Bestimmung der Ordnung und Classe der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung *).

VON LOTHAR MARCKS †.

Steiner findet in seiner Abhandlung: „Ueber algebraische Curven und Flächen“, im 49. Bande des Crelle'schen Journals, die Ordnung der Evolute einer Curve n^{ter} Ordnung durch Zählen der im Unendlichen liegenden Krümmungsmittelpunkte. Ein analoges Verfahren führt auch zur Bestimmung der Ordnung der Krümmungsmittelpunktsfläche Φ einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung F_n . Die unendlich ferne Ebene E_∞ enthält zwei Arten von Krümmungscentren von Φ , nämlich erstens solche, die zu den auf F_n liegenden parabolischen Punkten gehören, und zweitens solche, die zu den unendlich fernen Punkten von F_n gehören. Die parabolischen Punkte auf F_n liegen in der parabolischen Curve $k_{1n(n-2)}$, welche, als Schnitt von F_n mit der zugehörigen Kernfläche, von der Ordnung $4n(n-2)$ ist. Der Ort der zu den Punkten von $k_{1n(n-2)}$ gehörigen Krümmungsmittelpunkte möge eine Curve k auf E_∞ sein. Die unendlich fernen Punkte von F_n bilden eine Curve c_n auf E_∞ , und der Ort der zugehörigen Punkte von Φ sei die Curve s auf E_∞ . Da die parabolischen und die unendlich fernen Punkte von F_n die einzigen sind, welche ihre Krümmungscentren im Unendlichen haben, so ist die Summe der hinlänglich oft gezählten Ordnungen von k und s gleich der Ordnung von Φ .

Um die Ordnung von k zu finden, fixiren wir eine bestimmte Richtung, deren unendlich ferner Punkt E sein mag. Die Berührungspunkte der dieser Richtung parallelen, also durch E gelegten Tangentialebenen von F_n bilden auf F_n die Curve $c_{n(n-1)}$, welche der Schnitt von F_n mit der ersten Polarfläche von E in Bezug auf F_n ist. Die

*) Der Verfasser der Arbeit, deren hauptsächlichste Resultate ein Studienfreund desselben hier mittheilt, ist am 12 Januar 1871 in dem Gefecht bei Lacroix gefallen. Er hatte die betreffenden Untersuchungen bereits in der ersten Hälfte des Jahres 1870 ausgeführt. Inzwischen ist dasselbe Problem von Herrn Darboux behandelt worden. (C. R. 1870. Erste Hälfte, p. 1328).

(†) Red.

zu den Punkten dieser Curve errichteten Normalen sind senkrecht zu der fixirten Richtung, also den auf dieser Richtung lothrechten Ebenen parallel, schneiden daher E_x in einer bestimmten Geraden g_x . Die erste Polarfläche von E in Bezug auf F_n , welche von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, schneidet die parabolische Curve $k_{4n(n-2)}$ in $4n(n-1)(n-2)$ Punkten, welche auf $c_{n(n-1)}$ liegen und zugleich parabolische Punkte sind. Die in ihnen errichteten Normalen schneiden daher g_x in Punkten der Curve k . k ist also von der Ordnung $4 \cdot n(n-1)(n-2)$.

Um die Ordnung von s zu finden, bemerken wir, dass die Flächennormalen der Punkte der Schnittcurve c_n von F_n und E_x ganz in E_x liegen, also einander schneiden, und die Evolute $r_{3n(n-1)}$ einhüllen. Jeder Punkt dieser Evolute liegt auf Φ , weil sich in ihm zwei unendlich nahe Normalen von F_n schneiden, woraus auch folgt, dass E_x als der eine Hauptnormalschnitt für alle Punkte von c_n betrachtet werden muss.

