Ueber die theoretische Behandlung der sogenannten constanten Magnete*).

Von CARL NEUMANN in LEIPZIG.

Bei gegenseitiger Einwirkung zwischen magnetischen Körpern und galvanischen Strömen werden im Allgemeinen *sämmtliche* Ströme sich ändern, nicht nur die galvanischen Ströme selber, sondern auch die in jenen Körpern enthaltenen Molecularströme. Doch existiren gewisse Körper — die sogenannten constanten oder permanenten Stahlmagnete —, bei denen man von der Aenderung der Molecularströme zu abstrahiren für zulässig erachtet. Denn man ist der Ansicht, dass die Molecularströme eines solchen Stahlmagneten approximativ als *constant****) zu betrachten seien, hinsichtlich ihrer Stärke wie hinsichtlich ihrer Bahnen.

Ich werde dieser Ansicht mich vorläufig anschliessen. Demgemäss werde ich, um die gegenseitige (pönderomotorische und elektromotorische) Einwirkung zwischen galvanischen Strömen und sogenannten constanten Magneten durch bestimmte Formeln auszudrücken, einerseits von den bekannten beiden Integralgesetzen, andererseits von der Annahme *constanter* Molecularströme ausgehen; die in solcher Weise sich ergebenden Formeln mögen kurzweg bezeichnet sein als die *gewöhnlichen Formeln* oder als die Formeln der *gewöhnlichen Theorie*. Sodann werde ich zeigen, dass diese Formeln zu Widersprüchen führen, und hieraus den Schluss ziehen, dass jene Annahme *constanter* Molecularströme theoretisch unzulässig sei.

*) Die mit der Jahrzahl 1871 versehenen Citate, welche im Laufe dieses Aufsatzes vorkommen, beziehen sich auf meine Schrift: *Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie*. Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., October 1871, S. 386—449.

**) Ich unterscheide zwischen *constant*, *gleichförmig* und *ungleichförmig*. Ein elektrischer Strom soll nämlich *ungleichförmig* heissen, wenn seine Stärke eine Function von Zeit und Bogenlänge ist; er soll *gleichförmig* genannt werden, wenn seine Stärke *nur* eine Function der *Zeit* ist, und er soll endlich *constant* genannt werden, wenn seine Stärke weder von der Zeit, noch auch von der Bogenlänge abhängt.

§ 1.

Die F. Neumann'schen Integralgesetze.

Es können diese Gesetze, welche in meinem bei Teubner erschienenem Werk: „Die elektrischen Kräfte“ ausführlich erörtert worden sind, ihrem Hauptinhalte nach folgendermassen charakterisirt werden:

Das ponderomotorische Integralgesetz sagt aus, dass die von zwei gleichförmigen Stromringen während der Zeit dt auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit

$$(1) \qquad \qquad \qquad = - JJ_1 dQ$$

ist, wo J, J_1 die beiden Stromintensitäten bezeichnen, während Q [das sogenannte Potential, bezogen auf die Stromeinheit] einen Ausdruck vorstellt, der lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage und Gestalt der beiden Ringe. — Vgl. „Die elektrischen Kräfte“, S. 55.

Das elektromotorische Integralgesetz bezieht sich ebenfalls auf zwei gleichförmige Stromringe, und sagt aus, dass die Summe der von dem einen Ringe während der Zeit dt im andern inducirten elektromotorischen Kräfte

$$(2) \qquad \qquad \qquad = + d(J_1 Q)$$

ist, wo J_1 die Stromintensität des inducirenden Ringes bezeichnet, während Q dieselbe Bedeutung hat wie vorhin. — Vgl. „Die elektrischen Kräfte“, S. 107.

§ 2.

Darstellung der gewöhnlichen Theorie.

Wir betrachten zunächst ein System (M, M_1) , bestehend aus zwei constanten Stahlmagneten M und M_1 , welche sich bewegen unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, sowie unter der Einwirkung beliebig gegebener äusserer Kräfte; dabei sei vorausgesetzt, dass diese äusseren Kräfte durchweg ordinärer (nichtelektrischer) Natur sind.

