Darstellung symmetrischer Functionen durch die Potenzsummen.

(Von Herrn *Hermann Hankel* in Leipzig.)

Bekanntlich hat *Waring* in seinen „meditationes algebraicae“ 1770 eine Formel gegeben, durch welche jede homogene, rationale ganze, symmetrische Function der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_m$ einer algebraischen Gleichung als Function der Potenzsummen und zwar durch eine Summe von Producten solcher dargestellt wird. In einer viel übersichtlicheren, aber, wie es scheint, bisher noch nicht bemerkten Weise kann man dieselbe Aufgabe mit Hülfe von Determinanten lösen.

I. *Es lässt sich nämlich jede symmetrische Function*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

wo unter dem Summenzeichen alle möglichen Combinationen und Permutationen der Wurzeln $x_1 \dots x_m$ an Stelle von $x_1 \dots x_n$ zu setzen sind, durch eine Summe von Determinanten ausdrücken, welche aus

$$(1.) \quad \begin{vmatrix} s_{\alpha_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2} & s_{\alpha_2} & 2 & \dots & 0 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} & s_{\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n} & s_{\alpha_3+\dots+\alpha_n} & \dots & s_{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

hervorgehen, wenn man die $\alpha_1, \dots \alpha_n$ auf jede Weise permutirt; und zwar ist diese Summe:

$$= n!(\alpha_1, \dots \alpha_n).$$

Die wirkliche Darstellung gestaltet sich auf diese Weise keineswegs so complicirt, als es auf den ersten Blick scheinen könnte. So hat man z. B. um

$$5! \sum x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e$$

durch die Potenzsummen darzustellen, zunächst die Determinante:

$$\begin{vmatrix}
 s_a & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 s_{a+b} & s_b & 2 & 0 & 0 \\
 s_{a+b+c} & s_{b+c} & s_c & 3 & 0 \\
 s_{a+b+c+d} & s_{b+c+d} & s_{c+d} & s_d & 4 \\
 s_{a+b+c+d+e} & s_{b+c+d+e} & s_{c+d+e} & s_{d+e} & s_e
 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 = & s_a s_b s_c s_d s_e - \{4s_a s_b s_c s_{d+e} + 3s_a s_b s_c s_{c+d} + 2s_a s_d s_c s_{b+c} + s_c s_d s_e s_{a+b}\} \\
 & + \{12s_a s_b s_{c+d+e} + 6s_a s_e s_{b+c+d} + 2s_d s_e s_{a+b+c}\} \\
 & - \{24s_a s_{b+c+d+e} + 6s_e s_{a+b+c+d}\} + \{8s_a s_{b+c} s_{d+e} + 4s_c s_{a+b} s_{d+e} + 3s_e s_{a+b} s_{c+d}\} \\
 & - \{12s_{a+b} s_{c+d+e} + 8s_{d+e} s_{a+b+c}\} + 24s_{a+b+c+d+e}
 \end{aligned}$$

zu entwickeln. Dann hat man alle Permutationen der a, b, c, d, e vorzunehmen und zu addiren; dabei wird z. B. aus $s_a s_b s_c s_{c+d}$ jedes Product dieser Form also $s_a s_b s_c s_{d+e}$ nur einmal erzeugt, wenn zunächst die Vertauschbarkeit der Factoren s_a, s_b, s_c und der Summanden d und e in s_{d+e} ignorirt wird. Ebenso wird aus $s_a s_d s_e s_{b+c}$ und $s_c s_d s_e s_{a+b}$ in diesem Sinne das Product $s_a s_b s_c s_{d+e}$ nur einmal erhalten. In der Summe wird dasselbe sonach mit dem Factor $4+3+2+1=10$ erscheinen, und so überhaupt:

$$\begin{aligned}
 5!(a, b, c, d, e) = & \Sigma \{s_a s_b s_c s_d s_e - 10s_a s_b s_c s_{d+e} + 20s_a s_b s_{c+d+e} \\
 & - 30s_a s_{b+c+d+e} + 15s_a s_{b+c} s_{d+e} - 20s_{a+b} s_{c+d+e} + 24s_{a+b+c+d+e}\},
 \end{aligned}$$

wo in dieser Summe alle möglichen Permutationen zu bilden sind. Da aber die sämmtlichen so entstehenden Glieder von der Form $s_a s_b s_c s_d s_e$ identisch sind, so ist $\Sigma s_a s_b s_c s_d s_e = 5! s_a s_b s_c s_d s_e$. Da ferner die Permutationen von a, b, c einerseits und c, d andererseits, das Product $s_a s_b s_c s_{d+e}$ in Wahrheit nicht ändern, so wird dasselbe $3!2!$ mal in der obigen Summe erscheinen und so $\Sigma s_a s_b s_c s_{d+e} = 12 \S s_a s_b s_c s_{d+e}$ sein, wenn unter $\S$ nur die Summe der wirklich verschiedenen Producte verstanden wird. Ebenso wird jedes Product $s_a s_b s_{c+d+e}$ in obiger Summe $2!3!$ mal gebildet, $s_a s_{b+c+d+e}$ $4!$ mal; in $s_a s_{b+c} s_{d+e}$ wird man sowohl b und c als auch d und e , sowie auch überdies diese beiden Gruppen $b+c$ und $d+e$ mit einander vertauschen können, ohne dass ein anderes Product erhalten wird; dasselbe wird daher $2!2!2!$ mal in der obigen Summe erzeugt. Ferner erhält man $s_{a+b} s_{c+d+e}$ $2!3!$ mal und endlich $s_{a+b+c+d+e}$ $5!$ mal, so dass man:

$$\begin{aligned}
 (a, b, c, d, e) = & s_a s_b s_c s_d s_e - \S s_a s_b s_c s_{d+e} + 2 \S s_a s_b s_{c+d+e} \\
 & - 6 \S s_a s_{b+c+d+e} + \S s_a s_{b+c} s_{d+e} - 2 \S s_{a+b} s_{c+d+e} + 24 s_{a+b+c+d+e}
 \end{aligned}$$

12 *

findet, wo sich die Summen überall auf die Bildung aller wirklich verschiedenen Glieder derselben Form beziehen.

Ein besonderer Fall unserer allgemeinen Formel ist schon bekannt: Wenn nämlich alle Exponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 1$ und damit auch alle Determinanten der obigen Summe einander gleich sind, so erhält man:

$$\Sigma x_1 x_2 \dots x_n = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Diese Summe ist aber nicht unmittelbar der n^{te} Coefficient der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind, sondern das $n!$ fache desselben; denn in der Σ hat man nicht allein alle Combinationen zu je n , sondern auch alle Permutationen innerhalb einer jeden Combination $x_1, x_2, \dots, x_n$ eintreten zu lassen. Auf diesen Umstand hat man überhaupt zu achten, wenn man eine symmetrische Function $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, in der nicht alle Exponenten von einander verschieden sind, durch die Summe von Determinanten darstellen will.

II. Um den obigen Satz I. nun allgemein zu erweisen, gehe ich von einer anderen Form desselben aus. Ich werde nämlich zeigen:

Dass $(n-1)!(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ durch eine Summe von $(n-1)!$ Determinanten von der Form (1.) dargestellt wird, welche man durch Permutation der Indices $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ erhält, während der letzte Index α_n und damit die letzte Verticalreihe, in den Determinanten überall unverändert bleibt.

Dass hiermit zugleich die obige Form I. des Satzes erwiesen wird, ist evident, denn man braucht, um diese zu erhalten, nur in jeder Determinante noch die Permutationen von α_n mit $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ vorzunehmen.

