necessariamente $\Omega_{11} \cdot \Omega_{22} \cdot \Omega_{33} \neq 0$; $\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{31} = 0$.

In tal caso la V_3 , se esiste in S_4 , è indeformabile, avendosi dalle (G_1)

$$\Omega_{11}^2 = \frac{(12, 12) (13, 13)}{(23, 23)}; \quad \Omega_{22}^2 = \frac{(23, 23) (21, 21)}{(31, 31)}$$

$$\Omega_{33}^2 = \frac{(31, 31) (32, 32)}{(12, 12)}.$$

Le equazioni di CODAZZI divengono

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v} (\Omega_{11} H_2 + \Omega_{22} H_1); \quad \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial w} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial w} (\Omega_{11} H_3 + \Omega_{33} H_1) \quad (C_1)$$

$$\frac{\partial \Omega_{22}}{\partial w} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial w} (\Omega_{22} H_3 + \Omega_{33} H_2); \quad \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u} (\Omega_{22} H_1 + \Omega_{11} H_2) \quad (C_2)$$

$$\frac{\partial \Omega_{33}}{\partial u} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial u} (\Omega_{33} H_1 + \Omega_{11} H_3); \quad \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial v} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \log \sqrt{H_3}}{\partial v} (\Omega_{33} H_2 + \Omega_{22} H_3). \quad (C_3)$$

Se, e solo se, queste sono soddisfatte dai precedenti valori delle Ω_{ii} , esiste in S_4 la V_3 di $ds^2 = H_1 du^2 + H_2 dv^2 + H_3 dw^2$ ed è indeformabile.

II). Se uno dei simboli $(12,12)$, $(23,23)$, $(31,31)$ è nullo, ve ne sono almeno due nulli; se p. es. $(12,12) \neq 0$, $(23,23) = (31,31) = 0$, allora

$$\Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega_{33} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H_3}{\partial u} = \frac{\partial H_3}{\partial v} = 0.$$

Sia infatti $(31,31) = 0$ e gli altri due $\neq 0$. Moltiplicando la prima e terza (e poi la prima e la seconda) delle (G_2) , per essere $(12,12) \neq 0$ e $(23,23) \neq 0$ si ricava $\Omega_{13} \Omega_{23} = 0$, $\Omega_{13} \Omega_{12} = 0$, quindi o $\Omega_{13} = 0$, ovvero $\Omega_{13} \neq 0$ e $\Omega_{23} = \Omega_{21} = 0$. Nel primo caso, $\Omega_{13} = 0$, dalle (G_2) , $\Omega_{12} \Omega_{23} = \Omega_{21} \Omega_{33} = \Omega_{32} \Omega_{11} = 0$ e dalla terza (G_1) $\Omega_{33} \Omega_{11} = 0$: ora se $\Omega_{11} = 0$ avendosi dalla prima (G_1) $\Omega_{12} \neq 0$ dovrebbe esserè $\Omega_{23} = \Omega_{33} = 0$, cioè $(23,23) = 0$ contro l'ipotesi; mentre se $\Omega_{33} = 0$ dalla seconda (G_1) $\Omega_{23} \neq 0$, quindi $\Omega_{11} = \Omega_{12} = 0$, cioè $(12,12) = 0$ pure contro le ipotesi. Nel secondo caso $\Omega_{32} = \Omega_{12} = 0$, $\Omega_{13} \neq 0$, dalla prima (G_2) $\Omega_{22} = 0$, quindi $(12,12) = 0$, $(23,23) = 0$ contro l'ipotesi.

Se invece supponiamo due simboli nulli, p. es. $(23,23) = (31,31) = 0$, ma $(12,12) \neq 0$, dalla prima e terza di (G_2) si ha $\Omega_{13} \Omega_{23} = 0$; sia p. es. $\Omega_{13} = 0$.

Allora anche $\Omega_{33} \Omega_{11} = \Omega_{12} \Omega_{23} = \Omega_{21} \Omega_{33} = \Omega_{23} \Omega_{11} = 0$, quindi o $\Omega_{23} = \Omega_{33} = 0$, o $\Omega_{11} = \Omega_{12} = 0$; ma dovendo essere $(12,12) \neq 0$ l'unica soluzione possibile è $\Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega_{33} = 0$.

In queste condizioni le (C_3) danno

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial \log H_3}{\partial u} \Omega_{11} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \log H_3}{\partial v} \Omega_{12} &= 0 \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial \log H_3}{\partial u} \Omega_{12} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \log H_3}{\partial v} \Omega_{22} &= 0 \end{aligned}$$

e poichè $\Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2 = (12,12) \neq 0$ necessariamente $\frac{\partial H_3}{\partial u} = \frac{\partial H_3}{\partial v} = 0$.

Le altre equazioni di CODAZZI sono

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial u} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_1}}{\partial v} \left(\Omega_{11} + \frac{H_1}{H_2} \Omega_{22} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_2} \overline{H_1}}{\partial u} \Omega_{12}; \\ \frac{\partial \log \Omega_{11}^2}{\partial v} &= \frac{\partial \log H_1}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (C_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial v} &= \frac{\partial \log \sqrt{H_2}}{\partial u} \left(\Omega_{22} + \frac{H_2}{H_1} \Omega_{11} \right) + \frac{\partial \log \sqrt{H_1} \overline{H_2}}{\partial v} \Omega_{12}; \\ \frac{\partial \log \Omega_{22}^2}{\partial v} &= \frac{\partial \log H_2}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (C_2)$$

Essendo il determinante delle Ω_{ik} nullo, in questa categoria andranno ricercate le V_3 deformabili.

III). Se $(12,12) = (23,23) = (31,31) = 0$, la V_3 è applicabile sopra uno S_3 .

§ 2. TIPI DI ELEMENTI LINEARI

A TRE VARIABILI DOTATI DI TRASFORMAZIONI GEODETICHE PROPRIE.

4. Dalla ricerca del prof. LEVI-CIVITA ⁽¹⁾ risulta che si hanno due soli tipi di ds^2 appartenenti a V_3 con trasformazioni geodetiche proprie (non semplici prodotti di applicabilità per similitudini) ⁽²⁾. Il primo di essi (tipo

⁽¹⁾ Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche [Ann. di Matem., 1896].

⁽²⁾ Perchè sulle molteplicità delle radici dell'equazione cubica che interviene in quella teoria non possono farsi che tre ipotesi; e quella di una radice tripla corrisponde appunto ad isometrie e similitudini.

di LIOUVILLE generalizzato) si può scrivere:

$$ds^2 = \left. \begin{aligned} &|U - V| \cdot |U - W| du^2 + |V - U| \cdot |V - W| dv^2 + \\ &+ |W - U| \cdot |W - V| dw^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ove U, V, W sono funzioni rispettiv. della sola u, v, w . Esso è rappresentabile geodeticamente sull'altro

$$ds'^2 = \left. \begin{aligned} &\left| \frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right| \cdot \left| \frac{1}{U} - \frac{1}{W} \right| du^2 + \left| \frac{1}{V} - \frac{1}{U} \right| \cdot \left| \frac{1}{V} - \frac{1}{W} \right| dv^2 + \\ &+ \left| \frac{1}{W} - \frac{1}{U} \right| \cdot \left| \frac{1}{W} - \frac{1}{V} \right| dw^2 \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Nella forma (1), e conseguentemente nella (1'), ci si può liberare dai segni di valore assoluto purchè sia assicurato (almeno per determinati campi di variabilità delle u, v, w) il carattere essenzialmente positivo dei suoi coefficienti.