Bezeichnet man mit $jj_1 Q$ das Potential eines Molecularstromes j des Magneten M auf einen Molecularstrom j_1 des Magneten M_1 , so wird das Potential der beiden Magneten auf einander den Werth haben:

$$\Sigma \Sigma (jj_1 Q),$$

die Summation ausgedehnt über alle j und alle j_1 . Das Potential V des Systems (M, M_1) auf sich selber wird daher dargestellt sein durch:

$$(3) \qquad \qquad \qquad V = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} C_1 + \Sigma \Sigma (jj_1 Q),$$

wo $\frac{1}{2} C$ und $\frac{1}{2} C_1$ zwei Constante sind, von denen die erstere das Potential von M auf sich selber, die letztere das Potential von M_1 auf sich selber vorstellt.

Die ponderomotorische Arbeit, welche die Ströme j und j_1 während der Zeit dt auf einander ausüben, ist $= -jj_1 dQ$, zufolge (1); und es wird daher die von den beiden Magneten auf einander ausgeübte Arbeit $= -\Sigma \Sigma (jj_1 dQ)$ sein. Andererseits mag die während der Zeit dt von den äussern (ordinären) Kräften auf das System ausgeübte Arbeit benannt sein mit dS .

Bezeichnet nun T die lebendige Kraft der ponderablen Massen des Systems, so ist bekanntlich der dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs dT gleich der Summe sämtlicher Arbeiten, welche während jenes Zeitelementes auf das System ausgeübt werden; somit erhält man:

$$(4) \quad dT = -\Sigma \Sigma (jj_1 dQ) + dS.$$

Nun folgt aber aus (3), weil die j, j_1 constant und nur die Q veränderlich sind, sofort: $dV = \Sigma \Sigma (jj_1 dQ)$, so dass also die Formel (4) auch so geschrieben werden kann:

$$(5) \quad dT = -dV + dS,$$

in Worten ausgedrückt: *Die während eines Zeitelementes erzeugte Quantität von lebendiger Kraft ist gleich dem negativen Zuwachs des Potentials V , dazu gelegt die von den äussern Kräften ausgeübte Arbeit.*

Wir gehen über zur Betrachtung zweier anderer Systeme, die wir kurzweg mit (J, M_1) und (J, J_1) benennen wollen.

Das System (J, M_1) bestehe aus einem starren Ringe*), der von einem galvanischen Strome J durchflossen ist, und aus einem constanten Stahlmagneten M_1 . Die in dem Ringe von Hause aus vorhandene elektromotorische Kraft mag mit A , sein Widerstand mit w bezeichnet sein, so dass also, wenn der Ring sich selber überlassen wäre, nach dem Ohm'schen Gesetz $J = \frac{A}{w}$ sein würde.

Ferner sei j_1 irgend einer der in M_1 enthaltenen Molecularströme und $Jj_1 Q$ das Potential von J auf j_1 , mithin

$$J \cdot \Sigma (j_1 Q)$$

das Potential von J auf M_1 .

Das Potential V des Systemes (J, M_1) auf sich selber lautet alsdann:

$$(6) \quad V = \frac{1}{2} q J^2 + \frac{1}{2} C_1 + J \cdot \Sigma (j_1 Q).$$

Das System (J, J_1) bestehe aus zwei starren Ringen, die respective von den galvanischen Strömen J und J_1 durchflossen sind. Die in diesen Ringen von Hause aus vorhandenen elektromotorischen Kräfte mögen mit A und A_1 , ihre Widerstände mit w und w_1 bezeichnet sein.

Ferner sei

$$JJ_1 Q$$

das Potential der beiden Ringe auf einander.

Das Potential V des Systemes (J, J_1) auf sich selber lautet alsdann:

$$V = \frac{1}{2} q J^2 + \frac{1}{2} q_1 J_1^2 + JJ_1 Q.$$

*) Unter einem starren Ringe ist überall ein in sich zurücklaufender linearer Leiter von unveränderlicher Gestalt zu verstehen.

Hier sind unter $\frac{1}{2} q J^2$, $\frac{1}{2} q_1 J_1^2$ und $\frac{1}{2} C_1$ das Potential von J auf sich selber, dasjenige von J_1 auf sich selber, und endlich dasjenige von M_1 auf sich selber zu verstehen, so dass also q , q_1 und C_1 gewisse den beiden Ringen und dem Magneten eigenthümlich zugehörige *Constanten* repräsentiren.

