ÜBER DIE AUTOMORPHE COLLINEATIONSGRUPPE DES RATIONALEN NORMALKEGELS n . ORDNUNG.

Von **Hans Mohrmann** (Karlsruhe i. B.).

Adunanza del 27 novembre 1912.

EINLEITUNG.

Wie Herr ENRIQUES ¹⁾ gezeigt hat, lassen sich alle endlichen kontinuierlichen Gruppen von CREMONA'schen Transformationen in der Ebene durch birationale Transformationen auf 3 Typen (nebst ihren Untergruppen) zurückführen, nämlich ²⁾:

1) Die 8-gliedrige Collineationsgruppe;

2) Die 6-gliedrige Gruppe der quadratischen Transformationen mit 2 festen Punkten, d. h. falls man die beiden Punkte durch eine Collineation in die absoluten Punkte wirft, die Gruppe der direkten Kreisverwandtschaften (bei welchen die absoluten Punkte nicht mit einander vertauscht werden);

3) Die $(n + 5)$ -gliedrigen Gruppen von JONQUIÈRES'schen Transformationen n . Ordnung, welche ein Strahlenbüschel und zugleich ein lineares System von Kurven irgend einer Ordnung n mit dem Mittelpunkt jenes Büschels als gemeinsamen $(n - 1)$ -fachen Punkte und mit ebenfalls gemeinsamen Tangenten in diesem Punkte in sich überführen.

Während nun die Gruppe der Kreisverwandtschaften ebenso wie die allgemeine Collineationsgruppe der Ebene oft studiert und wohl bekannt sind, liegt über die JONQUIÈRES'schen Gruppen oder — was auf dasselbe hinausläuft — die automorphe Collineationsgruppe des rationalen Normalkegels n . Ordnung, soviel ich sehe, nur eine Arbeit vor: *Sopra un gruppo continuo di trasformazioni di JONQUIÈRES nel piano* von Herrn ENRIQUES ³⁾. Ich hielt daher ein neuerliches Eingehen auf die Struktur dieser interessanten Gruppe um so weniger für überflüssig, als die Arbeit des Herrn ENRIQUES eine rein begriffliche ist, während meine Untersuchungen sich auf die *endlichen* Glei-

¹⁾ *Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane nel piano* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. II (1^o semestre 1893), S. 468-473].

²⁾ FANO, *Continuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip*. [Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III, 1, S. 289-388], S. 342.

³⁾ Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. II (1^o semestre 1893), S. 532-538.

chungen der Gruppe stützen, und daher eine vielleicht nicht ganz unwillkommene Ergänzung der ENRIQUES'schen Arbeit bilden. Es kommt hinzu, dass die Resultate des Herrn ENRIQUES in einem nicht unwesentlichen Punkte der Korrektur zu bedürfen scheinen.

Herr ENRIQUES geht aus von der Betrachtung der $(n+5)$ -gliedrigen automorphen Collineationsgruppe G_{n+5} des rationalen Normalkegels n . Ordnung K_2^n . Diese ist, wie begrifflich evident, holoedrisch isomorph mit derjenigen Untergruppe ⁴⁾ Γ_{n+5} der affinen Gruppe des R_{n+1} , welche eine dem « unendlich-fernen » R_n des R_{n+1} angehörende rationale Normalkurve n . Ordnung in sich überführt, die durch eine Correlation aus der Enveloppe des K_2^n hervorgeht ⁵⁾. Nun hat LIE ⁶⁾ gezeigt, dass die allgemeine affine Gruppe des R_N 3 und nur 3 invariante Untergruppen enthält mit bezüglich $N^2 + N - 1$, $N + 1$ und N Parametern, deren erste die « allgemeinste lineare » Gruppe ist, welche alle « Volumina » ungeändert lässt. Die Γ_{n+5} enthält daher sicher *wenigstens* 3 *invariante kontinuierliche Untergruppen* und zwar sind diese eine Γ_{n+4} , der Durchschnitt der Γ_{n+5} mit der Gruppe aller eigentlich-volumentreuen affinen Transformationen des R_{n+1} , eine Γ_{n+2} und endlich eine Γ_{n+1} , welche der Durchschnitt der Γ_{n+4} mit der Γ_{n+2} ist. Herr ENRIQUES zeigt, dass die Γ_{n+5} oder vielmehr, was auf dasselbe hinausläuft, die entsprechende G_{n+5} *keine weitere invariante Untergruppe* besitzt und sucht die *geometrischen Eigenschaften* zu ermitteln, welche diese Untergruppen charakterisieren, um sodann die Ergebnisse auf die JONQUIÈRES'schen Gruppen der Ebene zu übertragen. Allein die Interpretation des Herrn ENRIQUES, nach welcher die grösste kontinuierliche invariante Untergruppe G_{n+4} der G_{n+5} von denjenigen (speziellen) Collineationen gebildet wird, für welche ein (weiterer) Coincidenzpunkt an den Scheitel des K_2^n unendlich nahe heranrückt, ist nicht korrekt.

Es ist richtig, dass die Collineationen der G_{n+4} ⁷⁾ für Kegel gerader Ordnung dadurch vor den allgemeinen Collineationen der G_{n+5} ausgezeichnet sind, dass ein Coincidenzpunkt der Collineation an den Scheitel des Kegels herangerückt ist. Der Sachverhalt ist jedoch ein ausserordentlich merkwürdiger: *es ist ein ganz bestimmter, durch projektive Eigenschaften bezüglich des K_2^n wohl definierter Coincidenzpunkt, der an den Scheitel des K_2^n GERADER Ordnung heranrückt, der aber für die Kegel UNGERADER Ordnung nicht heranrücken kann, weil er für diese gar nicht existiert.* Die $n+1$ im allgemeinen nicht in dem Scheitel des K_2^n liegenden Coincidenzpunkte sind nämlich den Wurzeln einer gewissen *reciproken Gleichung* vom $(n+1)$. Grade zugeordnet. Ist n gerade, so

4) Diese Untergruppe ist für $n=2$ holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Ähnlichkeits-Transformationen des R_3 .

5) l. c. ³⁾, S. 537.

6) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, Teubner), Bd. I (1888), S. 562 u. S. 572.

7) d. h. der kontinuierlichen $(n+4)$ -gliedrigen invarianten Untergruppe. Für die aus zwei diskreten kontinuierlichen Scharen bestehende invariante Untergruppe (G_{n+4}, H_{n+4}) gilt der Satz des Textes nicht. (Continuierlich ist hier im LIE'schen Sinne, d. h. continuierlich im complexen Gebiete zu verstehen.)

hat die Gleichung eine *isolierte* Wurzel, andernfalls sind sämtliche Wurzeln *gepaart*. Gerade jener *isolierten* Wurzel aber entspricht der ausgezeichnete Coincidenzpunkt der Collineationen der G_{n+5} für die Kegel gerader Ordnung ⁸⁾. Infolgedessen bleibt auch für die entsprechenden Transformationen der JONQUIÈRES'schen Gruppen in der Ebene bei ungeradem n die Coincidenzkurve n . Ordnung der allgemeinen Transformation erhalten, während sie bei geradem n für jede Transformation der $(n+4)$ -gliedrigen *continuirlichen* invarianten Untergruppe der Gesamtgruppe degeneriert.

Die besprochene Merkwürdigkeit, wäre vielleicht an dieser Stelle kaum der Rede wert gewesen, wenn sie einen abgeschlossenen Erscheinungskomplex ausmachte. Allein sie ist nur *ein* Sympton: der letzte Grund für die noch bei vielen anderen Fragen, z. B. der Frage nach den reellen *continuirlichen* Scharen der G_{n+5} hervortretenden *Verschiedenheiten* für gerades und ungerades n liegt viel tiefer. Er ist in den verschiedenen *Zusammenhangsverhältnissen* der Kegel gerader und ungerader Ordnung im Sinne der *Analysis situs* zu suchen.

Um so merkwürdiger mag es erscheinen, dass es einfache geometrische Eigenschaften giebt, welche den Transformationen der genannten Untergruppen für gerades und ungerades n gemeinsam zukommen, und dass auch für das Zerfallen der erwähnten Coincidenzkurve vollständige für gerades und ungerades n gemeinsam gültige Kriterien aufgestellt werden können.

§ I.

Einführung der Study'schen Normal-Coordinationen eines Jonquières'schen Gebietes n . Ordnung 1. Art für die Punkte des K_2^n . Canonische Gleichungen des K_2^n .

Für das Studium der automorphen Collineationsgruppe des zweidimensionalen irreduciblen rationalen Normal-Kegels n . Ordnung K_2^n im linearen projektiven Punktraume R_{n+1} [und damit auch der $(n+5)$ -gliedrigen Gruppen von JONQUIÈRES'schen Transformationen n . Ordnung in der Ebene] wird es von grosser Wichtigkeit sein, eine Parameter-Darstellung des K_2^n einzuführen, deren Elemente als *Coordinationen* der Punkte AUF der Kegelfläche benutzt werden können und eine einfache Darstellung der genannten Gruppe ermöglichen. Nun können bei geeigneter Wahl der homogenen projektiven Coordinationen $x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}$ die Gleichungen des K_2^n in Parameter-Darstellung

---

⁸⁾ Uebrigens bildet weder für die Kegel ungerader Ordnung, noch für diejenigen gerader Ordnung die Gesamtheit der Collineationen, für welche ein (weiterer) Coincidenzpunkt an den Scheitel des Kegels herangerückt ist, überhaupt eine Gruppe.