Was aber die jetzige Form betrifft, so kann dieselbe für $n=2, 3$ leicht verificirt werden; denn nach ihr ist:

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} &= \begin{vmatrix} s_{\alpha_1} & 1 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2} & s_{\alpha_2} \end{vmatrix} = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} - s_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ 2! \Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} &= \begin{vmatrix} s_{\alpha_1} & 1 & 0 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2} & s_{\alpha_2} & 2 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{\alpha_2} & 1 & 0 \\ s_{\alpha_2+\alpha_1} & s_{\alpha_1} & 2 \\ s_{\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3} & s_{\alpha_1+\alpha_3} & s_{\alpha_3} \end{vmatrix} \\ &= 2 \{ s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_3} - s_{\alpha_1} s_{\alpha_2+\alpha_3} - s_{\alpha_2} s_{\alpha_3+\alpha_1} - s_{\alpha_3} s_{\alpha_1+\alpha_2} + 2 s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \}. \end{aligned}$$

Durch eine bekannte Schlussweise kann man hieraus die Formel allgemein

erweisen mittels des Satzes:

$$(2.) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = s_{\alpha_{i_n}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_{n-1}}) - \Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n})$$

worin i_n eine beliebige, aber bestimmte Zahl aus der Reihe 1, 2, ... n bezeichnet, und i_{n-1} in der Σ folgeweise die Werthe 1, 2, ... n , mit Ausschluss der für i_n gewählten Zahl zu durchlaufen hat, die Zahlen $i_1, \dots, i_{n-2}$ aber die übrigen $(n-2)$ Zahlen aus 1, 2, ... n in irgend einer Reihenfolge bezeichnen.

Setzt man nun voraus, dass der Satz in der II. Form für eine homogene Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erwiesen ist, so hat man danach

$$(n-2)!(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}) = \Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-2}}} & s_{\alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_{n-2}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}} & n-2 \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}} + \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}} \end{vmatrix},$$

wo in dieser Summe $i_1, \dots, i_{n-2}$ alle möglichen Permutationen der Zahlenwerthe 1, 2, ... n , mit Ausschluss der für i_{n-1} und i_n gewählten, zu durchlaufen haben. Durch Hinzufügung einer neuen vertikalen und horizontalen Reihe kann man für dieselbe Summe:

$$-\frac{1}{n-1} \Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-2}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}} & n-2 & 0 \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}} + \alpha_{i_{n-1}}} & s_{\alpha_{i_{n-1}}} & n-1 \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}} + \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}} & 0 \end{vmatrix},$$

schreiben, und man sieht daher, dass

$$-\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}),$$

wo die Summe in dem oben bei (2.) angegebenen Sinne zu nehmen ist, durch

$$(3.) \quad \frac{1}{(n-1)!} \Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}} & n-1 \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}} & 0 \end{vmatrix}$$

dargestellt wird, in welcher Summe jetzt $i_1, \dots, i_{n-2}$ und i_{n-1} alle Permutationen in der Zahlenreihe $1, 2, \dots, n$ mit Ausschluss des für i_n gewählten Werthes zu durchlaufen haben.

Gilt ferner unser Satz II. für eine Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so gilt, wie schon bemerkt, für eben diese auch der Satz I., es ist also:

$$(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}) = \frac{1}{(n-1)!} \sum \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}} \end{vmatrix},$$

oder durch Hinzufügung einer horizontalen und einer vertikalen Reihe:

$$(4.) \quad s_{\alpha_{i_n}}(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{n-1}}) = \frac{1}{(n-1)!} \sum \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}} & 0 \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_n}} \end{vmatrix},$$

wo das Summenzeichen sich auf dieselben Permutationen bezieht, wie in (3.). Die Determinanten in (3.) und (4.) unterscheiden sich nur in der letzten Columne, können also sofort addirt werden und man erhält so nach (2.):

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{(n-1)!} \sum \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_n}} \end{vmatrix},$$

worin i_n irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$ bedeutet und $i_1, \dots, i_{n-1}$ die Permutationen der übrig bleibenden Zahlen zu durchlaufen haben, q. e. d.

Leipzig, April 1865.