Haben nun dT und dS analoge Bedeutungen wie vorhin [bei dem Systeme (M, M_1)], so erhalten wir unter Anwendung des ponderomotorischen Integralgesetzes (1) die Formeln:

$$(7) \quad \begin{aligned} dT &= -J \cdot \Sigma(j_i dQ) + dS, \\ &= -J \cdot d\Sigma(j_i Q) + dS; \end{aligned} \quad \parallel \quad dT = -JJ_1 dQ + dS.$$

es ist nämlich zu beachten, dass die j_i ,
zufolge unserer Annahme *constant* sind.

Andrerseits ergeben sich unter Benutzung des elektromotorischen Integralgesetzes (2) die Formeln:

$$(8) \quad \begin{aligned} wJdt &= Adt + d[Jq + \Sigma(j_i Q)], \\ w_1 J_1 dt &= A_1 dt + d(J_1 q_1 + JQ); \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} wJdt &= Adt + d(Jq + J_1 Q), \\ w_1 J_1 dt &= A_1 dt + d(J_1 q_1 + JQ); \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit J und J_1 sofort:

$$(9) \quad \begin{aligned} wJ^2 dt &= AJdt + J \cdot d\Sigma(j_i Q) \\ &\quad + d(\tfrac{1}{2} q J^2), \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} (wJ^2 + w_1 J_1^2) dt &= (AJ + A_1 J_1) dt + JJ_1 dQ \\ &\quad + d(\tfrac{1}{2} q J^2 + \tfrac{1}{2} q_1 J_1^2 + QJJ_1). \end{aligned}$$

Endlich folgt durch Addition der Formeln (7) und (9) und mit Rücksicht auf (6):

$$(10) \quad \begin{aligned} dT + wJ^2 dt &= \\ &= AJdt + d(\tfrac{1}{2} q J^2) + dS, \end{aligned} \quad \parallel \quad \begin{aligned} dT + (wJ^2 + w_1 J_1^2) dt &= \\ &= (AJ + A_1 J_1) dt + dV + dS. \end{aligned}$$

§ 3.

Der in der gewöhnlichen Theorie enthaltene Widerspruch:

Die in (5) und (10) für die drei Systeme (M, M_1) , (J, M_1) und (J, J_1) erhaltenen Resultate sind von grosser Verschiedenheit, was besonders deutlich hervortritt, sobald man die Kräfte A , A_1 gleich Null annimmt. Denn alsdann nehmen jene Formeln (5) und (10) der Reihe nach folgende Gestalten an:

$$(11) \quad \begin{aligned} [dT] &= dS - dV, \\ [dT + wJ^2 dt] &= dS + d(\tfrac{1}{2} q J^2), \\ [dT + wJ^2 dt + w_1 J_1^2 dt] &= dS + dV, \end{aligned}$$

wo die in eckige Klammern [] eingeschlossenen Ausdrücke dasjenige Quantum von lebendiger Kraft und Wärme repräsentiren, welches in jedem der drei Systeme während der Zeit dt erzeugt wird. Die Formeln sagen also aus, dass dieses Quantum für jene drei Systeme *sehr verschiedene* Werthe hat, dass z. B. dasselbe $= dS - dV$ oder

$= dS + dV$ ist, je nachdem man das erste oder letzte System betrachtet. — *Die entwickelte Theorie steht also mit sich selber in Widerspruch.*

Dieser Widerspruch ist ein sehr bedeutender; folglich sind die Prämissen der Theorie nicht nur im exacten, sondern auch im approximativen Sinne unzulässig. Jene Prämissen bestehen aber einerseits in den beiden Integralgesetzen (1), (2), andererseits in der Annahme *constanter* Molecularströme; und man gelangt daher, falls man nicht etwa die beiden Integralgesetze in Frage stellen will, zu folgendem Resultat:

(12. α) *Die Annahme wirklich constanter Magnete oder wirklich constanter Molecularströme ist theoretisch unzulässig, nicht nur im exacten, sondern auch im approximativen Sinne.*

Demgemäss sind die mit dieser Annahme liierten Formeln (3, 4, 5) und (6, 7, . . 10) *linker Hand* für *unrichtig oder fraglich*, hingegen die Formeln (6, 7, . . 10) *rechter Hand*, welche von einer solchen Annahme frei sind, für *zuverlässig* zu halten.