immer auf die folgende Form gebracht werden:

$$(I) \quad \begin{cases} x_0 = t_0^n \\ x_1 = t_1^n \\ x_2 = t_1^{n-1} t_2 \\ x_3 = t_1^{n-2} t_2^2 \\ \dots \dots \dots \\ x_{n+1} = t_2^n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben für jedes $n \geq 1$ einen bestimmten Sinn, wenn man als Kegel 1. Ordnung ⁹⁾ das Strahlenbüschel betrachtet. Dabei stellen die Parameter:

$$t_0^n, \quad t_1, \quad t_2$$

alle Punkte des K_2^n und zwar *umkehrbar eindeutig* dar, wenn sie in dem Sinne als « *homogen* » erklärt werden, dass zwei Wertsysteme:

$$t_0^n, \quad t_1, \quad t_2$$

und

$$\rho^n t_0^n, \quad \rho t_1, \quad \rho t_2 \quad (\rho \neq 0)$$

als *aequivalent* angesehen werden sollen, das Wertsystem 0, 0, 0 aber (und nur dieses) *ausgeschlossen* wird. t_1 und t_2 haben bei dieser Art der Homogenität das *Gewicht* 1, während t_0^n das Gewicht n hat, was schon durch die Bezeichnung der Indices hat angedeutet werden sollen. Dass die Parameter-Darstellung (I) umkehrbar eindeutig ist, erkennt man unmittelbar, wenn man beachtet, dass die Punkte der rationalen Normalkurve n . Ordnung:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = t_1^n \\ x_2 = t_1^{n-1} t_2 \\ x_3 = t_1^{n-2} t_2^2 \\ \dots \dots \dots \\ x_{n+1} = t_2^n \end{cases}$$

in dem n -dimensionalen Raume $x_0 = 0$ und damit die Erzeugenden des K_2^n ein-eindeutig auf das binäre Gebiet $t_1:t_2$ bezogen sind. Man hat daher:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4} = \dots = \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

$$t_0^n = \frac{x_0}{x_1} t_1^n = \frac{x_0}{x_2} t_1^{n-1} t_2 = \frac{x_0}{x_3} t_1^{n-2} t_2^2 = \dots = \frac{x_0}{x_{n+1}} t_2^n.$$

Die Parameter t können demnach als homogene Koordinaten auf der *gesamten* Kegelfläche benutzt werden. Wegen der noch näher zu besprechenden engen Beziehungen, welche zwischen der automorphen Collineationsgruppe des K_2^n und den JONQUIÈRES'schen Gruppen in der Ebene bestehen, kann man das von der Kegelfläche, betrachtet als Punktgebilde, getragene Gebiet, passend als JONQUIÈRES'sches Gebiet bezeichnen. Die

⁹⁾ cfr. FANO, *Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sé* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. X (1896), S. 1-15], S. 8.

Coordinationen t_0, t_1, t_2 spielen für ein solches Gebiet die gleiche Rolle, wie die gewöhnlichen homogenen Coordinationen $t_0:t_1:t_2$ für ein ternäres Gebiet. Sie geben eine *adaequate arithmetische Beschreibung* des genannten Gebietes. Ich habe sie daher als [STUDY'sche ¹⁰⁾] *Normal-Coordinationen eines JONQUIÈRES'schen Gebietes n. Ordnung* [1. Art ¹¹⁾] bezeichnet.

Aus den Gleichungen (1), die wir als *canonische* ¹²⁾ *Gleichungen* des K_2^n bezeichnen wollen, folgt unmittelbar, dass der rationale Normalkegel n . Ordnung als Durchschnitt von $\binom{n}{2}$ n -dimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeiten M_n^2 dargestellt werden kann. Denn die Elimination der Parameter aus den Gleichungen (1) führt auf die folgenden in Gestalt einer gleich 0 gesetzten Matrix geschriebenen SEGRE'schen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2.

Zur Analysis situs des K_2^n ¹³⁾. Ein Satz metrischen Inhalts: K_2^n , welche eine eingliedrige automorphe Gruppe von projektiven Transformationen gestatten, deren Bahnkurven geodätische Kreise auf dem Kegel sind.

Um die *Unterschiede* zu erkennen, die für *gerades und ungerades* n bei Behandlung der automorphen projektiven Gruppe des K_2^n auftreten, ist es nützlich, wenn nicht unerlässlich, sich den *Zusammenhang* des K_2^n im Sinne der *Analysis situs* klar zu machen. Ein beliebiger reeller, nicht durch den Scheitel S des K_2^n hindurchgehender R_n schneidet den reellen K_2^n nach einer reellen irreduciblen rationalen Normalkurve n . Ordnung. Eine solche Kurve ist im Sinne der projektiven Geometrie *unicursal*, und zwar ist der reelle

¹⁰⁾ Diese Coordinationen verdanke ich Herrn Professor STUDY, der übrigens ähnliche Coordinationen schon vielfach und mit grossem Vorteil verwandt hat. {vergl. STUDY, *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, Teubner, 1903), § 27; und STUDY, *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie*, [Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematische-Physische Classe, Bd. LIII (1901), S. 338-403]. — Siehe ferner auch W. BLASCHKE, *Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euclidischen Ebene* [Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXI (1910), S. 3-60], S. 49 f.}

¹¹⁾ Die Erforderlichkeit dieses Zusatzes wie überhaupt die Notwendigkeit eines besonderen Terminus' wird die Behandlung der Frage nach den mit den JONQUIÈRES'schen Gruppen der Ebene gleich zusammengesetzten Collineations-Gruppen des R_N erweisen.

¹²⁾ SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*. [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Bd. XIX (1883-84), S. 355-372].

¹³⁾ Die Untersuchungen dieses und der folgenden Paragraphen beziehen sich, soweit *reelle* Gebilde in Frage kommen, und nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, ausschliesslich auf Kegel mit ∞^2 reellen Punkten. (vergl. im Uebrigen § 5).

Zug der Kurve für gerades n paar und für ungerades n unpaar. Nun lässt sich aber ein paarer Zug einer Kurve durch stetige Deformation eines Kegelschnittes, ein unpaarer Zug durch Deformation einer geraden Linie erzeugen. Die Kegel gerader Ordnung haben mithin im Sinne der Analysis situs denselben Zusammenhang ¹⁴⁾ wie der irreducible Kegel 2. Ordnung, die Kegel ungerader Ordnung wie die projektive Ebene oder besser noch der projektive Kegel 1. Ordnung, das Strahlenbüschel, als Punktgebilde betrachtet. Hieraus folgen unmittelbar die folgenden Sätze ¹⁵⁾:

Die reellen projektiven irreduciblen rationalen Normalkegel gerader Ordnung sind im Sinne der Analysis situs (geschlossene) zweiseitige Flächen vom Typus des TORUS', die sich durch einen geschlossenen und einen offenen Schnitt (2. Art) in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zerschneiden lassen.

Die Kegel ungerader Ordnung hingegen sind (geschlossene) einseitige Flächen vom Typus der projektiven Ebene, die sich durch einen geschlossenen Schnitt (2. Klasse) in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zerschneiden lassen.

Zerschneidet man jede Erzeugende des projektiven K_2^n erstens im Schnittpunkte mit einem nicht durch den Scheitel des Kegels hindurch gehenden R_n , zweitens in seinem Scheitel, so zerfällt der K_2^n gerader Ordnung in zwei getrennte Bestandteile, der Kegel ungerader Ordnung hingegen nicht. Dieser Unterschied ist für die Behandlung der automorphen projektiven Gruppe des K_2^n von einschneidender Bedeutung. Er hängt aufs engste damit zusammen, dass der Effekt einer Spiegelung an einem Punkte ¹⁶⁾ im R_{n+1} mit gerader Dimensionenzahl als das Resultat einer Bewegung aufgefasst werden kann, im R_{n+1} mit ungerader Dimensionenzahl hingegen nicht. Deuten wir die Verhältnisse:

$$\frac{x_i}{x_0} \equiv X_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1)$$

als cartesische Coordinaten in einem euklidischen R_{n+1} , so stellen die Gleichungen

$$(3) \quad X_i = \frac{a_i t_1^{n+1-i} t_2^{i-1}}{t_0^n} \quad (a_i \neq 0)$$

einen K_2^n dar, dessen Scheitel im Coordinaten-Anfang liegt, dem die X_i - und X_{n+1} -Coordinaten -Axe als Erzeugende angehören und für den endlich die beiden R_n

$$X_1 = 0 \quad \text{und} \quad X_{n+1} = 0$$

$(n-2)$ -fach osculierende ¹⁷⁾ Räume sind. Ein Punkt des Kegels mit den STUDY'schen Coordinaten $t_1, t_2, -t_0^n$ ist das Spiegelbild eines Punktes mit den Coordinaten $t_1, t_2, +t_0^n$ bezüglich des Scheitels des Kegels. Bild und Spiegelbild des K_2^n bezüglich

¹⁴⁾ Vergl. RIEMANN, *Theorie der ABEL'schen Funktionen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIV (1857), S. 115-155]; *Lehrsätze aus der Analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien* [Ibid., id. S. 105-110]; *Dissertation* (1851). Ferner DEHN & HEGARD, *Analysis situs* [Encyclopädie der Mathematische Wissenschaften, III, 1, Heft 1, S. 189 ff.].

¹⁵⁾ Die natürlich für alle Trägerflächen JONQUIÈRES'scher Gebiete n . Ordnung gelten.

¹⁶⁾ Vergl. STUDY, *Von den Bewegungen und Umlegungen* [Mathem. Anal., Bd. XXXIX, S. 447].

¹⁷⁾ d. h. Räume, die n unendlich benachbarte Erzeugende mit dem Kegel gemein haben.

seines Scheitels sind für ungerades n (gegenüber der Gruppe der Bewegungen) *congruente* Figuren, wie überhaupt durch den « unendlich fernen » R_n und den Scheitel des Kegels eine Gebietseinteilung des K_2^n *ungerader* Ordnung nicht erfolgt.

Kegel *gerader* Ordnung hingegen werden durch den Scheitel des Kegels und den unendlich fernen R_n in zwei Teile, eine « *positive* » und eine « *negative* » « *Hälfte* » zerlegt. Die positive Hälfte geht durch Spiegelung an dem Scheitel des K_2^n in die negative Hälfte über; aber die beiden Hälften sind *nicht congruent*, d. h. sie lassen sich nicht durch Bewegung Punkt für Punkt « zur Deckung bringen ». Sind a_i und a_{n+1} positiv, so sind die erste und letzte Coordinate X_i und X_{n+1} eines Punktes der positiven Kegelhälfte beide ≥ 0 , für Punkte der negativen Hälfte ≤ 0 und zwar sind nur für den Scheitel des Kegels beide Coordinaten gleichzeitig $= 0$. Hierdurch sind die beiden Kegelhälften *analytisch charakterisiert*.