A questa condizione non si può soddisfare prendendo $H_1 = (U - V)(U - W)$, e per H_2, H_3 le espressioni dedotte dalla precedente con permutazioni circolari, perchè si avrebbe $H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1 = 0$, il che è incompatibile con la condizione posta; si può invece prendere $H_1 = (U - V)(U - W)$, $H_2 = (V - W)(V - U)$ e $H_3 = -(W - U)(W - V)$ (e si ha $H_1 H_2 - H_2 H_3 - H_3 H_1 = 0$) e risultano effettivamente H_1, H_2, H_3 positivi p. es. per $U > W > V$ (o $U < W < V$); mi servirò quindi di questa ultima determinazione delle H_i .

L'altro tipo di ds^2 è

$$ds^2 = (k - W) d\sigma^2 + dw^2 \quad (2)$$

ove $d\sigma$ è un elemento binario (nelle sole u, v), $W(w)$ è tale che nel campo che si considera $W < k$ (costante); ridotto il $d\sigma^2$ a forma isoterma si ha

$$ds^2 = A(u, v) (du^2 + dv^2) (k - W) + dw^2 \quad (2)$$

rappresentabile geodeticamente sull'altro

$$ds'^2 = A(u, v) (du^2 + dv^2) \frac{k - W}{k W} + \frac{dw^2}{W^2} \quad (2')$$

sicchè in ogni caso il ds delle nostre V_3 è riducibile a forma ortogonale⁽³⁾.

⁽³⁾ Ciò non è più vero, in generale, per le V_{n-1} di S_n ($n > 4$); quindi si potrebbe presentare in conseguenza qualche difficoltà nuova.

§ 3. V_3 ESISTENTI IN S_4 EUCLIDEO (O A CURVATURA COSTANTE)

CON ELEMENTO LINEARE

$$ds^2 = (U - V)(U - W) du^2 + (V - U)(V - W) dv^2 + (W - U)(W - V) dw^2.$$

5. Si ha

$$H_1 = (U - V)(U - W); \quad \frac{\partial H_1}{\partial u} = U'(2U - V - W);$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = -V'(U - W); \quad \frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} = -V''(U - W)$$

e le analoghe; sicchè le espressioni dei simboli di RIEMANN sono:

$$\begin{aligned} (12, 12) &= \frac{1}{2}(U - W)V'' + \frac{1}{2}(V - W)U'' - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(V - W)(3U - 2W - V)U'^2 - \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(U - W)(3V - 2W - U)V'^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(U - V)^2 W'^2 \\ (23, 23) &= \frac{1}{2}(V - U)W'' - \frac{1}{2}(W - U)V'' + \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(W - U)(3V - 2U - W)V'^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(V - U)(3W - 2U - V)W'^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(V - W)^2 U'^2 \\ (31, 31) &= -\frac{1}{2}(W - V)U'' + \frac{1}{2}(U - V)W'' + \frac{1}{4}\frac{1}{H_3}(U - V)(3W - 2V - U)W'^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{1}{H_1}(W - V)(3U - 2V - W)U'^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{H_2}(W - U)^2 V'^2 \\ (12, 23) &= (23, 31) = (31, 12) = 0. \end{aligned}$$

Le ultime tre relazioni indicano che le congruenze delle linee coordinate sono quelle definite in ogni punto dalle direzioni principali della V_3 ; sicchè, adottando una locuzione proposta dal BIANCHI ^(*) si può dire che le nostre V_3 sono spazi normali; e siccome questa stessa circostanza si presenta per

(*) L. BIANCHI, *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti* [Atti R. Accad. dei Lincei, Classe di Scienze, vol. XXV, 1916₁].

l'altro tipo di ds^2 che esamineremo in seguito e non dipende affatto dallo spazio d'immersione della V_3 rileviamo che:

Tutte le V_3 che ammettono trasformate geodetiche proprie (cioè non soltanto isometrico-simili) sono spazi normali del Bianchi.

Una conseguenza del massimo interesse delle prime tre equazioni è la relazione

$$(12, 12) - (23, 23) - (31, 31) = 0;$$

dalla quale si ricava che o tutti tre i simboli scritti sono differenti da zero, quindi anche le tre curvatures principali; oppure se uno di essi è nullo, dovendo per il n.º 3, II) esserne nulli almeno due, lo sono tutti tre, e la V_3 è applicabile sopra uno S_3 euclideo. Escludiamo dal seguito questo caso evidente.

6. Sia dunque $(12, 12) (23, 23) (31, 31) \neq 0$.

Converrà porre per semplicità di scrittura

$$(12, 12) = A_3, \quad (23, 23) = A_1, \quad (31, 31) = A_2.$$

Le equazioni di CODAZZI, per le espressioni delle Ω_{ik} trovate al n.º 3, I), si scrivono

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log A_2}{\partial v} + \frac{\partial \log A_3}{\partial v} - \frac{\partial \log A_1}{\partial v} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{A_1}{A_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \log A_2}{\partial w} + \frac{\partial \log A_3}{\partial w} - \frac{\partial \log A_1}{\partial w} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial w} \frac{A_1}{A_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (C_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log A_3}{\partial w} + \frac{\partial \log A_1}{\partial w} - \frac{\partial \log A_2}{\partial w} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial w} \frac{A_2}{A_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \log A_3}{\partial u} + \frac{\partial \log A_1}{\partial u} - \frac{\partial \log A_2}{\partial u} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{A_2}{A_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (C_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \log A_1}{\partial u} + \frac{\partial \log A_2}{\partial u} - \frac{\partial \log A_3}{\partial u} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial u} \frac{A_3}{A_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \log A_1}{\partial v} + \frac{\partial \log A_2}{\partial v} - \frac{\partial \log A_3}{\partial v} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial v} \frac{A_3}{A_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (C_3)$$

Si ottengono combinazioni immediatamente integrabili operando per sottrazione e per addizione sulla seconda equazione di ciascun gruppo e sulla prima del successivo.

Nel primo modo, tenuto conto che $A_1 + A_2 = A_3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w} \log \frac{A_2}{A_1} &= \frac{W'(U-V)}{(U-W)(V-W)}; & \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{A_3}{A_2} &= \frac{U'(V-W)}{(U-V)(U-W)} \\ \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{A_1}{A_3} &= \frac{V'(W-U)}{(V-W)(V-U)}.\end{aligned}$$

Supponiamo $U' V' W' \neq 0$ (discuteremo poi l'ipotesi opposta). Integrando si ha

$$\begin{aligned}\frac{A_2}{A_1} &= \varphi_{21}(u, v) \frac{U-W}{W-V}; & \frac{A_3}{A_2} &= \varphi_{32}(w, u) \frac{U-V}{U-W}; \\ \frac{A_1}{A_3} &= \varphi_{13}(u, w) \frac{V-W}{V-U}\end{aligned}$$

le funzioni per ora indeterminate φ_{ik} ($i \neq k$) devono esser tali che $\varphi_{ik} = 1/\varphi_{ki}$ e inoltre $\varphi_{21} \cdot \varphi_{32} \cdot \varphi_{13} = 1$, sicchè si può porre

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{y_2(v)}{y_1(u)} \frac{U-W}{W-V}, \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{y_3(w)}{y_2(v)} \frac{U-V}{U-W}, \quad \frac{A_1}{A_3} = \frac{y_1(u)}{y_3(w)} \frac{V-W}{V-U}.$$

Se si sostituiscono le espressioni ora trovate nella relazione $A_1 + A_2 = A_3$ si ottengono le nuove relazioni

$$\frac{y_1 - y_2}{U - V} = \frac{y_2 - y_3}{V - W} = \frac{y_3 - y_1}{W - U}$$

alle quali si può soddisfare in due modi:

- 1.° caso: $y_1 = y_2 = y_3 = k$ (costante)
2.° caso: $y_1/U = y_2/V = y_3/W = k$ (costante)

potendosi omettere nelle y_i la stessa costante additiva, essendo le U, V, W definite appunto a meno di una tale costante.