Ist also irgend ein System gegeben, welches theils aus sogenannten *constanten Magneten*, theils aus *galvanischen Strömen* besteht, und handelt es sich um eine nähere Untersuchung der in diesem System stattfindenden Wirkungen und Bewegungen, so wird eine solche Untersuchung, wie aus dem Satze (12. α) unmittelbar folgt, als ein *Problem höherer Ordnung* zu bezeichnen sein, bei dessen sachgemässer Behandlung die Einführung irgend welcher Hypothesen über die innere Mechanik magnetischer Körper nicht zu umgehen ist.

So wird man z. B. bei einem derartigen System für das Princip der Erhaltung der Energie, bei sachgemässer Behandlung, eine Formel erhalten, die noch behaftet ist mit einer völlig unbekannten, von der innern Mechanik magnetischer Körper abhängenden Function; zur nähern Bestimmung dieser Function*) wird aber die Einführung irgend welcher Hypothesen über jene innere Mechanik unumgänglich erforderlich sein.

(12. β) *Aus (12. α) folgt also, dass das Gesetz der Erhaltung der Energie für solche Systeme, die aus elektrischen Strömen und sogenannten constanten Magneten bestehen, seiner eigentlichen Form nach einstweilen noch unbekannt ist.*

Der Satz (12. α) steht nicht isolirt da; es mag mir gestattet sein, auf verwandte Fälle aus bekannteren Regionen aufmerksam zu machen.

*) Der von mir (1871, S. 440 sq.) zur ungefähren Bestimmung dieser Function gemachte Versuch ist, wie schon damals betont wurde, nur provisorisch und durchaus unzureichend.

Erster Fall. — Die Differentialgleichungen für einen frei beweglichen Massenpunkt m , auf welchen gegebene Kräfte X, Y, Z einwirken, sind:

$$(\alpha) \quad mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z.$$

Wollte man die Beweglichkeit des Punktes nachträglich noch durch eine gegebene Bedingung

$$(\beta) \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

beschränken, so würde man vier Gleichungen $(\alpha), (\beta)$ haben, die mit einander in Widerspruch stehen. — In der That wird die Annahme oder Bedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ immer *unzulässig* sein, falls man nicht gleichzeitig auch gewisse Kräfte *) hinzufügt, welche für Aufrechterhaltung jener Bedingung Sorge tragen.

Zweiter Fall. — Bewegen sich zwei Massenpunkte m, M unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehungs- oder Abstossungskraft längs einer gegebenen geraden Linie, und bezeichnet man ihre augenblicklichen Geschwindigkeiten mit u, U , so ergeben sich durch das Princip des Schwerpunkts und durch das Princip der lebendigen Kraft die Formeln:

$$(\gamma) \quad mu + MU = K,$$

$$(\delta) \quad mu^2 + MU^2 = F(r),$$

wo K eine Constante, hingegen $F(r)$ eine Function der gegenseitigen Entfernung r der beiden Punkte vorstellt. Wollte man zu diesen Formeln noch die Bedingung hinzutreten lassen:

$$(\epsilon) \quad U = \text{Const.},$$

so würde ein Widerspruch eintreten; denn die Formel (γ) würde alsdann aussagen, dass u *constant*, die Formel (δ) hingegen, dass u *variabel* sei. — Jene Annahme oder Bedingung $U = \text{Const.}$ ist also *unzulässig*.

Dritter Fall. — Die Massen m und M der soeben betrachteten Punkte mögen sich zu einander verhalten, wie die *Masse eines Staubkorns* zur *Sonnenmasse*. Offenbar wird alsdann die Sonnenmasse M (durch jenes Staubkorn m so gut wie gar nicht afficirt) mit *constanter* oder wenigstens *nahezu constanter* Geschwindigkeit dahinfahren; so dass also die Annahme (ϵ) wenigstens approximativ als zulässig erscheint. — Aber der Schein trügt; denn durch Combinirung von (ϵ) und $(\gamma), (\delta)$ würde man wiederum zu dem schon genannten Widerspruch, nämlich zu dem Resultat geführt werden, dass die Geschwindigkeit u des Staubkornes *gleichzeitig constant und variabel* sei. — Jene Annahme

*) Nämlich die bekannten Druckkräfte $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

$U = \text{Const.}$ wird also im Allgemeinen *unzulässig* bleiben, wie gross auch M gegen m sein mag.