Unterwerfen wir nunmehr die Punkte des Kegels K_2^n (3) mit den STUDY'schen Coordinaten t_{0^n} , t_1 , t_2 den Transformationen der reellcontinuirlichen eingliedrigen projektiven ¹⁸⁾ Gruppe

$$(4) \quad \begin{cases} t_{0^n}^* = t_{0^n} \\ t_1^* = t_1 \cos \alpha - t_2 \sin \alpha \\ t_2^* = t_1 \sin \alpha + t_2 \cos \alpha, \end{cases}$$

so beschreiben die reellen eigentlichen und im Endlichen gelegenen Punkte des Kegels *ganz im Endlichen gelegene Bahnkurven*. Jede dieser Kurven besteht für Kegel ungerader Ordnung aus dem (einzigen) reellen Zuge der Schnittkurve des Kegels mit einer gewissen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit 2. Grades M_n^2 und zwar wird diese Schnittkurve durch Spiegelung an dem Scheitel des K_2^n in sich übergeführt.

Für Kegel *gerader* Ordnung wird die Bahnkurve eines Kegelpunktes P ebenfalls durch eine gewisse M_n^2 aus dem K_2^n ausgeschnitten. Aber sie ist *nur der eine der beiden reellen Züge*, welche die Schnittkurve des K_2^n gerader Ordnung mit der M_n^2 besitzt. Der andere Zug ist die Bahnkurve des Spiegelbildes des Punktes P bezüglich des Scheitels des Kegels. Ist P ein Punkt der positiven Kegelhälfte, so liegt seine Bahnkurve bezüglich der Gruppe (4) ganz auf der positiven Kegelhälfte und umgekehrt. Läuft α von 0 bis π , so kehrt für Kegel gerader Ordnung jeder Punkt an seinen Ausgangspunkt zurück; für Kegel ungerader Ordnung hingegen fällt jeder Punkt mit dem Spiegelbilde des zugehörigen Ausgangspunktes bezüglich des Kegelscheitels zusammen, und erst für $\alpha = 2\pi$ kehrt hier jeder Punkt an seinen Ausgangspunkt zurück.

Dieser Sachverhalt wird noch deutlicher durch den folgenden bemerkenswerten Satz:

Deutet man die X_i als rechtwinklige cartesische Coordinaten, so lassen sich die Coefficienten a_i in den Gleichungen (3) des Kegels K_2^n auf eine (und im Wesentlichen nur auf eine Weise) so bestimmen, dass die Bahnkurven der Kegelpunkte bezüglich der durch

¹⁸⁾ Dass diese Gruppe eine Collineationsgruppe im R_{n+1} des K_2^n induciert, wird aus dem folgenden unmittelbar hervorgehen.

die Gleichungen (4) inducierten eingliedrigen collinearen Gruppe Curven constanten Abstandes von dem Kegelscheitel (geodätische Kreise auf dem Kegel) sind.

Für Kegel gerader Ordnung sind diese Kurven (sphärische) rationale Normal-Curven n . Ordnung, d. h. sämtliche Schnittkurven des K_2^n mit dem Büschel concentrischer Kugeln:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 = R^2$$

zerfallen für gerades n in zwei rational getrennte Bestandteile, welche durch Spiegelung an dem Scheitel des Kegels ineinander übergehen.

Die gesuchten Coefficienten in den Gleichungen (3) der metrisch, aber im Sinne der projektiven Geometrie natürlich nicht spezialisierten Kegel K_2^n sind:

$$a_i = \sqrt{\binom{n}{i-1}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1).$$

Das giebt für $n=2$ einen Kreis-oder Drehkegel mit der geraden Linie $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$ als Drehachse, und die Gleichungen (4) stellen die eingliedrige Gruppe von Drehungen dar, welche der K_2^2 um seine Achse gestattet. Für $n=1$ stellen die Gleichungen natürlich die Gruppe der Drehungen einer Ebene in sich um einen festen Punkt dar. Für $n > 2$ hingegen induciert die allgemeine Transformation der Gruppe (4) keine Bewegung (wohl aber eine «aequi-affine» Collineation, d. h. eine Collineation, welche die «Volumina» der n -fach ausgedehnten Körper im R_{n+1} des K_2^n ungedändert lässt).

Zum Beweise unserer Sätze bezeichnen wir die zu dem Punkte mit den STUDY'schen Coordinaten t_{0^n} , t_1 , t_2 gehörigen rechtwinkligen cartesischen Coordinaten mit X_i , die Coordinaten eines ihm vermöge einer Transformation der Gruppe (4) entsprechenden Punktes mit X_i^* . Alsdann ist für die Punkte des K_2^n :

$$\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 = \frac{t_1^{2n}}{t_{0^n}^2} + \binom{n}{1} \frac{t_1^{2(n-1)} t_2^2}{t_{0^n}^2} + \binom{n}{2} \frac{t_1^{2(n-2)} t_2^4}{t_{0^n}^2} + \dots + \frac{t_2^{2n}}{t_{0^n}^2} = \frac{1}{t_{0^n}^2} (t_1^2 + t_2^2)^n$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} X_i^{*2} = \frac{1}{t_{0^n}^{*2}} (t_1^{*2} + t_2^{*2})^n.$$

Nun ist aber:

$$t_{0^n}^* = t_{0^n} \quad \text{und} \quad t_1^{*2} + t_2^{*2} = t_1^2 + t_2^2$$

und zwar für jeden Wert von α , d. h. der Abstand eines Kegelpunktes P von dem Scheitel des Kegels ist eine Invariante der Gruppe (4).

Für die Schnittpunkte des Kegels K_2^n mit einer Kugel des Büschels (5) ist:

$$\frac{1}{t_{0^n}^2} (t_1^2 + t_2^2)^n = R^2$$

oder wenn wir setzen:

$$t_1^2 + t_2^2 = T$$

$$T^n - R^2 t_{0^n}^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich für gerades n in zwei rational getrennte

Bestandteile spalten:

$$(T^{\frac{n}{2}} + R t_{0^n})(T^{\frac{n}{2}} - R t_{0^n}) = 0,$$

d. h. die Schnittkurve des Kegels K_2^n *gerader* Ordnung mit einer beliebigen Kugel des Büschels (5) besteht aus den Schnittkurven des K_2^n mit den beiden parallelen R_n :

$$X_1 + \binom{\frac{n}{2}}{1} X_3 + \binom{\frac{n}{2}}{2} X_5 + \dots + X_{n+1} = \pm R, \quad \text{Q. E. D.}$$

§ 3.

Die endlichen Gleichungen der $(n+5)$ -gliedrigen automorphen Collineationsgruppe G_{n+5} des K_2^n .

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zum Studium der allgemeinen automorphen projektiven Gruppe des K_2^n . Dabei legen wir die canonischen Gleichungen (1) des Kegels zu Grunde.

Ein beliebiger n -dimensionaler Raum R_n

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_{n+1} x_{n+1} = 0 \quad (u_0 \neq 0),$$

welcher nicht durch den Scheitel bzw. den uneigentlichen Punkt des Kegels hindurchgeht, schneidet den K_2^n nach einer irreduciblen rationalen Normal-Curve n . Ordnung. Jede derartige Kurve lässt sich daher durch eine Gleichung in den Coordinaten

$$t_{0^n}, \quad t_1, \quad t_2$$

von der folgenden Form darstellen:

$$u_0 t_{0^n} + u_1 t_1^n + u_2 t_1^{n-1} t_2 + \dots + u_{n+1} t_2^n = 0 \quad (u_0 \neq 0),$$

wo u_0 nicht verschwinden darf, während die übrigen u beliebiger Werte fähig sind. Berücksichtigen wir nun, dass bei jeder projektiven Transformation, welche den Kegel (1) in sich überführt, einerseits die Erzeugenden untereinander vertauscht werden und andererseits die irreduciblen Normal-Curven n . Ordnung in ebensolche Kurven übergehen, so erkennt man, dass *jede* solche Transformation sich durch die STUDY'schen Coordinaten *notwendigerweise* folgendermassen darstellen lassen muss:

$$(6_a) \quad \begin{cases} t_{0^n}' = {}^n c_0 t_{0^n} + {}^n c_1 t_1^n + {}^n c_2 t_1^{n-1} t_2 + \dots + {}^n c_{n+1} t_2^n \\ t_1' = a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2' = b_1 t_1 + b_2 t_2. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, dass der besonderen Homogenität der STUDY'schen Coordinaten entsprechend jedes Coefficienten-System

$${}^n c_i, \quad a_i, \quad b_i$$

mit jedem Coefficienten-System:

$$\rho {}^n c_i, \quad \rho a_i, \quad \rho b_i \quad (\rho \neq 0)$$

Die *Substitutions-Determinante* D der Gleichungen (7_a) lässt sich unschwer ermitteln, wenn man beachtet, dass die allgemeine Substitution (6) immer als Produkt zweier Substitutionen der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} t_{0n}^* &= {}^n c_0 t_{0n} + {}^n c_1 t_1^n + {}^n c_2 t_1^{n-1} t_2 + \cdots + {}^n c_{n+1} t_2^n \\ t_1^* &= a_1 t_1 + a_2 t_2 \\ t_2^* &= b_2 t_2 \\ t_{0n}^{**} &= {}^n c_0^* t_{0n}^* + {}^n c_1^* t_1^{*n} + {}^n c_2^* t_1^{*n-1} t_2^* + \cdots + {}^n c_{n+1}^* t_2^{*n} \\ t_1^{**} &= a_1^* t_1^* \\ t_2^{**} &= b_1^* t_1^* + b_2^* t_2^*. \end{aligned}$$

Nun ist aber für das Produkt T^{**} der beiden Transformationen T und T^*

$$\begin{aligned} {}^n c_0^{**} &= {}^n c_0^* \cdot {}^n c_0 \\ \delta^{**} &= \delta^* \cdot \delta. \end{aligned}$$

Bildet man die Gleichungen der durch die Transformationen T und T^* inducierten Collineationen (7) und bildet ihr Produkt, so ergibt sich leicht:

$$D^{**} = {}^n c_0^{**} \cdot \delta^{** \binom{n+1}{2}}$$

als Ausdruck des Wertes der Substitutions-Determinante einer jeden Collineation (7). Diese ist mithin, wie es sein muss, unter den angegebenen Voraussetzungen (6_b) von 0 verschieden.