Combinando invece per addizione le equazioni di CODAZZI si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 &= \frac{W'}{H_3} \left\{ \frac{A_2}{A_3} (U-V) + V-W \right\} \\ \frac{\partial}{\partial u} \log A_1 &= \frac{U'}{H_1} \left\{ \frac{A_3}{A_1} (W-V) + U-W \right\} \\ \frac{\partial}{\partial v} \log A_2 &= \frac{V'}{H_2} \left\{ \frac{A_3}{A_2} (W-U) + V-W \right\}\end{aligned}$$

equazioni che bisogna integrare distinguendo i due casi segnalati.

7. Nel 1° caso ($y_i = k$) le equazioni precedenti si riducono a

$$\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{W'}{H_3} (U + V - 2W) = \frac{\partial}{\partial w} \log H_3; \dots$$

da cui

$$A_3 = h_{12}(u, v) H_3, \quad A_1 = h_{23}(v, w) H_1, \quad A_2 = h_{31}(w, u) H_2$$

e poichè le A_i sono $\neq 0$, anche $h_{ij} \neq 0$.

Se si formano di nuovo i rapporti di due A_i nell'ipotesi attuale si trova

$$\frac{h_{12}}{(U + V)^2} = \frac{h_{23}}{(V + W)^2} = \frac{h_{31}}{(W + U)^2} = h \text{ (cost.)}$$

e in conseguenza

$$A_3 = (12, 12) = h H_1 H_2, \quad A_2 = (13, 13) = h H_1 H_3, \quad A_1 = (23, 23) = h H_2 H_3.$$

Le V_3 attuali sono a curvatura costante h (necessariamente positiva) quindi ipersfere dello S_4 : queste sono rappresentabili geodeticamente su S_3 (con proiezione dal centro). L'integrazione delle ultime equazioni, quando si sostituiscano ai simboli di RIEMANN le loro espressioni date in principio del n.º 5, darebbe la forma di U, V, W , cioè del ds^2 del tipo di LIOUVILLE relativo all'ipersfera.

8. Nel 2° caso ($y_1/U = y_2/V = y_3/W = k$) le ultime combinazioni delle equazioni di CODAZZI divengono

$$\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{W'}{W H_3} (U V - W^2)$$

e integrando

$$A_3 = \frac{H_3}{W} \theta_{12}(u, v); \quad A_1 = \frac{H_1}{U} \theta_{23}(v, w); \quad A_2 = \frac{H_2}{V} \theta_{31}(w, v).$$

Per determinare le funzioni, per ora incognite, θ_{ik} si osserva che nel caso attuale è pure

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{V}{U} \frac{U - W}{W - V}; \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{W}{V} \frac{U - V}{U - W}; \quad \frac{A_1}{A_3} = \frac{U}{W} \frac{V - W}{V - U}$$

quindi

$$\theta_{12} = h \left(\frac{U - V}{U V} \right)^2; \quad \theta_{23} = h \left(\frac{V - W}{V W} \right)^2; \quad \theta_{31} = h \left(\frac{U - W}{U W} \right)^2$$

e finalmente

$$A_3 = (12, 12) = \frac{h \, W \, H_1 \, H_2}{(U \, V \, W)^2}; \quad A_1 = (23, 23) = \frac{h \, U \, H_2 \, H_3}{(U \, V \, W)^2};$$

$$A_2 = (31, 31) = \frac{h \, V \, H_1 \, H_3}{(U \, V \, W)^2}.$$

Notiamo le espressioni delle tre curvatures principali

$$k_1 = \frac{h \, U}{(U \, V \, W)^2}; \quad k_2 = \frac{h \, V}{(U \, V \, W)^2}; \quad k_3 = \frac{h \, W}{(U \, V \, W)^2}.$$

Per determinare effettivamente le V_s in esame occorre sostituire le espressioni dei simboli di RIEMANN (date al n° 5) nelle ultime equazioni ed esaminare se il sistema così ottenuto è integrabile e infine ricavare da esso U, V, W .

Posto $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w, U_1 = U, U_2 = V, U_3 = W$ e

$$\beta_{rs} = \frac{1}{\sqrt{H_r}} \frac{\partial \sqrt{H_s}}{\partial u_r} = \frac{1}{2\sqrt{H_r H_s}} \frac{\partial H_s}{\partial u_r} \quad (r \neq s)$$

il sistema di equazioni cui debbono soddisfare le β_{rs} è (*)

$$\frac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_t} = \beta_{rt} \beta_{ts}$$

$$\frac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_r} + \frac{\partial \beta_{sr}}{\partial u_s} + \beta_{tr} \beta_{ts} + k_t \sqrt{H_r H_s} = 0 \quad (r \neq s \neq t).$$

Le condizioni d'integrabilità nel caso attuale (k_t variabile) sono

$$(k_t - k_s) \frac{\partial \log H_s}{\partial u_t} + (k_t - k_r) \frac{\partial \log H_r}{\partial u_t} = -2 \frac{\partial k_t}{\partial u_t}$$

e poichè

$$k_t - k_s = \frac{h}{(U_r U_s U_t)^2} (U_t - U_s)$$

$$\frac{\partial \log H_s}{\partial u_t} = \frac{U'_t}{U_t - U_s}; \quad \frac{\partial k_t}{\partial u_t} = -k_t \frac{\partial \log U_t}{\partial u_t}$$

esse risultano identicamente soddisfatte, quindi il sistema è completamente integrabile.

(*) L. BIANCHI, *Sugli spazi normali* ecc., già citato. Le notazioni differiscono un poco perchè il BIANCHI parte dal $ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$.

Del resto riprendendo il sistema sotto la forma primitiva (senza l'intervento delle β_{rs})

$$\begin{aligned} \frac{h}{(U V W)^2} \frac{W H_1 H_2}{H_1 H_2} &= \frac{1}{2} (U - W) V'' + \frac{1}{2} (V - W) U'' - \\ &- \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} (V - W) (3 U - 2 W - V) U'^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} (U - W) (3 V - 2 W - U) V'^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} (U - V)^2 W'^2 \\ \frac{h}{(U V W)^2} \frac{U H_2 H_3}{H_2 H_3} &= \frac{1}{2} (V - U) W'' - \frac{1}{2} (W - U) V'' + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} (W - U) (3 V - 2 U - W) V'^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} (V - U) (3 W - 2 U - V) W'^2 - \\ &- \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} (V - W)^2 U'^2 \\ \frac{h}{(U V W)^2} \frac{V H_1 H_3}{H_1 H_3} &= -\frac{1}{2} (W - V) U'' + \frac{1}{2} (U - V) W'' + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{1}{H_3} (U - V) (3 W - 2 V - U) W'^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{H_1} (W - V) (3 U - 2 V - W) U'^2 - \\ &- \frac{1}{4} \frac{1}{H_2} (W - U)^2 V'^2 \end{aligned}$$