Aus diesen Betrachtungen*) dürfte sich die allgemeine Regel ergeben:

- (13) *Soll die Bewegung gegebener Massen einer bestimmten Bedingungsgleichung unterworfen gedacht werden, so ist (falls innere Widersprüche vermieden werden sollen) die Einführung von Kräften erforderlich, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungsgleichung Sorge tragen.*

Will man also die elektrischen Molecularströme im Innern eines gegebenen Magneten als *constant* sich vorstellen, so ist man genöthigt, gleichzeitig auch gewisse Kräfte sich vorzustellen, welche für die Aufrechterhaltung dieser *Constanz* Sorge tragen.

Will man ferner (um ein anderes Beispiel anzuführen) die Vorstellung adoptiren, dass in einem elektrischen Strom jederzeit *gleich grosse* Quantitäten der beiden Fluida in entgegengesetzten Richtungen durch den Querschnitt gehen, so wird man gezwungen sein, gleichzeitig auch gewisse Kräfte zu adoptiren, welche für ein solches *Gleichsein* Sorge tragen.

§ 4.

Zusammenstellung einiger Formeln der gewöhnlichen Theorie.

Wir beschränken uns auf die beiden Systeme

$$(J, M_1), \quad \parallel \quad (J, J_1).$$

Das Potential V (6) eines solchen Systemes auf sich selber besitzt den Werth:

$$(14) \quad V = \frac{1}{2} q J^2 + \frac{1}{2} C_1 + J \cdot \Sigma(j_1 Q), \quad \parallel \quad V = \frac{1}{2} q J^2 + \frac{1}{2} q_1 J_1^2 + Q J J_1.$$

Die Formeln für die *ponderomotorischen* Wirkungen (7) lauten:

$$(15) \quad dT = -J \cdot d\Sigma(j_1 Q) + dS, \quad \parallel \quad dT = -J J_1 dQ + dS;$$

diesen Formeln zufolge zerfällt die während der Zeit dt im Systeme erzeugte lebendige Kraft dT in zwei Theile, nämlich in *einen* Theil

$$(A) \quad -J \cdot d\Sigma(j_1 Q), \quad \parallel \quad -J J_1 dQ,$$

welcher speciell durch die *elektrodynamischen*, und in *einen andern* Theil

$$(B) \quad dS, \quad \parallel \quad dS,$$

welcher speciell durch die *ordinären* Kräfte hervorgebracht wird.

Endlich sind für die *elektromotorischen* oder *inducirenden* Wirkungen entweder anzugeben die Formeln (9):

*) Aehnliche und zum Theil weiter ausgeführte Betrachtungen findet man in meiner Abhandlung (1871, S. 440—446).

$$(16) \quad A J dt = w J^2 dt - J \cdot d \Sigma(j_1 Q) \quad \parallel \quad (A J + A_1 J_1) dt = (w J^2 + w_1 J_1^2) dt - J J_1 d Q \\ - d(\tfrac{1}{2} q J^2) \quad \parallel \quad - d(\tfrac{1}{2} q J^2 + \tfrac{1}{2} q_1 J_1^2 + Q J J_1).$$

oder auch die (diesen als Grundlage dienenden) detaillirteren Formeln (8):

$$(16^{bis}) \quad w J dt = A dt + d[J q + \Sigma(j_1 Q)], \quad \parallel \quad w J dt = A dt + d[J q + J_1 Q], \\ w_1 J_1 dt = A_1 dt + d[J_1 q_1 + J Q].$$

Diese Formeln (16, 16^{bis}) werden kurzweg zu bezeichnen sein als die Repräsentanten des *gewöhnlichen Inductionsgesetzes*.

Von Neuem mag, was schon bei Gelegenheit des Satzes (12. α) bemerkt ist, wiederholt werden, dass die mit der Annahme *constanter* Molecularströme liierten Formeln (14, 15, 16, 16^{bis}) *linker Hand* als *unzuverlässig*, hingegen die Formeln (14, 15, 16, 16^{bis}) *rechter Hand* als *zuverlässig* anzusehen sind.

§ 5.

Das Princip der lebendigen Kraft.