Zusammenfassend können wir daher sagen, wenn wir noch beachten, dass die allgemeine Transformation (6) von $n+5$ wesentlichen Parametern abhängt:

Die Gesamtheit der Collineationen, welche einen rationalen Normal-Kegel n . Ordnung K_2^n in sich transformieren, bildet eine $(n+5)$ -gliedrige kontinuierliche ²⁰⁾ Gruppe G_{n+5} , die durch die Gleichungen (7) bzw., soweit die Punkte des K_2^n selbst in Frage kommen, durch die Gleichungen (6) dargestellt ist.

§ 4.

Die reellen Scharen der G_{n+5} .

Offenbar kann man den Coefficienten ${}^n c_0$ in den Gleichungen (6) bzw. (7) immer in der Form

$${}^n c_0 \equiv k \delta^{\frac{n}{2}}$$

schreiben, wo k eine von dem Proportionalitätsfactor ρ unabhängige Zahl ist.

Unter Voraussetzung eines K_2^n mit ∞^2 reellen Punkten und bei Beschränkung auf

²⁰⁾ Im gewöhnlichen, LIE'schen Sinne des Wortes.

das reelle Gebiet ist k eine reelle oder (für ungerades n und negatives δ) rein imaginäre Zahl. Das ermöglicht ohne Mühe die diskreten kontinuierlichen Scharen anzugeben, in welche unsere G_{n+5} im reellen Gebiete zerfällt. Dabei ist freilich noch ein Punkt zu beachten. Das Vorzeichen von k ist für gerades n wesentlich, da einerseits das Vorzeichen von δ , wie man den Proportionalitätsfactor ρ im reellen Gebiete auch wählen mag, nicht geändert werden kann, und andererseits das Vorzeichen von ρ^n für gerades n stets positiv ist. Für ungerades n hingegen ist das Vorzeichen von k unwesentlich, in Uebereinstimmung damit, dass $\delta^{\frac{n}{2}}$ hier doppelwertig ist. Wählen wir einen bestimmten Wert von $\delta^{\frac{n}{2}}$, so stellen zwar auch für ungerades n zwei Transformationen, deren Coefficienten sich (lediglich) durch das Vorzeichen von k unterscheiden, zwei voneinander verschiedene Transformationen dar. Aber wir können für ungerades n immer von der einen der genannten Transformationen reell-continuirlich zu der andern übergehen. Wir brauchen zu diesem Zwecke die vorgelegte Substitution nur etwa in der folgenden Form zu schreiben:

$$\begin{aligned} t_{0n}^* &= k \cdot \delta_\alpha^{\frac{n}{2}} t_{0n} + [{}^n c_1 t_1^n + {}^n c_2 t_1^{n-1} t_2 + \cdots + {}^n c_{n+1} t_2^n] \cos^n \alpha \\ t_1^* &= (a_1 \cos \alpha - a_2 \sin \alpha) t_1 + (a_1 \sin \alpha + a_2 \cos \alpha) t_2 \\ t_2^* &= (b_1 \cos \alpha - b_2 \sin \alpha) t_1 + (b_1 \sin \alpha + b_2 \cos \alpha) t_2. \end{aligned}$$

Denn es ist für jeden Wert von α

$$\delta_\alpha = \delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Lassen wir also α von 0 bis π laufen, so geht die ursprüngliche Substitution $[+k]$ [nach Umkehrung der Vorzeichen aller Coefficienten der Substitution ($\rho = -1$)] reell-continuirlich in die Substitution $[-k]$ über.

Zusammenfassend können wir daher sagen:

Die im complexen Gebiete continuierliche Gruppe G_{n+5} ist im reellen Gebiete gemischt. Und zwar zerfällt sie für gerades n in 4 getrennte continuierliche Scharen, die durch die folgenden vier Systeme von Ungleichungen charakterisiert sind:

$$\begin{aligned} \delta &> 0, & k &> 0 \\ \delta &> 0, & k &< 0 \\ \delta &< 0, & k &> 0 \\ \delta &< 0, & k &< 0. \end{aligned}$$

Die erste der vier Scharen hat für sich die Gruppeneigenschaft und bildet mit jeder der drei übrigen Scharen einzeln zusammengenommen wieder eine Gruppe. Für ungerades n zerfällt die G_{n+5} im reellen Gebiete in nur zwei getrennte continuierliche Scharen, welche durch die Ungleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta &> 0 \\ \delta &< 0 \end{aligned} \right\}, \quad k \neq 0$$

woraus aufs neue die *Bedeutungslosigkeit des Vorzeichens von k bezüglich der G_{n+5} für ungerades n hervorgeht.*

§ 5.

Fortsetzung: die reellen Scharen der G_{n+5} für den reellen K_2^n gerader Ordnung 2. Art.

Bezeichnet man mit LIE ²²⁾ eine Gruppe von Transformationen als reell, wenn sowohl die Veränderlichen als auch die in den Gleichungen der Gruppe auftretenden Parameter reell sind, so ist die Frage nach den reellen Scharen von Collineationen, welche einen rationalen Normal-Kegel n . Ordnung in sich überführen, durch die Ausführungen des vorigen Paragraphen noch keineswegs erledigt. Denn für *gerades n* gibt es neben dem reellen Kegel mit ∞^2 reellen Punkten noch eine *zweite Art reeller Kegel*, vorausgesetzt dass man mit SEGRE ²³⁾ (im complexen Gebiete) ein Gebilde reell oder imaginär nennt, je nachdem es mit seinem conjugiert complexen zusammenfällt oder nicht.

Eine Normalform für die Gleichungen dieses reellen Kegels gerader Ordnung 2. Art erhält man aus den Gleichungen (1), die man als canonische Gleichungen des reellen projektiven Kegels 1. Art bezeichnen kann, indem man setzt:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 + i y_{n+1} \\ x_{n+1} = \pm (y_1 - i y_{n+1}) \\ x_2 = y_2 + i y_n \\ x_n = \mp (y_2 - i y_n) \\ x_3 = y_3 + i y_{n-1} \\ x_{n-1} = \pm (y_3 - i y_{n-1}) \\ \dots \dots \dots \\ x_{\frac{n+2}{2}} = i y_{\frac{n+2}{2}}, \end{array} \right. \quad (i = \sqrt{-1})$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem

$$n + 2 \equiv 0 \pmod{4}$$

oder

$$n \equiv 0 \pmod{4}$$

ist. Die homogenen Coordinaten y_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n+1$) sind auf Grund der Gleichungen (A) mit den STUDY'schen Coordinaten t_0, t_1, t_2 durch die folgenden

²²⁾ LIE-ENGEL, I. c. ⁶⁾, Bd. III (1893), S. 360.

²³⁾ *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [Mathematische Annalen, Bd. XL (1892), S. 413-467].

Gleichungen verknüpft:

$$(I'') \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = t_0^n \\ y_1 = \frac{1}{2}(t_1^n \pm t_2^n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2i}(t_1^n \mp t_2^n) \\ y_2 = \frac{1}{2}(t_1^{n-1} t_2 \mp t_1 t_2^{n-1}) \\ y_n = \frac{1}{2i}(t_1^{n-1} t_2 \pm t_1 t_2^{n-1}) \\ y_3 = \frac{1}{2}(t_1^{n-2} t_2^2 \pm t_1^2 t_2^{n-2}) \\ y_{n-1} = \frac{1}{2i}(t_1^{n-2} t_2^2 \mp t_1^2 t_2^{n-2}) \\ \dots \dots \dots \\ y_{\frac{n+2}{2}} = \frac{1}{i} t_1^{\frac{n}{2}} t_2^{\frac{n}{2}}. \end{array} \right.$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} t_{0,n}^* &= \pm t_{0,n} \\ t_1^* &= t_2 \\ t_2^* &= -t_1, \end{aligned}$$

so geht jeder Punkt $t_{0,n}$, t_1 , t_2 des K_2^n (I'') in seinen conjugiert complexen Punkt über: *Der K_2^n ist reell.* Andererseits bestehen aber die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + y_n^2 + y_{n+1}^2 &= 0 \\ y_2^2 + y_3^2 + y_{n-1}^2 + y_n^2 &= 0 \\ y_3^2 + y_4^2 + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ y_{\frac{n}{2}}^2 + y_{\frac{n+2}{2}}^2 + y_{\frac{n+4}{2}}^2 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. die Coordinaten der Punkte des Kegels erfüllen eine Gleichung, deren linke Seite eine *positiv-definite quadratische Form*:

$$\sum_1^{n+1} A_k x_k^2$$

ist. *Ausser dem Scheitel ist daher kein Punkt des K_2^n 2. Art reell.*

Die reelle automorphe Collineationsgruppe des K_2^n 2. Art wird, wie man auf Grund der canonischen Gleichungen (I'') unschwer erkennt, durch die Gleichungen (6) dargestellt, wenn die Coefficienten ${}^n c$, a , b den folgenden Bedingungen genügen:

$${}^n c_0 \equiv k \delta^{\frac{n}{2}} \neq 0, \quad k \text{ reell;}$$

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

wo $\bar{z}$ die conjugiert complexe Zahl von z bedeutet.

§ 6.