si constata senza difficoltà che le conseguenze differenziali

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{(U - V)^2}{H_3^2} W'' - \frac{1}{2} U'' - \frac{1}{2} V'' &= \frac{1}{4} \frac{V - U}{H_1^2} \left\{ 2 (U - W)^2 + (U - V)^2 \right\} U'^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{U - V}{H_2^2} \left\{ 2 (V - W)^2 + (U - V)^2 \right\} V'^2 + \frac{1}{4} \frac{(U - V)^2}{H_3^2} (U + V - 2 W) W'^2 + \\ &+ \frac{h (U - V)^2}{(U V W)^2} (U V - W^2); \\ -\frac{1}{2} \frac{(W - V)^2}{H_1^2} U'' + \frac{1}{2} V'' - \frac{1}{2} W'' &= -\frac{1}{4} \frac{W - V}{H_2^2} \left\{ 2 (V - U)^2 + (W - V)^2 \right\} V'^2 - \\ &- \frac{1}{4} \frac{W - V}{H_3^2} \left\{ 2 (W - U)^2 + (W - V)^2 \right\} W'^2 - \frac{1}{4} \frac{(V - W)^2}{H_1^2} (2 U - V - W) U'^2 + \\ &+ \frac{h (W - V)^2}{(U V W)^2} (U^2 - V W); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \frac{(U-W)^2}{H_2} V'' - \frac{1}{2} W'' + \frac{1}{2} U'' = -\frac{1}{4} \frac{W-U}{H_1^2} \left\{ 2(U-V)^2 + (W-U)^2 \right\} U'^2 - \\
-\frac{1}{4} \frac{W-U}{H_2^2} \left\{ 2(W-V)^2 + (W-U)^2 \right\} W'^2 - \frac{1}{4} \frac{(W-U)^2}{H_2^2} (2V-U-W) V'^2 + \\
+ \frac{h(W-U)^2}{(U V W)^2} (V^2 - UW)
\end{aligned}$$

risultano conseguenze algebriche delle precedenti, quindi il sistema è integrabile.

La forma di queste ultime non è senza vantaggio per l'effettiva integrazione in quanto ciascuna di esse contiene due delle derivate seconde con coefficienti costanti; sicché mi servirò di queste piuttosto che delle equazioni di partenza.

Derivando p. es. la seconda rispetto ad u , l'espressione di U''' contiene solo V'^2 e W'^2 (delle derivate di V e W) e così U''' e U'' ; talchè è da prevedere che si possano poi eliminare fra le tre equazioni così ottenute V'^2 e W'^2 . Se si eseguiscano le operazioni indicate con qualche accorgimento spontaneo si trova

$$\left[\frac{1}{U'} \left(\frac{U'''}{U'} \right)' \right] = -48 h U' / U^5$$

e analogamente

$$\left[\frac{1}{V'} \left(\frac{V'''}{V'} \right)' \right] = -48 h V' / V^5, \quad \left[\frac{1}{W'} \left(\frac{W'''}{W'} \right)' \right] = 48 h W' / W^5$$

(gli apici indicando derivazioni ordinarie); integrando si ha

$$U'^2 = -\frac{4h}{U} + a_1 U^3 + a_2 U^2 + a_3 U + a_4$$

$$V'^2 = -\frac{4h}{V} + b_1 V^3 + b_2 V^2 + b_3 V + b_4$$

$$W'^2 = +\frac{4h}{W} + c_1 W^3 + c_2 W^2 + c_3 W + c_4$$

con le a_i , b_i , c_i costanti d'integrazione. Queste costanti non sono però tutte indipendenti come si rileva cercando di soddisfare con le espressioni ora trovate alle equazioni proposte.

Infatti, se si moltiplica la prima delle conseguenze algebrico-differenziali

per $U - V$, tutti i termini di essa lo contengono a fattore meno i seguenti

$$-\frac{1}{2} U'^2 + \frac{1}{2} V'^2$$

e poichè dunque occorre che anche quest'espressione sia divisibile per $U - V$ bisogna che sia $a_i = b_i$; analogamente ragionando sopra una qualsiasi delle due rimanenti equazioni risulta ancora $a_i = b_i = -c_i$; sicchè posto

$$P_4(t) = a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t - 4h$$

si ha

$$\int \frac{\sqrt{U}}{\sqrt{P_4(U)}} dU = u; \quad \int \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{P_4(V)}} dV = v; \quad \int \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{-P_4(W)}} dW = w$$

potendosi scegliere sempre nulle le costanti che nascono dalle nuove integrazioni.

Non è detto (poichè non si è spinta a fondo la verifica delle equazioni differenziali) che le relazioni trovate fra le costanti d'integrazione siano le sole esistenti: ma ciò è di fatto, come risulta dal seguente ragionamento geometrico che ci risparmia non solo quella verifica, ma anche le integrazioni che sarebbero ancora necessarie per trovare la forma (cioè le equazioni parametriche o l'equazione cartesiana) delle V_s in esame.

Poichè queste sono rigide basta trovare un modello con quell'elemento lineare per esser sicuri che la V_s esiste e coincide necessariamente col modello trovato: cioè che non ve ne sono altre.

Un modello è fornito dalle iperquadriche di S_4 . Infatti il ds^2 di S_4 riferito al sistema 4-plo ortogonale di iperquadriche

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} + \frac{t^2}{\delta - \tau} = 1$$

è ⁽⁶⁾

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{1}{4} \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\lambda - \eta)}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\delta - \lambda)} d\lambda^2 - \\ & -\frac{1}{4} \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)(\mu - \eta)}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)(\delta - \mu)} d\mu^2 - \\ & -\frac{1}{4} \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)(\nu - \eta)}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)(\delta - \nu)} d\nu^2 - \\ & -\frac{1}{4} \frac{(\eta - \lambda)(\eta - \mu)(\eta - \nu)}{(\alpha - \eta)(\beta - \eta)(\gamma - \eta)(\delta - \eta)} d\eta^2 \end{aligned}$$

⁽⁶⁾ Cfr. p. es. J. SOMMER, *Math. Annalen*, Bd. 53, 1900, p. 113.

con

$$\alpha > \eta > \beta > \nu > \gamma > \mu > \delta > \lambda > \dots \infty;$$

quindi sull'iperquadrica $\mu = 0$, p. es., si ha proprio un ds^2 del tipo voluto; e tanto basta per concludere che le nostre V_s sono appunto iperquadriche. Anzi assegnato a piacere P_4 si hanno dal confronto del nostro elemento lineare con quest'ultimo i valori dei semiassi della relativa V_s (risulta di qua nuovamente che se $h = 0$ la V_s è applicabile sopra un S_s perchè tale è il modello). Se in particolare $\alpha_1 = 0$ si hanno paraboloidi, come risulta dall'espressione del loro elemento lineare.