Damit haben wir aber für jeden Punkt von c_n nur einen der beiden auf seiner Normale gelegenen Krümmungsmittelpunkte, und nur einen der beiden Hauptnormalschnitte berücksichtigt. Zu jedem Punkte von c_n gehört ausser dem mit E_x zusammenfallenden Hauptnormalschnitt, welcher einen Punkt auf r lieferte, noch ein zweiter zu E_x senkrecht zu denkender Hauptnormalschnitt, welcher den zweiten Krümmungsmittelpunkt liefert. Der Ort dieses letztern ist eine Curve r' auf E_∞ , deren Ordnung wir zu bestimmen haben. Zu diesem Zwecke zählen wir wieder die Punkte, welche r' mit der Geraden h_x gemein hat, welche wir im Vergleich zu der Lage der Curven c_n und r' unendlich fern denken. Eine solche Gerade wird von c_n in n Punkten geschnitten, und ist also n -fache Normale zu c_n , d. h. in h_x stehen auf der Ebene von c_n , welche der erste Hauptnormalschnitt für alle Punkte von c_n war, n zweite Hauptnormalschnitte senkrecht. Daher liegen in h_x n zweite Krümmungscentra. Ausserdem kann in h_x nur dann noch ein Punkt von r' liegen, wenn der zugehörige Flächenpunkt ein Wendepunkt seines zweiten Hauptnormalschnittes ist. Dieser Bedingung genügt jeder parabolische Punkt auf c_n , der nicht schon Wendepunkt des ersten Hauptnormalschnittes ist. Da nun die Ebene von c_n die parabolische Curve $k_{4n(n-2)}$ in $4n(n-2)$ Punkten schneidet, und $3n(n-2)$ Wendepunkte auf der Curve c_n liegen, also Wendepunkte des ersten Hauptnormalschnittes sind, so bleiben $n(n-2)$ parabolische Punkte übrig, welche Wendepunkte von zweiten Hauptnormalschnitten sind. Diese bestimmen daher auf h_x noch $n(n-2)$ andere Punkte von r' . r' hat demnach $n + n(n-2)$ Punkte mit h_x gemein, ist also von der Ordnung $n(n-1)$. Da aber jeder Punkt dieser Curve im Unendlichen liegt, und jede Normale im Unendlichen für den

Hauptnormalschnitt Rückkehrtangente*) ist, in jedem Krümmungscentrum also immer 3 Punkte vereinigt liegen, so ist die Curve r' als Rückkehrcurve auf der Fläche Φ bei der Beurtheilung der Ordnung derselben dreifach zu zählen.

Demnach besteht der ganze Schnitt von E_c mit Φ aus der Curve k von der Ordnung $4n(n-1)(n-2)$, der Curve r von der Ordnung $3n(n-1)$ und der dreifach zu zählenden Curve r' von der Ordnung $n(n-1)$. Also ist Φ von der Ordnung:

$$4n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + 3n(n-1) = 2n(n-1)(2n-1).$$

Um die Classe der Krümmungsmittelpunkt-fläche zu bestimmen, betrachten wir sie als die Brennfläche des Strahlensystems, welches von den sämmtlichen Normalen zu F_n gebildet wird, und benutzen den Satz, dass der Unterschied zwischen Ordnung und Classe der Brennfläche eines Strahlensystems n^{ter} Ordnung und m^{te} Classe gleich $2(n-m)$ ist**). Da bekanntlich durch jeden Punkt $n(n^2 - n + 1)$ Normalen an F_n gezogen werden können, und in jeder Ebene $n(n-1)$ Normalen von F_n liegen, so ist der Unterschied zwischen der Ordnung und der Classe von Φ gleich:

$$2[n(n^2 - n + 1) - n(n-1)] = 2n(n^2 - 2n + 2),$$

und da wir $2n(n-1)(2n-1)$ als die Ordnungszahl von Φ gefunden haben, so ist diese Fläche von der Classe:

$$2n(n-1)(2n-1) - 2n(n^2 - 2n + 2) = 2n(n^2 - n - 1).$$

Für $n=2$ und $n=3$ ergibt sich, dass die Krümmungsmittelpunkt-fläche einer quadratischen Fläche von der 12^{ten} Ordnung und 4^{ten} Classe, einer cubischen Fläche von der 60^{ten} Ordnung und 30^{ten} Classe ist.

*) Cf. Steiner, Ueber die algebraischen Curven und Flächen, Crelle's Journal, Bd. 49, pag. 339, 340.

**) Dieser Satz rührt von Herrn F. Klein her; vergl. S. Lie, Göttinger Nachrichten 1870, Nr. 4.