24

$$k = 1 \quad \text{für gerades } n \text{ und}$$

$$k^2 = 1 \quad \text{für ungerades } n$$

charakterisiert ist; eine G_{n+2} , für welche

$$a_1 = b_2 \quad \text{und} \quad a_2 = b_1 = 0$$

ist, und endlich eine G_{n+1} , welche der Durchschnitt der G_{n+4} mit der G_{n+2} ist:

Die G_{n+4} bildet zusammen mit der kontinuierlichen Schar H_{n+4} , welche durch die Gleichungen

$$k = -1 \quad \text{für gerades } n \text{ und}$$

$$k^2 = -1 \quad \text{für ungerades } n$$

definiert ist, eine (schon im complexen Gebiete) gemischte Gruppe (G_{n+4} , H_{n+4}). Die G_{n+2} ist im complexen Gebiete kontinuierlich. Im reellen Gebiete hingegen zerfällt sie in zwei diskrete kontinuierliche Scharen, welche durch die Ungleichungen

$$k > 0 \quad \text{und} \quad k < 0$$

gegeben sind, und zwar gleichförmig für gerades und ungerades n , wenn man, wie es auf der Hand liegt,

$$\delta^{\frac{n}{2}} = (a^2)^{\frac{n}{2}} = a^n$$

setzt. Die erste der beiden Scharen ($k > 0$) hat für sich die Gruppeneigenschaft. Die G_{n+1} endlich, für welche $k = +1$ ist, bildet zusammen mit der kontinuierlichen Schar H_{n+1} , für welche $k = -1$ ist, eine wiederum schon im complexen Gebiete gemischte Gruppe. Die erste der beiden Scharen dieser Gruppe ($k = +1$) ist, wie man leicht sieht, eine ABEL'sche ²³⁾ Gruppe: das Produkt zweier beliebiger Transformationen der G_{n+1} hat die Eigenschaft der Commutativität.

§ 7.

Geometrische Deutung: die charakteristischen Eigenschaften der reellen Scharen der G_{n+5} .

Noch deutlicher und merkwürdiger treten die Unterschiede für gerades und ungerades n in den Eigenschaften der G_{n+5} zu Tage, wenn man ihre geometrische Bedeu-

Gruppe von Transformationen der G_{n+5} , für welche k den absoluten Betrag 1, also die Form

$$k = e^{i\varphi}$$

hat, wo $i = \sqrt{-1}$ und φ als reel vorausgesetzt ist.

²⁶⁾ Vergl. F. KLEIN, *Einleitung in die höhere Geometrie*, Vorlesungen, 2. unverändert. Abdruck, 1907, S. 17 des II. Teiles.

tung betrachtet. Zu diesem Zwecke schicke ich eine kurze Bemerkung über die reelle projektive Beziehung auf einem und demselben reellen Träger eines binären Gebietes voraus, welche für das Folgende grundlegend ist. Die in Frage stehende Projektivität lässt sich unter Voraussetzung eines reellen Koordinatensystems immer in der folgenden Form darstellen:

$$(I) \quad \begin{cases} x_1^* = a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ x_2^* = b_1 x_1 + b_2 x_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \equiv \delta \neq 0,$$

wo die a_i und b_i reelle Werte haben. Bezeichnet man die *Coincidenzpunkte* der Projektivität mit A und B , den einem Punkte allgemeiner Lage P entsprechenden Punkt mit P^* , so hat bekanntlich ²⁷⁾ für eine *bestimmte* Projektivität das Doppelverhältnis

$$(ABP P^*)$$

für jeden Punkt P einen und denselben constanten Wert d . Ist ρ_a die den Punkt A , ρ_b die den Punkt B bestimmende Wurzel der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \rho & a_2 \\ b_1 & b_2 - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - (a_1 + b_2)\rho + \delta = 0,$$

so hat d den Wert:

$$d = \frac{\rho_a}{\rho_b}.$$

Sind ρ_a und ρ_b von einander verschieden, so kann die Projektivität (I) unter zu Grundlegung eines reellen oder conjugiert complexen Koordinaten-Systems immer in der folgenden canonischen Form dargestellt werden:

$$(I') \quad \begin{cases} y_1^* = \rho_a y_1 \\ y_2^* = \rho_b y_2, \end{cases}$$

wo $y_2 = 0$ die Gleichung des Punktes A und $y_1 = 0$ die Gleichung des Punktes B ist.

Sind ρ_a und ρ_b *conjugiert complex*, also A und B conjugiert complexe Punkte, so ist die Projektivität sicher « *gleichsinnig* ». Und es ist

$$\delta = \rho_a \cdot \rho_b > 0.$$

Sind hingegen A und B *reell*, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) ρ_a und ρ_b haben *gleiches Vorzeichen*. Dann ist die Projektivität wiederum *gleichsinnig*. Und es ist auch hier $\delta > 0$;

2) ρ_a und ρ_b haben *entgegengesetztes Vorzeichen*. Dann ist die Projektivität *gegensinnig*. Und es ist $\delta < 0$.

In jedem Falle also entsprechen positiven Werten von δ *gleichsinnige*, negativen Werten *gegensinnige* Projektivitäten.

Ist *speziell* $\rho_a = -\rho_b$, was nur möglich ist, wenn ρ_a und ρ_b reell oder rein ima-

²⁷⁾ Siehe z. B. DOEHLEMAN, *Geometrische Transformationen*, (Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlags-handlung), I. Teil (1902), S. 81.

ginär sind, so ist $d = -1$ und mithin:

$$(ABP'P) = (ABP'P)$$

d. h. Pund P' trennen A und B *harmonisch*; die projektive Beziehung ist *involutorisch*.

Sind endlich ρ_a und ρ_b *einander gleich*, also sicher reell, so fallen A und B zusammen und d hat den *hier nicht charakteristischen* Wert $+1$. Die Projektivität ist *gleichsinnig* und heisst *parabolisch*, wenn sie nicht die *Identität* ist. In diesem Falle kann man als canonische Gleichungen der Projektivität (I) die folgenden bezeichnen:

$$(I'') \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \rho_a x_1 + a x_2 \\ \dot{x}_2 = \rho_a x_2 \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \rho_b x_1 \\ \dot{x}_2 = b x_1 + \rho_b x_2, \end{cases}$$

in denen alle Coëfficienten bei Voraussetzung eines reellen Coordinaten-Systems reell sind und welche für $a = 0$ bzw. $b = 0$ die Identität darstellen.

Nach diesen elementaren Vorbereitungen ²⁸⁾ kehren wir zu den Gleichungen (6) bzw. (6') unserer Gruppe G_{n+5} zurück. Zunächst sieht man, dass den Wurzeln ρ_a und ρ_b der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \rho & a_2 \\ b_1 & b_2 - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - (a_1 + b_2)\rho + \delta = 0$$

entsprechend, für jede nicht der G_{n+2} oder der G_{n+1} angehörende Transformation der G_{n+5} 2 und nur 2 Erzeugende des Kegels K_2^n in Ruhe bleiben. Ist $\rho_a = \rho_b$, so fallen diese Coincidenzgeraden und mit ihnen die auf ihnen gelegenen Coincidenzpunkte ²⁹⁾ der Collineation zusammen. Weiter erkennt man auf Grund der vorbereitenden Untersuchungen unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Die Transformationen der reellen Scharen der G_{n+5} , für welche $\delta > 0$ ist, vertauschen die Erzeugenden des K_2^n gerader und ungerader Ordnung gleichsinnig (oder lassen sie in Ruhe), diejenigen, für welche $\delta < 0$ ist, vertauschen die Kegelerzeugenden ungleichsinnig.

Nicht viel schwerer ist es, die geometrische Bedeutung des Vorzeichens von k zu erkennen ³⁰⁾. Dieses ist, wie wir schon gesehen haben, nur für die K_2^n gerader Ordnung von Belang. Die Kegel gerader Ordnung haben eine «positive» und eine «negative» «Hälfte». Infolgedessen kann man ihren Erzeugenden, *als Elemente betrachtet*, einen bestimmten gegenüber den Transformationen der (die Erzeugenden dreigliedrig vertauschenden) G_{n+5} *invarianten Durchlaufungssinn* zuschreiben, was für die Kegel ungerader Ordnung nicht möglich ist ³¹⁾. Das ist so zu verstehen: denken wir uns den K_2^n mit zwei Schichten von Erzeugenden überdeckt, so können wir die Erzeugenden der beiden Schichten so mit *Pfeilen* versehen, dass, wenn wir die eine der beiden Schichten einer beliebigen Transformation der G_{n+5} unterwerfen, *jede* Erzeugende

²⁸⁾ Die jedoch in Anbetracht ihrer Wichtigkeit keineswegs überflüssig zu sein scheinen: wenigstens hat der Verfasser der vorliegenden Arbeit vergeblich nach einer korrekten Darstellung dieser Dinge gesucht.

²⁹⁾ Und überhaupt alle Coincidenzpunkte der Collineation ausser dem im Kegelscheitel liegenden.

³⁰⁾ Vergl. auch die an früherer Stelle gegebene Darstellung der G_{n+5} in Hyperebenen-Coordinationen.

³¹⁾ Vergl. die Ausführungen des § 2 der vorliegenden Arbeit.

bestimmt, die für die canonische Form (8) die folgende merkwürdige Gestalt annimmt:

$$(9) \quad (k - \sigma)(d^{\frac{n}{2}} - \sigma)(d^{\frac{n}{2}-1} - \sigma)(d^{\frac{n}{2}-2} - \sigma) \dots (d^{-\frac{n}{2}} - \sigma) = 0.$$

Der Wurzel $\sigma = k$ der Gleichung (9) entspricht der in dem Kegelscheitel liegende Coincidenzpunkt der Collineation (8). Die übrigen mehrfach genannten $n + 1$ Coincidenzpunkte aber sind durch die Wurzeln einer reciproken Gleichung bestimmt, welche die Besonderheit hat, dass ihre sämtlichen Wurzeln Potenzen einer und derselben von 0 und ± 1 verschiedenen Zahl sind.