9. Prima di enunciare il risultato bisogna esaminare l'ipotesi finora scartata $U' V' W' = 0$.

Se uno solo dei tre fattori è nullo, facciamo $U' V' \neq 0$, $W' = 0$. Poichè interessano le sole differenze fra U , V , W si può fare $W = 0$ (quindi $V < 0$) e con un cangiamento di parametri u , v possiamo partire dal

$$ds^2 = (U - V) (du^2 + dv^2) - UV du^2.$$

Per esso

$$(12, 12) = -\frac{1}{2} (U'' - V'') + \frac{1}{2} \frac{U'^2 + V'^2}{U - V}$$

$$(23, 23) = \frac{1}{2} UV'' + \frac{1}{4} \frac{V}{U - V} U'^2 - \frac{1}{4} \frac{U - 2V}{(U - V)V} U' V'^2$$

$$(31, 31) = \frac{1}{2} VU'' - \frac{1}{4} \frac{-V + 2U}{(U - V)U} V U'^2 - \frac{1}{4} \frac{U}{U - V} V'^2$$

e gli altri simboli di RIEMANN sono $= 0$. Posto $(12, 12) = A_3, \dots$, si ha

$$\frac{A_1}{U} - \frac{A_2}{V} = A_3.$$

Delle equazioni di CODAZZI due sono identicamente soddisfatte; combinando le altre come nel caso precedente si ha

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{A_3}{A_2} = \frac{U'}{U} \frac{V}{U - V}; \quad \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{A_3}{A_1} = -\frac{V'}{V} \frac{U}{U - V}$$

da cui

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{y_2(v)}{V} \frac{U - V}{U}; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{y_1(u)}{U} \frac{U - V}{V}$$

sostituendo queste espressioni nella relazione fra le A_i si ricava, designando con k una costante,

$$1^o) \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{V-U}{U \cdot V};$$

oppure

$$2^o) \quad \frac{A_3}{A_2} = \frac{k}{k-V} \frac{V}{U} \frac{U}{V}; \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{k}{k-U} \frac{V-U}{U \cdot V}.$$

Il primo caso conduce subito alle ipersfere; rimane da esaminare il secondo. Le equazioni rimaste di CODAZZI sono:

$$\frac{\partial}{\partial u} \log A_1 = \frac{U'}{U-V} \left\{ 1 - V \frac{A_3}{A_1} \right\}; \quad \frac{\partial}{\partial v} \log A_2 = - \frac{V'}{U-V} \left\{ 1 + U \frac{A_3}{A_2} \right\}$$

e da queste integrando e servendosi delle relazioni già note fra le A_i ,

$$A_1 = \frac{h(k-U)H_2H_3}{(k-U)^2(k-V)^2}; \quad A_2 = \frac{h(k-V)H_1H_3}{(k-U)^2(k-V)^2}; \quad A_3 = \frac{hkH_1H_2}{(k-U)^2(k-V)^2}$$

ove h è una nuova costante d'integrazione.

Notiamo ancora qui che, le U e V essendo definite a meno della stessa costante addittiva, si può da per tutto porre U e V in luogo di $U-k$ e $V-k$. Così facendo, e scritte al posto dei simboli A_i le espressioni calcolate in principio di questo numero, si hanno tre equazioni differenziali (delle quali due sole indipendenti); si verifica, come nel caso generale, che il sistema è completamente integrabile.

Dalla prima equazione, p. es.,

$$\frac{hk(U-V)^2}{U^2V^2} = -\frac{1}{2}(U'' - V'') + \frac{1}{2} \frac{U'^2 + V'^2}{U \cdot V}$$

si ha con successive derivazioni rispetto ad u

$$(U''' / U')' = -12hkU' / U^4$$

che integrata dà

$$\int \frac{\sqrt{U} dU}{\sqrt{a_1 U^3 + a_2 U^2 + a_3 U - 4hk}} = u$$

(l'ultima costante d'integrazione si può fare $=0$). In modo analogo, e con

osservazioni già esposte nel caso generale, si trova

$$\int \frac{\sqrt{-V} dV}{\sqrt{a_1 V^3 + a_2 V^2 + a_3 V - 4h k}} = v.$$

Le superficie $w = \text{cost.}$ nelle nostre V_s hanno l'elemento lineare delle quadriche di S_s scritto in coordinate ellittiche; e siccome H_1, H_2, H_3 non dipendono da w si può pensare che le V_s in esame siano quadriche rotonde intorno ad un piano. E infatti presa una quadrica di S_s riferita ai suoi piani principali come piani coordinati e detto $d\sigma$ il suo elemento lineare, la V_s che nasce facendola ruotare in uno S_4 intorno al piano (yz) ha il

$$ds^2 = d\sigma^2 + x^2 d\theta^2$$

($d\theta$ misura la rotazione infinitesima); cioè in coordinate ellittiche (sulla quadrica di S_s)

$$ds^2 = \frac{1}{4} (\lambda_1 - \lambda_2) \left\{ \frac{\lambda_1 d\lambda_1^2}{(a^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)} - \frac{\lambda_2 d\lambda_2^2}{(a^2 + \lambda_2)(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)} \right\} + \\ + \frac{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} d\theta^2;$$

il confronto fra il ds^2 di partenza e questo ci assicura (data la rigidità del modello del ds^2) che le nostre V_s sono quadriche rotonde intorno ad un piano (principale). Se negli integrali che danno U, V è $a_1 = 0$, si hanno paraboloidi rotondi.

10. Veniamo all'ultimo caso rimasto da esaminare.

Se U e V sono costanti, mentre $W' \neq 0$, si può sempre, con eventuali cangiamenti di parametri, prender le mosse dal

$$ds^2 = (1 + W) du^2 + (1 - W) dv^2 + dw^2.$$

Per esso si ha

$$(12, 12) = \frac{1}{4} W'^2$$

$$(23, 23) = \frac{1}{2} W'' + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - W} W'^2$$

$$(31, 31) = -\frac{1}{2} W'' + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + W} W'^2$$

da cui, con le solite notazioni, segue

$$\frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{2}{1 - W^2}.$$

Le equazioni di CODAZZI non identicamente soddisfatte sono

$$\frac{\partial}{\partial w} \log \frac{A_2}{A_1} = \frac{W'}{2} \frac{A_1 + A_2}{A_3} + \frac{W'}{1 - W^2}; \quad \frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{W'}{2} \frac{A_1 - A_2}{A_3} - \frac{W W'}{1 - W^2}$$

e dalla prima, tenuto conto della relazione fra le A_i , si ha integrando

$$\frac{A_2}{A_1} = h \frac{1+W}{1-W} \quad (h = \text{cost.}).$$

Se $h = 1$, integrando la seconda equazione, si hanno le ipersfere; se invece $h \neq 1$ posto $\frac{1+h}{1-h} = k$, la seconda equazione di CODAZZI si scrive

$$\frac{\partial}{\partial w} \log A_3 = \frac{\partial}{\partial w} \log (1+W) + (1-k) \frac{W'}{(1-W)(k-W)}$$

e da essa si trae

$$A_3 = c \frac{1-W^2}{k-W} \quad (c = \text{cost.} > 0)$$

e con le due relazioni già note si determinano poi A_1 e A_2 . Resta da vedere se si possono soddisfare le equazioni di RIEMANN con queste A_i .

Dalla prima si ha

$$\frac{1}{4} W'^2 = c \frac{1-W}{k-W}$$

quindi

$$\int \frac{\sqrt{k-W}}{\sqrt{1-W^2}} dW = 2\sqrt{c} w$$

la costante dell'ultima integrazione potendosi prender nulla.

Le altre equazioni ne risultano conseguenza, sicchè il ds^2 è determinato. Questo elemento lineare appartiene, come facilmente si verifica, alle iperquadriche di S_4 rotonde intorno a *due* piani principali, ortogonali e incidenti in un sol punto (cioè alle iperquadriche di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{b^2} + t^2 = 1$); quindi queste sono le sole V_3 della nostra famiglia.

E con ciò la discussione è esaurita.

11. Ne riassumiamo il risultato nel seguente teorema:

Le V_3 che ammettono trasformazioni geodetiche proprie, con elemento lineare

$$ds^2 = (U - V)(U - W) du^2 + (V - U)(V - W) dv^2 + (W - U)(W - V) dw^2$$

esistenti in uno S_4 euclideo (insieme a loro trasformate geodetiche) sono:

- 1) le ipersfere,
- 2) le iperquadriche in generale ($U' V' W' \neq 0$),
- 3) le iperquadriche rotonde intorno ad un loro piano principale (per es. $W' = 0$),
- 4) le iperquadriche rotonde intorno a due piani principali (sghebbi) (per es. $U' = V' = 0$),
- 5) le ipersuperficie a curvatura nulla (applicabili su S_3 ;
 $U' = V' = W' = 0$).