Ausgehend vom Weber'schen Grundgesetz und von einer gewissen unitarischen Vorstellungsweise, bin ich in meiner Abhandlung von 1871 zu dem Resultat gelangt, dass das *Princip der lebendigen Kraft* im Gebiet der elektrischen Vorgänge repräsentirt ist durch zwei wohl von einander zu unterscheidende Sätze*), welche ich das *Energiegesetz* und das *Potentialgesetz* benannte. Es mag mir gestattet sein, diese Sätze in etwas erweiterter Fassung kurz mitzutheilen**), sodann aber dieselben in Anwendung zu bringen auf die im Vorhergehenden betrachteten Systeme (J, M_1) und (J, J_1).

Ein System (linearer oder körperlicher) Conductoren sei in beliebiger Bewegung begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden solchen Conductors irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden; dabei mag vorausgesetzt sein, dass die auf das System von *Aussen* her einwirkenden Kräfte durchweg ordinärer (nicht elektrischer) Natur sind. Ferner sei T die actuelle und F die potentielle Energie des Systemes; mit andern Worten: es sei T die lebendige Kraft aller in dem Systeme enthaltenen ponderablen Massen und es repräsentire F den Ausdruck

$$(17) \quad F = U^o + U - V,$$

*) Das *Energiegesetz* findet sich daselbst angegeben auf S. 408 und S. 414; andererseits das *Potentialgesetz* auf S. 430. Letzterer Name dürfte unzuweckmässig gewählt sein; ich habe daher später (z. B. in meinem Werk: „*Die elektrischen Kräfte*“) dieses letztere als *ponderomotorisches Integralgesetz* bezeichnet.

**) Eine ausführlichere Mittheilung der betreffenden Untersuchungen behalte ich mir vor. Hiebei wird sich alsdann Gelegenheit bieten zu erörtern, ob die von Herrn Helmholtz in seinem Aufsatz (1872, S. 55, Note) ausgesprochene Behauptung, *jene Untersuchungen seien mit einem mathematischen Fehler behaftet*, begründet ist oder nicht.

wo U^o das ordinäre, U das elektrostatische und V das elektrodynamische Potential des Systemes auf sich selber bezeichnet. — *Das Princip der lebendigen Kraft ist alsdann repräsentirt durch folgende zwei Sätze:*

Das Energiegesetz. Für jedes Zeitelement dt ist

$$(18. E) \quad d(T + F) = dS - dQ^*, \text{ oder } \\ dT + d(U^o + U - V) = dS - dQ^*,$$

wo dS die während der Zeit dt von den äusseren Kräften verrichtete Arbeit, und dQ^ die während dieser Zeit (durch die elektrischen Vorgänge) im System entwickelte Wärme vorstellt*).*

Das Potentialgesetz. Für jedes Zeitelement dt ist:

$$(18. P) \quad dT + \delta(U^o + U + V) = dS,$$

wo dS die schon genannte Bedeutung hat. Dabei ist unter $\delta(U^o + U + V)$ derjenige virtuelle Zuwachs zu verstehen, welchen die Grösse $(U^o + U + V)$ während der Zeit dt erlitten haben würde, falls während dieser Zeit die elektrischen Verhältnisse im Innern eines jeden Conductors un geändert geblieben wären. — Zu bemerken ist, dass dieses Potentialgesetz nur dann gilt, wenn die elektrischen Strömungen im Innern der einzelnen Conductoren als gleichförmig und an ihren Oberflächen als tangential betrachtet werden dürfen.

Vernachlässigt man die durch U^o und U repräsentirten ordinären und elektrostatischen Kräfte gegenüber den durch V repräsentirten elektrodynamischen Kräften, so können die Formeln (17) und (18. E, P) folgendermassen dargestellt werden:

$$(19) \quad F = -V,$$

$$(20. E) \quad dT + dF = dS - dQ^*,$$

$$(20. P) \quad dT - \delta F = dS;$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$(20. E-P) \quad dF + \delta F = -dQ^*.$$

In meiner erwähnten Abhandlung ist der Werth der entwickelten Wärmemenge dQ^* näher zu bestimmen versucht worden für den speciellen Fall *linearer* in sich zurücklaufender Conductoren; dabei ergab sich folgender Ausdruck**):

) Ich bezeichne die entwickelte Wärmemenge mit dQ^ , um in solcher Weise Verwechslungen zu vermeiden. Denn der Buchstabe Q (ohne Sternchen) ist bereits in anderer Bedeutung [vgl. z. B. Formel (1)] verwendet worden, und soll in dieser Bedeutung auch weiterhin beibehalten werden.