Ist eine Wurzel dieser reciproken Gleichung (10):

$$(10) \quad (d^{\frac{n}{2}} - \sigma)(d^{\frac{n}{2}-1} - \sigma)(d^{\frac{n}{2}-2} - \sigma) \dots (d^{-\frac{n}{2}} - \sigma) = 0$$

$\sigma = k$, so rückt ein (weiterer) Coincidenzpunkt an den Scheitel des Kegels heran. Auf Grund unserer canonischen Gleichungen (8) erkennt man unmittelbar, dass die Gesamtheit der Collineationen der G_{n+3} , für welche ein beliebiger (weiterer) Coincidenzpunkt an den Scheitel des Kegels herangerückt ist, keine Gruppe bildet³³⁾. Denn wir können die Gleichungen (8) gleichzeitig als canonische endliche Gleichungen der $(n + 4)$ -gliedrigen (nicht invarianten) Untergruppe U_{n+4} der G_{n+3} auffassen, deren Transformationen eine Kegel-Erzeugende zur gemeinsamen festen Coincidenzgeraden haben.

Dagegen gilt ein ähnlicher aber anderer bemerkenswerter Satz. Beachten wir nämlich, dass das Produkt zweier Transformationen:

$$\begin{aligned} t'_1 &= a_1 t_1 + a_2 t_2, & t''_1 &= a'_1 t'_1 + a'_2 t'_2 \\ t'_2 &= & b_2 t_2, & t''_2 &= & b'_2 t'_2 \end{aligned}$$

durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} t''_1 &= a'_1 a_1 t_1 + (a'_1 a_2 + a'_2 b_2) t_2 \\ t''_2 &= & b'_2 b_2 t_2 \end{aligned}$$

gegeben ist, und bezeichnen wir je zwei Coincidenzpunkte zweier Collineationen der U_{n+4} (8) als Punkte gleicher Lage³⁴⁾ bezügl. der gemeinsamen Coincidenz-Kegel-Erzeugenden, wenn sie entsprechenden Wurzel-Werten der geordneten Gleichungen (10) zugeordnet sind, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

Die Gesamtheit der Collineationen der U_{n+4} (8), für welche je ein Coincidenzpunkt gleicher Lage bezüglich der den Transformationen der U_{n+4} gemeinsamen Coincidenz-Kegel-Erzeugenden an den Scheitel des Kegels K^n_2 herangerückt ist, bildet eine INVARIANTE $(n + 3)$ -gliedrige Untergruppe U_{n+3} der U_{n+4} .

Vermöge den Gleichungen (9) bzw. (10) können wir sämtliche Coincidenzpunkte zweier allgemeinen Collineationen der U_{n+4} (8) umkehrbar eindeutig auf einander beziehen. Es ist nicht schwer die Lagebeziehung der Coincidenzpunkte bezügl. der die U_{n+4} definierenden gemeinsamen Coincidenzgeraden ihrer Transformationen auch geome-

³³⁾ Vergl. die Einleitung zu vorliegender Arbeit.

³⁴⁾ Die geometrische Berechtigung zu dieser Bezeichnung werde ich sogleich erweisen.

trisch zu charakterisieren. Und zwar kann das auf folgende Weise geschehen. Bei jeder allgemeinen Collineation in einem R_N ist einem beliebigen Coincidenzpunkte ein und nur ein Coincidenz- R_{N-1} zugeordnet, derjenige nämlich, welchem der betreffende Coincidenzpunkt *nicht* angehört. Nun lassen sich aber für die allgemeine Collineation der in Frage stehenden U_{n+4} (8) die Coincidenz- R_n *in Bezug auf die ausgezeichnete Coincidenz-Gerade*, die Kegel-Erzeugende $t_2 = 0$, bzw.

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \dots, x_{n+1} = 0$$

eindeutig festlegen. Mithin lassen sich auch die Coincidenzpunkte eindeutig charakterisieren. Zunächst giebt es nämlich einen und nur einen Coincidenz- R_n , welcher den Kegelscheitel S nicht enthält. Er schneidet allein den Kegel K_2^n nach einer irreduciblen (rationalen Normal-) Curve der n . Ordnung. *Sämtliche übrigen Coincidenz- R_n gehen durch S hindurch und schneiden aus dem K_2^n die beiden zusammen für n Erzeugende zählenden Coincidenzgeraden des Kegels aus.* Wie selbstverständlich ist, und mit Hilfe der Gleichungen (8) leicht verifiziert werden kann, giebt es unter diesen $n+1$ Coincidenz- R_n einen, welcher die ausgezeichnete die Untergruppe U_{n+4} unserer G_{n+5} definierende Kegel-Erzeugende nicht enthält: ihm ist der auf dieser Erzeugende liegende (von dem Kegel-Scheitel verschiedene) Coincidenzpunkt zugeordnet. Ein zweiter der genannten Coincidenz- R_n enthält die ausgezeichnete Coincidenz-Gerade einfach: ihm entspricht der dem zweiten Factor der geordneten Gleichung (10) zugeordnete Coincidenzpunkt u. s. w. Dem Coincidenz- R_n endlich, welcher die ausgezeichnete Kegel-Erzeugende n -fach zählend enthält, dem mithin die nicht ausgezeichnete Coincidenz-Kegel-Erzeugende überhaupt nicht angehört, entspricht der auf letzterer liegende, dem letzten Factor der Gleichung (10) zugeordnete Coincidenzpunkt.

Für *gerades* n ist einer der in Frage stehenden $n+1$ Coincidenz-Punkte vor allen anderen ausgezeichnet, nämlich derjenige, welcher dem *mittleren* Factor bzw. der *isolierten Wurzel der reciproken Gleichung* (10)

$$(d^{\frac{n}{2}-\frac{n}{2}} - \sigma)$$

bzw.

$$\sigma = 1$$

entspricht. Wir wollen ihn kurz den *ausgezeichneten Coincidenzpunkt* nennen. Der ihm zugeordnete Coincidenz- R_n osculiert den K_2^n längs beiden Coincidenz-Kegel-Erzeugenden *gleich stark*: der nur für gerades n existierende ausgezeichnete Coincidenzpunkt lässt sich mithin auch ohne Bezug auf die festgehaltene die U_{n+4} (8) definierende Coincidenz-Kegel-Erzeugende für eine beliebige allgemeine Collineation der G_{n+5} *eindeutig charakterisieren*. Es wird daher nicht überraschend sein, wenn für Kegel *gerader* Ordnung die Gesamtheit der Collineationen der G_{n+5} , für welche der ausgezeichnete Coincidenzpunkt an den Scheitel des K_2^n herangerückt ist, eine invariante Untergruppe der G_{n+5} bildet. Das ist in der Tat der Fall und zwar ist diese Gruppe, wie unmittelbar ersichtlich, keine andere, als die durch den Wert

$$k = +1$$

definierte *continuierliche* invariante Untergruppe G_{n+4} der G_{n+5} . Damit haben wir den Satz ³⁵⁾ gewonnen:

Die allgemeinen Collineationen der invarianten CONTINUIERLICHEN Untergruppe G_{n+4} der automorphen projectiven Gruppe G_{n+5} des K_2^n haben für Kegel gerader Ordnung die charakteristische Eigenschaft, dass der ausgezeichnete Coincidenzpunkt der allgemeinen Collineation der G_{n+5} , nämlich derjenige, welcher dem längs den beiden Coincidenz-Kegel-Erzeugenden gleichstark osculierenden Coincidenz- R_n nicht angehört, unendlich nahe an den Scheitel des Kegels herangerückt ist.

Ich übergehe eine Diskussion der gemischten invarianten Untergruppe der U_{n+4} (8), für welche gleichzeitig

$$k \text{ bzw. } k^2 = \pm 1 \text{ und } d = \pm 1$$

ist, da ihre Erledigung sich unmittelbar aus dem Verangehenden ergibt. Dagegen halte ich es für unerlässlich, eine geometrische Eigenschaft anzugeben, welche die allgemeine Transformation der continuierlichen G_{n+4} für *ungerades* n charakterisiert.

Zu diesem Zwecke ist es erlaubt den Fall $d = \pm 1$ in der Darstellung (8) auszuschliessen. Alsdann ³⁶⁾ kann die allgemeine Transformation der G_{n+5} (wie schon gesagt) immer folgendermassen dargestellt werden:

$$(II) \quad \begin{cases} x_0^* = kx_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + \dots + C_{n+1}x_{n+1} \\ x_1^* = d^{\frac{n}{2}}x_1 \\ x_2^* = d^{\frac{n}{2}-1}x_2 \\ x_3^* = d^{\frac{n}{2}-2}x_3 \\ \dots \\ x_{n+1}^* = d^{-\frac{n}{2}}x_{n+1} \end{cases}$$

Diese Gleichungen (II) können (unter der Voraussetzung

$$k \neq 0, \quad d \neq 0)$$

gleichzeitig als canonische endliche Gleichungen der $(n+3)$ -gliedrigen Untergruppe U_{n+3} der G_{n+5} angesehen werden, deren Transformationen zwei getrennte Kegel-Erzeugende zu gemeinsamen festen Coincidenzgeraden haben. Jede durch den Scheitel S des K_2^n gehende Achse des Coordinaten-Systems enthält einen (und nur einen) weiteren Coincidenzpunkt der Collineation. Diese Punkte mögen

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{n+1}$$

genannt werden. Wir wollen nun die $n+1$ Doppelverhältnisse

$$d_i = (SX_iP_iP'_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1)$$

³⁵⁾ Man vergleiche diesen Satz mit dem in der Einleitung dieser Arbeit erwähnten ENRIQUES'schen Ergebnisse.