12. Possiamo giovarci dei calcoli eseguiti, modificandoli lievemente, per la determinazione delle ipersuperficie esistenti in uno spazio a 4 dimensioni a curvatura costante K , e aventi il solito ds^2 .

Si ricordi a tal fine che le equazioni di GAUSS vengono modificate solo in quanto nei secondi membri al posto dei simboli di RIEMANN ($\alpha\beta, \gamma\delta$) bisogna leggere $\alpha\beta, \gamma\delta = K(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}a_{\beta\gamma})$; quindi le (G_2) restano inalterate, mentre nelle (G_1) al posto di (ik, ik) va messo $(ik, ik) = KH_i H_k$. Le equazioni di CODAZZI restano formalmente inalterate pur di intendere che in esse, p. es. nella forma scritta al n. 6, si abbia

$$A_i = (j\ l, j\ l) = KH_j H_l \quad (i \neq j \neq l).$$

Fra queste A_i vale ancora la relazione $A_1 + A_2 = A_3$, quindi o sono tutt'e tre nulle, e allora la V_3 è a curvatura relativa (all'ambiente) nulla, oppure sono tutte diverse da zero.

Il processo d'integrazione delle equazioni di CODAZZI resta inalterato e conduce per le A_i alle stesse espressioni ottenute nei nn. 7, 8.

Nel caso del n. 7, col significato attuale delle A_i si ha

$$(12, 12) = (K + h) H_1 H_2; \quad (23, 23) = (K + h) H_2 H_3; \quad (31, 31) = (K + h) H_3 H_1$$

quindi si tratta di V_3 a curvatura costante (assoluta $K + h$, relativa h).

Infine nel caso del n. 8 (sempre per $U' V' W' \neq 0$) bisogna integrare il sistema di equazioni che nasce dal sostituire ai primi membri delle equazioni del n. 5 le espressioni dei simboli di RIEMANN tratte dalle A_i , cioè p. es.:

$$(23, 23) = \frac{h U}{(U V W)^2} H_2 H_3 + K H_2 H_3.$$

Il sistema così ottenuto è completamente integrabile; una delle conseguenze algebrico-differenziali è

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{(W-V)^2}{H_1} U'' + \frac{1}{2} V'' - \frac{1}{2} W'' = \\ -\frac{1}{4} \frac{W-V}{H_2^2} \left\{ 2(V-U)^2 + (W-V)^2 \right\} U'' - \\ -\frac{1}{4} \frac{W-V}{H_3^2} \left\{ 2(W-U)^2 + (W-V)^2 \right\} W'' - \frac{1}{4} \frac{(V-W)^2}{H_1^2} (2U-V-W) U'' \\ + \frac{h}{(U V W)^2} (W-V)^2 (U^2 - V W) + K (W-V)^2 (2U - V - W) \end{aligned}$$

e questa successivamente derivata rispetto ad u dà

$$\left[\frac{1}{U'} \left(\frac{U'''}{U'} \right) \right]' = -48 h \frac{U'}{U^3} - 48 K U'$$

da cui integrando

$$\int \frac{\sqrt{U} dU}{\sqrt{-4K U^5 + \alpha_1 U^4 + \alpha_2 U^3 + \alpha_3 U^2 + \alpha_4 U - 4h}} = u$$

e similmente per V e W .

Trovato l'elemento lineare si può anche in questo caso esaurire completamente la ricerca e rendere più espressivo il risultato costruendo effettivamente il modello (unico, per la sua rigidità) di V_3 che lo possiede.

Supponiamo l'ambiente a curvatura positiva unitaria, $K=1$, in modo da poterlo raffigurare nell'ipersfera V_4^* di equazione

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1$$

di uno S_5 euclideo.

Dico che le nostre V_3 sono segate su di essa dagli iperconi che hanno il vertice nel centro dell'ipersfera (sono dunque le analoghe delle coniche sferiche). Basta costruirsi il ds^2 per queste V_3 e confrontarlo con quello ultimamente trovato.

Insieme all'ipersfera

$$\sum_i x_i^2 = 1$$

consideriamo i coni

$$\sum_i \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0.$$

Dall'identità ⁽⁷⁾

$$\sum_i x_i^2 (a_{i+1} - \lambda) (a_{i+2} - \lambda) (a_{i+3} - \lambda) (a_{i+4} - \lambda) = (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda - \lambda_3) (\lambda - \lambda_4)$$

si trae (come nel solito calcolo per la determinazione delle coordinate ellittiche)

$$x_i^2 = \frac{(a_i - \lambda_1) (a_i - \lambda_2) (a_i - \lambda_3) (a_i - \lambda_4)}{P_i}$$

con

$$P_i = (a_i - a_{i+1}) (a_i - a_{i+2}) (a_i - a_{i+3}) (a_i - a_{i+4})$$

quindi sopra una delle V_3 in esame, cioè sopra l'intersezione dell'ipersfera con un determinato cono, per es. $\lambda_4 = 0$,

$$x_i^2 = \frac{a_i}{P_i} (a_i - \lambda_1) (a_i - \lambda_2) (a_i - \lambda_3);$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ saranno le coordinate curvilinee dei punti della V_3 .

Ma dall'identità precedente, per $\lambda_4 = 0$, si ha su tutta la V_3

$$\sum x_i^2 a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4} = 0$$

cioè

$$\sum \frac{1}{P_i} (a_i - \lambda_1) (a_i - \lambda_2) (a_i - \lambda_3) = 0$$

quindi

$$\sum \frac{1}{P_i} = 0; \quad \sum \frac{a_i}{P_i} = 0; \quad \sum \frac{a_i^2}{P_i} = 0; \quad \sum \frac{a_i^3}{P_i} = 0.$$

Ancora dalla stessa identità, uguagliando i coefficienti di λ nei due

⁽⁷⁾ S'intende che se $i + j > 5$, $a_{i+j} = a_{i+j-5}$.

membri, si ha

$$\sum x_i^2 (a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} + a_{i+1} a_{i+2} a_{i+4} + a_{i+1} a_{i+3} a_{i+4} + a_{i+2} a_{i+3} a_{i+4}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

dalla quale segue fra l'altro

$$\sum \frac{a_i^2}{P_i} = 1.$$

Le identità rilevate per le a_i permettono di calcolare facilmente il $d s^2$. Per esempio il coefficiente di $d \lambda_1^2$ vale

$$\frac{1}{4} \frac{\sum \frac{a_i}{P_i} (a_i - \lambda_2) (a_i - \lambda_3) (a_{i+1} - \lambda_1) (a_{i+2} - \lambda_1) (a_{i+3} - \lambda_1) (a_{i+4} - \lambda_1)}{(a_1 - \lambda_1) (a_2 - \lambda_1) (a_3 - \lambda_1) (a_4 - \lambda_1) (a_5 - \lambda_1)}$$

cioè per le precedenti

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) \lambda_1}{4 Q_5 (\lambda_1)}$$

Q_5 essendo un polinomio di quinto grado in λ_1 ; analogamente si hanno i coefficienti di $d \lambda_2^2$, $d \lambda_3^2$; l'elemento lineare così ottenuto è proprio del tipo richiesto. Dunque:

Le nostre V_s negli S_4 a curvatura costante positiva K sono segate sull'ipersfera di S_5 , di raggio $\sqrt{K}$, dai coni quadrici col vertice nel centro di essa.