**) 1871, S. 415.

$$(21) \quad dQ^* = (wJ^2 + w_1J_1^2 + \dots) dt - (AJ + A_1J_1 + \dots) dt,$$

wo $w, w_1, \dots$ die Widerstände der einzelnen linearen Ringe, $J, J_1, \dots$ die augenblicklich in ihnen vorhandenen Stromintensitäten, und $A, A_1, \dots$ die in denselben von Hause aus vorhandenen elektromotorischen Kräfte vorstellen.

Wir wollen nun diese Formeln in Anwendung bringen auf die in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Systeme

$$(J, M_1),$$

||

$$(J, J_1).$$

Für die potentielle Energie F (19) eines solchen Systemes ergibt sich, mit Rücksicht auf (14), folgender Werth:

$$(22) \quad F = -V,$$

$$= -[\tfrac{1}{2}qJ^2 + \tfrac{1}{2}C_1 + J \cdot \Sigma(j_1Q)],$$

hieraus folgt:

$$\delta F = -J \cdot \Sigma(j_1 dQ),$$

oder weil die j_1 unveränderlich sind:

$$(23) \quad \delta F = -J \cdot d\Sigma(j_1Q).$$

$$F = -V,$$

$$= -[\tfrac{1}{2}qJ^2 + \tfrac{1}{2}q_1J_1^2 + QJJ_1],$$

hieraus folgt:

$$\delta F = -JJ_1 dQ.$$

Ferner nimmt der Ausdruck der entwickelten Wärmemenge dQ^* (21) für die betrachteten beiden Systeme folgende Gestalten an:

$$(24) \quad dQ^* = wJ^2 dt - AJ dt,$$

$$|| \quad dQ^* = (wJ^2 + w_1J_1^2) dt - (AJ + A_1J_1) dt.$$

Substituirt man nun die Werthe (23) und (24) in die allgemeine Formel (20. E — P), so folgt:

$$(25) \quad dF - J \cdot d\Sigma(j_1Q) =$$

$$= AJ dt - wJ^2 dt;$$

hiefür kann geschrieben werden:

$$(26) \quad AJ dt = wJ^2 dt - J \cdot d\Sigma(j_1Q) + dF,$$

oder, falls man für F seine eigentliche Bedeutung (22) substituirt und durch J dividirt:

$$(26^{bis}) \quad wJ dt = A dt + d[qJ + 2\Sigma(j_1Q)] + (d \log J) \cdot \Sigma(j_1Q).$$

Diese Formel (26, 26^{bis}) ist eine *wildfremde Formel*, welche von dem gewöhnlichen Inductionsgesetz (16, 16^{bis}) in greller Weise sich unterscheidet.

$$dF - JJ_1 dQ =$$

$$= (AJ + A_1J_1) dt - (wJ^2 + w_1J_1^2) dt;$$

hiefür kann geschrieben werden:

$$(AJ + A_1J_1) dt = (wJ^2 + w_1J_1^2) dt - JJ_1 dQ + dF.$$

Diese Formel steht, falls man für F seine eigentliche Bedeutung (23) substituirt, in vollem Einklang mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz (16, 16^{bis}).

Die Formeln *linker Hand* sind also mit denen der gewöhnlichen Theorie in *Widerspruch*, während die *rechter Hand* mit denen der gewöhnlichen Theorie in *Einklang* stehen. Der Grund jenes Widerspruchs kann nur darin zu suchen sein,

- (27) dass constante Magnete *nicht existiren* und nicht existiren können; ebenso wenig etwa, wie ein Weltkörper gedacht werden kann, der trotz der Einwirkung der übrigen Weltkörper in geradliniger Bahn dahinfährt. Ein sogenannter constanter Magnet wird, falls er auf einen elektrischen Strom einwirkt, auch seinerseits von diesem Strome her eine gewisse Einwirkung und in seinem Zustande eine gewisse Aenderung erleiden. Diese Zustandsänderung aber ist in unsern Formeln *unberücksichtigt* gelassen.

In dieser Weise habe ich bereits in meiner Abhandlung von 1871 (daselbst S. 440) mich ausgedrückt*). Schon damals also war ich zu denjenigen Vorstellungen hingeleitet worden, die ich in den vorhergehenden Paragraphen des gegenwärtigen Aufsatzes von einer etwas *anderen* Seite her zu entwickeln und in (12. α , β) möglichst präcise auszusprechen mich bemüht habe.