³⁶⁾ Aber auch noch wenn $d = -1$ ist. Doch soll dieser Fall zunächst aus der Betrachtung ausgeschlossen sein.

ins Auge fassen, wo P_i einen beliebigen Punkt allgemeiner Lage auf der die Punkte S und X_i verbindenden Coincidenzgeraden bedeutet. Diese Doppelverhältnisse haben früheren Ausführungen zufolge die Werte:

$$d_i = \frac{k}{d^{\frac{n}{2}+1-i}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1).$$

Bezeichnen wir auf Grund der Ergebnisse über die Lagebeziehung der Coincidenz- R_n bezüglich des K_2^n je zwei durch den Scheitel des Kegels gehende Coincidenz-Geraden

$$SX_i \text{ und } SX_{n+2-i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1)$$

als Paare bezüglich des K_2^n gleichgelegener Coincidenzgeraden einer Collineation (11), so können wir den folgenden bemerkenswerten Satz aussprechen:

Das Produkt der Doppelverhältnisse d_i , welche der Scheitel S des Kegels und ein weiterer Coincidenzpunkt X_i einer allgemeinen Collineation der automorphen Gruppe G_{n+5} des K_2^n mit einem beliebigen Punkte allgemeiner Lage P_i der Verbindsgeraden SX_i und dem ihm vermöge der Collineation entsprechenden Punkte P_i^* bilden, hat für alle Paare bezüglich des Kegels gleichgelegener Coincidenzgeraden einen und denselben constanten Wert k^2 .

Für $k^2 = +1$ ergibt sich hieraus:

$$d_i \cdot d_{n+2-i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1)$$

und für gerades n insbesondere noch:

$$d^{\frac{n+2}{2}} = 1.$$

Da nun allgemein:

$$d_i = (SX_i P_i P_i^*) = \frac{1}{(X_i S P_i P_i^*)}$$

ist, so folgt für $k^2 = +1$:

$$(SX_i P_i P_i^*) = (X_{n+2-i} S P_{n+2-i} P_{n+2-i}^*) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n+1),$$

womit wir unter Berücksichtigung eines aus der projektiven Geometrie der Kegelschnitte in der Ebene bekannten Satzes

die gesuchte, die allgemeine Collineation der *continuierlichen* G_{n+4} für *ungerades* n und gleichzeitig der *gemischten* (G_{n+1} , H_{n+4}) für *gerades* n charakterisierende Eigenschaft gefunden haben. Zusammenfassend können wir sagen:

Die allgemeine Collineation der durch die Gleichung

$$k^2 = +1$$

definierten für gerades n gemischten und für ungerades n kontinuierlichen invarianten Untergruppe (G_{n+4}, H_{n+4}) bzw. G_{n+4} der automorphen Collineationsgruppe G_{n+4} , (6') bzw. (7) des $K_2^n(1)$ hat die charakteristische Eigenschaft jeden Kegelschnitt, welcher zwei bezüglich des Kegels K_2^n gleichgelegene Coincidenzgeraden je in dem nicht mit dem Kegelscheitel zusammenfallenden Coincidenzpunkte berührt, in sich zu transformieren; mit anderen Worten: die allgemeine Collineation der genannten Gruppen induciert in den Ebenen eines jeden Paares gleichgelegener Coincidenzgeraden, insbesondere also in der durch die Coincidenz-Kegel-Erzeugenden bestimmten Ebene eine HERMITE'sche Collineation. Für gerades n unterscheiden sich die Transformationen der Scharen $k = +1$ und $k = -1$ dadurch voneinander, dass die Punkte der ausgezeichneten (isolierten) Coincidenzgeraden im ersten Falle parabolisch, im zweiten aber involutorisch untereinander vertauscht werden.

Ueber die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der invarianten Untergruppen G_{n+2} und G_{n+1} können wir uns nunmehr kurz fassen. Denn die canonischen Gleichungen der G_{n+2} ergeben sich aus den Gleichungen (11) für $d = +1$. Daraus folgt aber unmittelbar ³⁷⁾:

Die Transformationen der G_{n+2} sind Central-Collineationen mit dem Scheitel S des Kegels K_2^n als Centrum und dem R_n

$$(k-1)x_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_{n+1}x_{n+1} = 0$$

als Collineations-Hyper-Ebene. Die allgemeine Collineation der invarianten gemischten Untergruppe G_{n+1} vertauscht die Punkte auf den geraden Linien durch das Centrum der Collineation parabolisch oder involutorisch, je nachdem

$$k = +1 \quad \text{oder} \quad k = -1$$

ist. Die Transformationen der ersten Schar sind paarweise mit einander vertauschbar: sie bilden eine ABEL'sche Gruppe.

§ 9.

Stereographische Projektion des K_2^n auf eine Ebene.

Bekanntlich ³⁸⁾ lässt sich jede Fläche F_2^n eines R_{n+1} von $n-1$ ihrer Punkte aus auf eine Ebene «projizieren». Denn $n-1$ Punkte allgemeiner Lage bestimmen einen R_{n-2} und dieser ein Bündel von ∞^2 R_{n-1} . Jeder dieser R_{n-1} , der nicht unendlich viele Punkte der F_2^n enthält, schneidet sowohl die F_2^n als auch eine beliebige Ebene allgemeiner

³⁷⁾ Vergl. ENRIQUES: l. c. 3), S. 533.

³⁸⁾ DEL PEZZO, *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni* [Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (sezione della Società Reale di Napoli), Ser. I, Bd. XXIV (1885), S. 212-216]. — PICARD-SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars), Bd. II (1906), S. 59.

Lage (die mit dem R_{n-2} keinen Punkt gemein hat) nach einem und nur einem weiteren Punkte. Bei der hierdurch bewirkten « im allgemeinen » ein-eindeutigen Abbildung geht für die rationalen Normal-Kegel n . Ordnung K_2^n das System des Schnittcurven mit den Hyper-Ebenen des R_{n+1} in ein lineares System von ebenen Curven der n . Ordnung mit einem gemeinsamen $(n-1)$ -fachen Punkte und gemeinsamen Tangenten in ihn über, während die automorphe projektive Gruppe G_{n+3} des K_2^n , soweit die Punkte der Kegelfläche selbst in Frage kommen, in eine zu ihr holodrisch isomorphe JONQUIÈRES'sche Gruppe ³⁹⁾ umgewandelt wird.

Lässt man die $n-1$ « Projections-Centren » auf einer durch sie hindurch gehenden irreduciblen (rationalen Normal-) Curve n . Ordnung des K_2^n sämtlich an einen nicht in der Bildebene gelegenen Punkt P , das « Projections-Centrum », heranrücken, so nimmt der R_{n-2} eine eindeutig bestimmte Grenzlage an und die $n-1$ Tangenten in dem $(n-1)$ -fachen Punkte der Bildcurven der überebenen Schnitte des K_2^n fallen zusammen. Hierin liegt für die zu behandelnde JONQUIÈRES'sche Gruppe natürlich keinerlei Beschränkung. Dagegen ergeben sich vor allem für die analytische Darstellung unverkennbare Vorteile: man erhält die Gleichungen der Gruppe ohne Mühe in einer besonders einfachen canonischen Form. Setzen wir wieder voraus der R_{n-2} habe in der bezeichneten Grenzlage keinen Punkt mit der Bildebene gemein, so schneidet jeder durch den R_{n-2} hindurchgehende R_{n-1} (des R_{n+1}) die Bildebene nach einem und nur einem Punkte. Es lässt sich aber andererseits jeder Punkt des K_2^n mit dem R_{n-2} durch einen und nur einen R_{n-1} « verbinden », und zwar sind für verschiedene Punkte des Kegels auch die R_{n-1} von einander verschieden, ausgenommen die Punkte auf der durch das Projections-Centrum hindurchgehenden Erzeugenden. *Durch den geschilderten Prozess wird daher der rationale Normal-Kegel n . Ordnung auf die Ebene genau so abgebildet, wie der irreducible Kegel zweiter Ordnung durch das bekannte Verfahren der stereographischen Projection, in welches unser Prozess für $n=2$ übergeht.*

Die Abbildung ist eindeutig umkehrbar, nur entsprechen dem Projections-Centrum P die ∞^1 Punkte einer $(n-1)$ -fach zählenden geraden Linie g der Bildebene, während sämtlichen Punkten der durch P hindurchgehenden Erzeugenden des K_2^n ein einziger Punkt O auf g als Bildpunkt zugeordnet ist. Die Erzeugenden des K_2^n werden auf das Strahlenbüschel mit dem Fundamentalpunkte O als Mittelpunkt abgebildet. Die Bilder der ∞^{n+1} (nicht durch das Projections-Centrum P hindurchgehenden) irreduciblen Curven n . Ordnung sind Curven n . Ordnung und auch n . Klasse ⁴⁰⁾, welche O zum $(n-1)$ -fachen Punkte und g in O zur gewöhnlichen ⁴¹⁾ (n -fach zählenden) Tangente haben.

³⁹⁾ Vergl. d. Einleitung zu vorliegender Arbeit.

⁴⁰⁾ Da durch den Punkt O ausser g keine weitere Tangente an die Curve gezogen werden kann und der Punkt O für die Curven eine reine Punkt-Singularität ist.

⁴¹⁾ Die Tangente entspricht dualistisch einem höheren « Undulations-Punkte », d. h. einem nicht singulären Punkte einer Curve n . Ordnung, dessen Tangente in dem Punkte n unendlich benachbarte Punkte mit der Curve gemein hat. — Der in Frage stehende singuläre Curvenpunkt O sieht bekanntlich äusserlich bei geradem n wie ein gewöhnlicher Curvenpunkt, bei ungeradem n aber wie eine gewöhnliche Spitze aus.

Schreibt man die Gleichungen des K_2^n in der Form (1), so lässt sich die geschilderte Abbildung analytisch in einfacher Weise folgendermassen darstellen. Wir wählen als Projections-Centrum P den Punkt mit den Coordinaten $t_1 = 0, t_{0^n} = 0$ bzw. den Gleichungen:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0,$$

als R_{n-2} den durch die Gleichungen

$$(12) \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

gegebenen Raum und als Bildebene eine beliebige (zwei-dimensionale) Ebene, welche von den drei R_n (12) nach drei linear unabhängigen geraden Linien geschnitten wird, die wir als Seiten eines Coordinaten Dreiecks

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0$$

in der Bildebene benutzen wollen. Alsdann vermitteln die Gleichungen

$$(13) \quad \begin{cases} x_0 &= \xi_0 \xi_1^{n-1} \\ x_1 &= \xi_1^n \\ x_2 &= \xi_1^{n-1} \xi_2 \\ x_3 &= \xi_1^{n-2} \xi_2^2 \\ \dots &\dots \dots \dots \\ x_{n+1} &= \xi_2^n \end{cases}$$

die in Frage stehende *Abbildung*. Wie man unmittelbar sieht, verhalten sich:

$$x_0 : x_1 : x_2 = \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 \quad (x_1 \neq 0).$$

Mit der Angabe der Coordinaten

$$x_0 : x_1 : x_2$$

eines Punktes des Kegels (1) sind aber die übrigen Coordinaten desselben schon völlig bestimmt. Die gerade Linie $\xi_1 = 0$ ist die erwähnte ausgezeichnete Gerade in der Bildebene, welche dem Projections-Centrum P entspricht. Der Punkt

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0$$

ist der Fundamental-Punkt O der Abbildung.