Sono insomma le V_s che per proiezione stereografica dell'ipersfera sopra un S_4 euclideo danno luogo alle V_s analoghe alle cicliidi.

Rimarrebbero da esaminare i casi $U' V' \neq 0$, $W' = 0$, e $U' = V' = 0$, $W' \neq 0$; i risultati dei nn.¹ 9, 10 vengono modificati solo in quanto i polinomi che figurano a denominatore degli integrali (iperellittici nel primo caso, ellittici nel secondo) aumentano il loro grado di un'unità (quindi sono di grado 4 e 3 rispettivamente). Analoga alla precedente è la costruzione dei modelli aventi questi elementi lineari.

§ 4. V_3 ESISTENTI IN S_4 EUCLIDEO O A CURVATURA COSTANTE
CON ELEMENTO LINEARE

$$ds^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) (k - W) + dn^2.$$

13. Dalle espressioni dei simboli di RIEMANN per il ds^2 precedente si hanno le equazioni di GAUSS:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2 &= -\frac{1}{2} \Lambda \cdot (k - W) \left(\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \Lambda^2 W'^2 = (12, 12) \\ \Omega_{22} \Omega_{33} - \Omega_{23}^2 &= \Omega_{33} \Omega_{11} - \Omega_{31}^2 = \frac{1}{4} \frac{\Lambda W''}{k - W} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda W'' = (23, 23) = (31, 31) \end{aligned} \right\} \quad (G_1)$$

$$\Omega_{12} \Omega_{23} - \Omega_{13} \Omega_{22} = \Omega_{23} \Omega_{31} - \Omega_{21} \Omega_{33} = \Omega_{31} \Omega_{12} - \Omega_{32} \Omega_{11} = 0. \quad (G_2)$$

Qui, esclusa la soluzione evidente delle V_3 applicabili su S_3 , sono possibili due casi: o $(12, 12) (23, 23) (31, 31) \neq 0$, oppure $(12, 12) = 0 (23, 23) = (31, 31) = 0$.

14. Mettiamoci nella prima ipotesi. Allora (n. 3, I) sono

$$\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{31} = 0; \quad \Omega_{11}^2 = \Omega_{22}^2 = (12, 12); \quad \Omega_{33}^2 = \frac{(13, 13)^2}{(12, 12)}.$$

Le equazioni di CODAZZI divengono

$$\frac{\partial \log \Omega_{11}}{\partial v} = \frac{\partial \log \Lambda}{\partial v}; \quad \frac{\partial \log \Omega_{11}}{\partial n} = -\frac{1}{2} \frac{W'}{k - W} \left\{ 1 + \Lambda (k - W) \frac{\Omega_{33}}{\Omega_{11}} \right\} \quad (C_1)$$

$$\frac{\partial \log \Omega_{11}}{\partial u} = \frac{\partial \log \Lambda}{\partial u}; \quad \frac{\partial \log \Omega_{11}}{\partial n} = -\frac{1}{2} \frac{W'}{k - W} \left\{ 1 + \Lambda (k - W) \frac{\Omega_{33}}{\Omega_{11}} \right\} \quad (C_2)$$

$$\frac{\partial \Omega_{33}}{\partial u} = \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial v} = 0 \quad (C_3)$$

e danno $\Omega_{33} = \Omega_{33}(w)$; $\Omega_{11} = \Lambda \cdot \varphi(w)$, e per $\varphi(w)$ l'equazione differenziale

$$\frac{d \log \varphi(w)}{d w} = - \frac{1}{2} \frac{W'}{k - W} \left\{ 1 + (k - W) \frac{\Omega_{33}}{\varphi(w)} \right\}.$$

Bisogna vedere se si può soddisfare a queste con le espressioni delle Ω_{ii} fornite dalle equazioni di GAUSS. Poichè Ω_{33} è funzione della sola w , tale dev'essere pure

$$\frac{1}{\Omega_{33}^2} = \frac{(12, 12)}{(13, 13)^2} = \frac{-\frac{k - W}{2 \Lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2} \right) - \frac{W'^2}{4}}{\left(\frac{1}{4} \frac{W'^2}{k - W} + \frac{W''}{2} \right)^2}$$

e perciò occorre e basta che sia Λ soluzione dell'equazione

$$-\frac{1}{2 \Lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2} \right) = c \text{ (costante).}$$

L'interpretazione geometrica è immediata; l'espressione a destra divisa per $k - W$ dà la curvatura di una superficie $w = \text{cost.}$ nel punto (u, v) : essa è dunque costante $\left(= \frac{c}{k - W} \right)$.

Si ha quindi

$$\Omega_{33} = \frac{\frac{1}{4} \frac{W'^2}{k - W} + \frac{W''}{2}}{\sqrt{c(k - W) - \frac{1}{4} W'^2}}$$

e perciò dev'essere $c > 0$, anzi tale da rendere positivo il radicando.

Dall'equazione di GAUSS rimasta si ha finalmente

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Lambda \sqrt{c(k - W) - \frac{1}{4} W'^2}; \quad \varphi(w) = \sqrt{c(k - W) - \frac{1}{4} W'^2}.$$

Se si portano queste espressioni nell'equazione differenziale in $\varphi(w)$ si trova ch'essa è identicamente soddisfatta, quindi W non è soggetta ad alcuna condizione.

Si può domandare se fra queste V_3 (indeformabili in S_4) ve ne siano

a curvatura costante h (necessariamente $h > 0$). Deve essere in tal caso:

$$(12, 12) = \Lambda^2 \left\{ c(k-W) - \frac{1}{4} W'^2 \right\} = h \Lambda^2 (k-W)^2$$

$$(31, 31) = (23, 23) = \Lambda \left\{ \frac{1}{4} \frac{W'^2}{k-W} + \frac{1}{2} W'' \right\} = h \Lambda (k-W)$$

si hanno quindi le due equazioni differenziali in W :

$$\frac{1}{4} W'^2 + h(k-W)^2 - c(k-W) = 0$$

$$\frac{1}{2} W'' + \frac{1}{4} \frac{W'^2}{k-W} - h(k-W) = 0.$$

Ma la prima è un integrale primo della seconda; infatti derivandola e separando il fattore $W' \neq 0$, si ha

$$\frac{1}{2} W'' - 2h(k-W) = -c$$

e sostituendo nella prima stessa e dividendo per $k-W \neq 0$ si ottiene appunto la seconda. Eseguendo l'integrazione della prima, e prescindendo da costanti inessenziali si ha

$$k-W = \frac{c}{h} \operatorname{sen}^2 \sqrt{h} w$$

(si potrebbe far a meno di h passando ad un ds^2 simile).

15. Gli elementi lineari del n.º precedente appartengono a V_3 di rotazione intorno ad un asse (l'ultimo, in particolare, ad una ipersfera); il profilo meridiano, data l'arbitrarietà di W , è arbitrario.

Per la forma (2') dell'elemento lineare trasformato di (2) si può anche per esso costruire una V_3 di rotazione in S_4 che lo possieda.