In seiner bekannten Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin 1847) hat Helmholtz die Formeln**) gegeben:

$$(28) \quad A J dt = w J^2 dt - J \cdot d\Sigma(j_1 Q), \quad \parallel \quad (AJ + A_1 J_1) dt = (w J^2 + w_1 J_1^2) dt - J J_1 dQ.$$

Diese Helmholtz'schen Formeln habe ich in meiner Abhandlung (1871, S. 436, Note und S. 439, Note) für unzulässig erklärt, d. h. für unzulässig erklärt *im Sinne der von mir entwickelten Theorie*. In der That zeigt sich, dass den Helmholtz'schen Formeln (28) *im Sinne meiner Theorie* die Correctionen:

$$(29. \alpha) \quad dF, \quad \parallel \quad dF,$$

oder, falls man für $\bar{F}$ seinen Werth (22) substituirt, die Correctionen:

$$(29. \beta) \quad d[-\tfrac{1}{2} q J^2 - \tfrac{1}{2} C_1 - J \cdot \Sigma(j_1 Q)], \quad \parallel \quad d[-\tfrac{1}{2} q J^2 - \tfrac{1}{2} q_1 J_1^2 - Q J J_1]$$

zuzuertheilen sind. Mit andern Worten: Es zeigt sich, dass den Helmholtz'schen Formeln (28) die genannten Correctionen (29. α , β) beizufügen sein *würden*, falls meine eigenen Formeln (26) die richtigen wären. Dass letzteres unwahrscheinlich ist, dass nämlich jene von mir selber gegebenen Formeln (26), wenigstens in soweit sie den Fall der *Magnetoinduction* betreffen, in grellem Widerspruch stehen

*) In jener Abhandlung sind übrigens auch die Formeln (26, 26^{bis}) in genau derselben Weise angegeben. Man findet die Formeln (26) *linker Hand* und (26) *rechter Hand* respective auf S. 439, Nr. (V.) und auf S. 436, Nr. (II.). Ferner findet man die Formel (26^{bis}) auf S. 440, Nr. (75).

**) Dass die Formeln der Helmholtz'schen Theorie von 1847 in der That durch (28) dargestellt sind, wird aus meinem unmittelbar folgenden Aufsatz (S. 342) deutlich werden.

mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz, ist vor wenig Augenblicken betont worden.

(30) Demgemäss sind also die in meiner Abhandlung von 1871 für die Helmholtz'schen Formeln von 1847 angemerkten Correctionen (29 α , β) nur von *relativer* Bedeutung, nämlich von solcher Beschaffenheit, dass sie jene Formeln allerdings in Einklang bringen würden mit der von mir daselbst entwickelten Theorie, andererseits aber dieselben in Widerspruch versetzen würden mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz.

Diesen nur *relativen* Charakter meiner Correctionen glaubte ich in meiner Abhandlung (1871) nicht besonders betonen zu dürfen, da derselbe unmittelbar aus dem Zusammenhange sich ergibt. Denn der Gang meiner dortigen Erörterungen ist (um die Hauptsache zusammenzufassen) folgender:

Gestützt auf bestimmte Suppositionen, nämlich auf das Princip der lebendigen Kraft und auf die Annahme constanter Magnete, gelange ich für die Magneto- und Volta-Induction zu den beiden Formeln (26), welche verschieden sind von den Helmholtz'schen Formeln (28), und notire im Vorübergehen die hieraus für die letztern sich ergebenden Correctionen (29. α , β).

Sodann aber stellt sich heraus, dass meine eignen Formeln (26) mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen (16, 16^{bis}) theilweise in Widerspruch stehen; ein solcher Widerspruch zeigt sich bei der Magneto-Induction, während allerdings Einklang vorhanden ist bei der Volta-Induction.

Durch diesen Widerspruch sehe ich mich schliesslich in die Nothwendigkeit versetzt, einen gewissen Bestandtheil der zu Grunde gelegten Suppositionen fallen zu lassen, nämlich die Vorstellung constanter Magnete für unzulässig zu erklären; und gelange in solcher Weise zu den in (27) und (12. α , β) genannten Sätzen.*