§ 10.

Die endlichen Gleichungen der Jonquières'schen Gruppen der Ebene in canonicischer Form. Kriterien für die Reducibilität der Coincidenz-Curve n . Ordnung der allgemeinen Transformationen.

Behalten wir die für die Formeln (6') bzw. (7) der G_{n+5} des K_2^n (1) gewählte Bezeichnung der Parameter der Gruppe bei, so lässt sich die vermöge der Abbildung (13) des vorigen Paragraphen in der Ebene inducierte CREMONA'sche Gruppe folgender-

massen darstellen:

$$(14) \quad \begin{cases} \xi_0' = k \delta^{\frac{n}{2}} \xi_0 \xi_1^{n-1} + {}^n c_1 \xi_1^n + {}^n c_2 \xi_1^{n-1} \xi_2 + \cdots + {}^n c_{n+1} \xi_2^n \\ \xi_1' = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)^n \\ \xi_2' = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)^{n-1} (b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2), \end{cases}$$

wo wieder $k \neq 0$ und $\delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ vorausgesetzt ist. Wie man unschwer erkennt, sind die Transformationen der Gruppe (14) JONQUIÈRES'sche ⁴²⁾ Transformationen n . Grades und zwar spezieller Art; die $2(n-1)$ einfachen Fundamental-Punkte der allgemeinen JONQUIÈRES'schen Transformation bilden hier zwei Gruppen von je $n-1$ einander unendlich benachbarten Punkten, deren eine sich überdies mit dem $(n-1)$ -fachen Fundamental-Punkte der Transformation vereinigt hat.

Eine gerade Linie allgemeiner Lage der Ebene ξ wird durch eine Transformation (14) in eine Curve n . Ordnung und n . Klasse übergeführt, welche als Bild einer irreduciblen Normal-Curve n . Ordnung des $K_2^n(1)$ betrachtet werden kann.

Bildet man eine in Bezug auf die STUDY'schen Coordinaten t_0, t_1, t_2 in dem erklärten Sinne homogene rationale ganze Funktion f und substituiert in dieser an Stelle von

$$\begin{matrix} t_0, & t_1, & t_2 \\ \xi_0 \xi_1^{n-1}, & \xi_1, & \xi_2, \end{matrix}$$

so geht f in eine im gewöhnlichen Sinne homogene ganze rationale Funktion F der Veränderlichen ξ_0, ξ_1, ξ_2 über. Die Gleichung $F=0$ stellt alsdann das Bild der auf dem $K_2^n(1)$ liegenden Curve $f=0$ dar. Damit aber sind alle Hilfsmittel gegeben, um sowohl die früheren Ergebnisse über die Structur der G_{n+5} des K_2^n und ihrer charakteristischen Eigenschaften als auch die noch kommenden Untersuchungen über die linearen Systeme von algebraischen Curven auf dem K_2^n zu übertragen. Wir wollen uns jedoch hier damit begnügen, vollständige Kriterien für das Zerfallen der im allgemeinen vorhandenen Coincidenz-Curve n . Ordnung einer der Transformationen (14) aufzustellen.

Da wir, früheren Ausführungen zufolge, die Gleichungen einer jeden Transformation (14) bei passender Wahl des Coordinaten-Systems in der folgenden Form schreiben dürfen:

$$(15) \quad \begin{cases} \xi_0' = k \delta^{\frac{n}{2}} \xi_0 \xi_1^{n-1} + {}^n c_1 \xi_1^n + {}^n c_2 \xi_1^{n-1} \xi_2 + \cdots + {}^n c_{n+1} \xi_2^n \\ \xi_1' = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)^n \\ \xi_2' = (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)^{n-1} b_2 \xi_2, \end{cases}$$

so lässt sich die Gleichung der Coincidenz-Curve immer auf die folgende leicht discutabel

⁴²⁾ DE JONQUIÈRES, *De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres* [Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. II, Bd. III (1864), S. 97 III]. Nouvelles Annales, t. III, serie II (1864), p. 97 ssq.

Form bringen:

$$\begin{vmatrix} \xi_0 \xi_1^{n-1} & \xi_1^n & \xi_1^{n-1} \xi_2 & \xi_1^{n-2} \xi_2^2 & \dots & \xi_2^n \\ 0 & k - d^{\frac{n}{2}} & * & * & \dots & . \\ 0 & 0 & k - d^{\frac{n}{2}-1} & * & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & k - d^{\frac{n}{2}-2} & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k - d^{-\frac{n}{2}} \end{vmatrix} = 0,$$

wo die nicht hingeschriebenen rechts von der Haupt-Diagonale der Determinante stehenden Elemente kein weiteres Interesse haben, während

$$d = (a b p p') = \frac{a_1}{b_2}$$

das Doppelverhältnis bedeutet, das eine beliebige durch den Fundamentalpunkt

$$O \equiv (\xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$$

gehende Gerade allgemeiner Lage p und die ihr entsprechende Gerade p' mit den Coincidenz-Geraden $a \equiv (\xi_2 = 0)$ und b bilden. Bei Ausrechnung der Determinante erhält man *ein einziges Glied*, das die Coordinate ξ_0 enthält und dieses Glied allein hat hier für uns Interesse. Bezeichnen wir mit A und B je den (im allgemeinen nicht mit O zusammenfallenden) Coincidenzpunkt der Transformation (15) auf a bzw. b , und mit P und Q je einen beliebigen Punkt allgemeiner Lage auf a bzw. b und beachten dass:

$$(O A P P') = \frac{k}{d^{\frac{n}{2}}}, \quad (O B Q Q') = \frac{k}{d^{-\frac{n}{2}}} \quad 43)$$

ist, so ergibt sich der folgende Satz:

Bei der allgemeinen Transformation der $(n+5)$ -gliedrigen JONQUIÈRES'schen Gruppe (14) existiert ausser den beiden durch den Fundamentalpunkt O der Transformation hindurchgehenden Coincidenz-Geraden a und b noch eine irreducible Coincidenzcurve n . Ordnung, welche O zum $(n-1)$ -fachen Punkte hat. Diese Coincidenz-Curve degeneriert dann und nur dann in die beiden (mit entsprechenden veränderlichen Multiplizitäten zu zählenden) Coincidenz-Geraden a und b :

1) falls die Geraden des Büschels mit dem Mittelpunkte O parabolisch untereinander vertauscht werden oder in Ruhe bleiben: wenn die Punkte auf der Coincidenz-Geraden $a \equiv b$ bzw. einer beliebigen Fix-Geraden allgemeiner Lage parabolisch untereinander vertauscht werden (oder in Ruhe bleiben);

2) in jedem anderen Falle: wenn das Doppelverhältnis $(O B Q Q')$ gleich einer i Potenz ($i=0, 1, 2, \dots, n$) oder, was dasselbe besagt, das Doppelverhältnis $(O A P P')$

43) Diese Relationen folgen aus den Ausführungen des § 8.

gleich einer $(i - n)$. Potenz des Doppelverhältnisses $d = (abpp')$ ist, insbesondere also, wenn die Punkte einer der beiden Coincidenzgeraden parabolisch untereinander vertauscht werden ($i = 0$ oder n) (oder in Ruhe bleiben).

Speziell zerfällt mithin, falls n gerade ist, die Coincidenz-Curve für jede Transformation der *continuierlichen* $(n + 4)$ -gliedrigen invarianten Untergruppe $k = +1$ der Gesamtgruppe von JONQUIÈRES'schen Transformationen (14); falls n ungerade ist, hingegen nur für diejenigen (keine Gruppe bildenden) Transformationen der Untergruppe, welche die durch den Fundamentalpunkt O gehenden Geraden *involutorisch* oder *parabolisch* untereinander vertauschen oder in Ruhe lassen.

Karlsruhe i. B., den 11. November 1910.

HANS MOHRMANN.

INHALTS-ÜBERSICHT.

	SEITE
Einleitung.	170
§ 1. Einführung der STURDY'schen Normal-Coordinten eines JONQUIÈRES'schen Gebietes n . Ordnung 1. Art für die Punkte des K_2^n . Canonische Gleichungen des K_2^n	172
§ 2. Zur Analysis situs des K_2^n . Ein Satz metrischen Inhalts: K_2^n , welche eine eingliedrige automorphe Gruppe von projektiven Transformationen gestatten, deren Bahnkurven geodätische Kreise auf dem Kegel sind.	174
§ 3. Die endlichen Gleichungen der $(n + 5)$ -gliedrigen automorphen Collineationsgruppe G_{n+5} des K_2^n	178
§ 4. Die reellen Scharen der G_{n+5}	180
§ 5. Fortsetzung: die reellen Scharen der G_{n+5} für den reellen K_2^n gerader Ordnung 2. Art	183
§ 6. Die Zusammensetzung der G_{n+5}	185
§ 7. Geometrische Deutung: die charakteristischen Eigenschaften der reellen Scharen der G_{n+5}	186
§ 8. Fortsetzung: die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der invarianten Untergruppe der G_{n+5}	189
§ 9. Stereographische Projektion des K_2^n auf eine Ebene	195
§ 10. Die endlichen Gleichungen der JONQUIÈRES'schen Gruppen der Ebene in canonischer Form. Kriterien für die Reducibilität der Coincidenz-Curve n . Ordnung der allgemeinen Transformationen.	197