16. Supponiamo $(23, 23) = 0$, $(31, 31) = 0$.

Si ha

$$\frac{1}{2} \frac{W'^2}{k-W} + W'' = 0$$

da cui integrando, per $W' \rightarrow 0$, e prescindendo da costanti inessenziali

$$k - W = w^2.$$

Inoltre per l'annullarsi di quei due simboli deve essere

$$\Omega_{13} = \Omega_{23} = \Omega_{33} = 0; \quad \Omega_{11} \Omega_{22} - \Omega_{12}^2 = (12, 12).$$

Le equazioni di CODAZZI non identicamente soddisfatte sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log \Lambda}{\partial v} (\Omega_{11} + \Omega_{22}); \quad \frac{\partial \Omega_{11}}{\partial w} = \frac{\Omega_{11}}{w} \\ \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Omega_{12}}{\partial v} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \log \Lambda}{\partial u} (\Omega_{22} + \Omega_{11}); \quad \frac{\partial \Omega_{22}}{\partial w} = \frac{\Omega_{22}}{w}. \end{aligned}$$

Si ha intanto

$$\Omega_{11} = \varphi_1(u, v) w; \quad \Omega_{22} = \varphi_2(u, v) w$$

e perciò dall'ultima equazione di GAUSS

$$\Omega_{12} = w \sqrt{\varphi_1 \varphi_2 + \Lambda^2} + \frac{\Lambda}{2} \left(\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2} \right) = w \sqrt{\Delta}$$

e per le equazioni di CODAZZI rimaste

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} &= \frac{\partial \sqrt{\Delta}}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \Lambda}{\partial v} (\varphi_1 + \varphi_2) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} &= \frac{\partial \sqrt{\Delta}}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \Lambda}{\partial u} (\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Può forse convenire di assumere come incognite $\theta_1 = \frac{\varphi_1}{\Lambda}$ e $\theta_2 = \frac{\varphi_2}{\Lambda}$; indicando ora con k la curvatura di Λ ($du^2 + dv^2$) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} &= \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda \sqrt{\theta_1 \theta_2 + 1 - k}}{\partial u} - \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial \log \Lambda}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial u} &= \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda \sqrt{\theta_1 \theta_2 + 1 - k}}{\partial v} + \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial \log \Lambda}{\partial u}. \end{aligned}$$

Ad ogni soluzione (θ_1, θ_2) di questo sistema corrisponde una V_3 del nostro tipo, certo deformabile perchè le espressioni delle Ω_{rs} , soddisfacenti

alle equazioni di GAUSS-CODAZZI, non sono determinate in modo unico dalle equazioni stesse.

Del resto l'effettiva esistenza e deformabilità in S_4 delle V_3 in esame si prova subito geometricamente.

Sopra un'ipersfera di raggio unitario si costruisca una superficie (iniziale) il cui quadrato dell'elemento lineare sia $d\sigma^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2)$. Il cono V_3 che la proietta dal centro dell'ipersfera ha proprio

$$ds^2 = w^2 d\sigma^2 + dw^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) w^2 + dw^2$$

quando si assuma come parametro w la distanza del punto che si considera dal centro. Ad ogni flessione della superficie iniziale corrisponde una deformazione per applicabilità della V_3 .

Ciò vale qualunque sia Λ ; se però la superficie iniziale ha curvatura gaussiana (assoluta) $= 1$, cioè se è a curvatura (relativa) nulla considerata entro l'ipersfera (e solo in questo caso) la varietà risulta applicabile su S_3 . Basta provare che se e solo se

$$\frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \Lambda}{\partial v^2} = -2\Lambda$$

è $(12, 12) = 0$; il che è immediato essendo ora $k - W = w^2$.

Ci si può domandare se insieme ad una V_3 del tipo esaminato esista in S_4 anche una sua trasformata geodetica.

Poichè al

$$ds^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) (k - W) + dw^2$$

corrisponde l'altro

$$ds'^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) \frac{k - W}{kW} + \frac{dw^2}{W^2}$$

per le nostre V_3 ($W = k - w^2$) si ha

$$ds'^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) \frac{w^2}{k(k - w^2)} + \frac{dw^2}{(k - w^2)^2} \quad (k \geq 0).$$

Per vedere se questo ds' può esistere in S_4 è opportuno cambiare il parametro w in modo da poter confrontare il ds' trasformato con quelli già riconosciuti esistenti in S_4 .

Posto $dt = \frac{dw}{a^2 - w^2}$ se $k = a^2 > 0$, ovvero $dt = \frac{dw}{a^2 + w^2}$ se $k = -a^2$ si ha

$$ds'^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) \frac{\sinh^2 at}{a^2} + dt^2$$

oppure

$$ds'^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) \frac{\sin^2 at}{a^2} + dt^2.$$

Nessuno di questi elementi lineari rientra nei tipi trovati, almeno in generale; non nell'ultimo per la presenza del $\sinh^2 at$ o del $\sin^2 at$; non nei precedenti essendo ora Λ qualsiasi.

Però se Λ è tale da dare a $\Lambda(du^2 + dv^2)$ curvatura costante, il secondo ds' appartiene, come s'è trovato, ad un'ipersfera.

17. Rimane da esaminare l'ipotesi $W = \text{costante}$. È evidente che in questo caso si ha un modello del ds^2 in un cilindro di S_4 la cui sezione retta (in S_3) ha l'elemento $ds^2 = c \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2)$, $c > 0$.

Queste V_3 ammettono non soltanto trasformazioni geodetiche, ma anche per parallelismo di LEVI-CIVITA⁽⁸⁾. Se in particolare il ds^2 è a curvatura nulla le V_3 corrispondenti sono applicabili su S_3 .

18. Riassumendo:

Le V_3 di elemento lineare $ds^2 = \Lambda(u, v) (du^2 + dv^2) (k - W) + dw^2$ esistenti in S_4 euclideo sono:

- 1) *ipersuperficie rotonde intorno ad una retta (rigide; W arbitrario).*
- 2) *ipersuperficie coniche o cilindriche (deformabili; Λ arbitrario);* queste ammettono trasformate geodetiche in S_4 solo quando le superficie $w = \text{cost.}$ sono a curvatura costante.
- 3) *applicabili su S_3 .*

19. Se l'ambiente ha curvatura costante $K_0 \neq 0$ si hanno risultati del tutto simili. Sempre i secondi membri delle (G_2) sono nulli, mentre nelle (G_1) al posto di (12, 12) e di (23, 23) = (13, 13) bisogna leggere rispettivamente (12, 12) — $K_0 \Lambda^2 (k - W)^2$ e (23, 23) — $K_0 \Lambda (k - W)$. Si presentano quindi gli stessi casi precedenti.

⁽⁸⁾ Cfr. la mia Nota: *Le trasformazioni puntuali fra varietà che conservano il parallelismo di Levi-Civita* [Rend. Accad. Lincei, 1920, I].

Quando tutte le Ω_{ik} sono determinate dal ds^2 si ha

$$\Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{31} = 0$$

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Lambda(u, v) \sqrt{c(k-W) - K_0(k-W)^2 - \frac{1}{4}W'^2}$$

$$\Omega_{33} = \frac{\frac{1}{4} \frac{W'^2}{k-W} + \frac{1}{2} W'' - K_0(k-W)^2}{\sqrt{c(k-W) - K_0(k-W)^2 - \frac{1}{4}W'^2}}$$

essendo c la curvatura costante del $ds^2 = \Lambda(du^2 + dv^2)$ e W affatto arbitraria.

Quando ciò non accade ($\Omega_{22}\Omega_{33} - \Omega_{23}^2 = \Omega_{11}\Omega_{33} - \Omega_{13}^2 = 0$) rimane $\Lambda(u, v)$ arbitraria, mentre si ha $k-W = \cos^2(\sqrt{K_0}w)$ oppure $= \cosh^2(\sqrt{-K_0}w)$ secondo che $K_0 > 0$ oppure $K_0 < 0$.