UEBER KRÜMMUNGSEIGENSCHAFTEN
EINER m -DIMENSIONALEN MANNIGFALTIGKEIT, DIE IN
EINER n -DIMENSIONALEN MANNIGFALTIGKEIT MIT BELIEBIGER
KWADRATISCHER MASSBESTIMMUNG EINGEBETTET IST.

Von J. A. Schouten und D. J. Struik (Delft).

Adunanza del 24 luglio 1921.

EINLEITUNG.

Die Krümmung einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger kwadratischer Maszbestimmung eingebettet ist, kann charakterisiert werden durch eine Grösze dritten Grades mit $\frac{1}{2}nm(m+1)$ Bestimmungszahlen. Es sollen im folgenden einige der wichtigsten Eigenschaften, die sich mit Hülfe dieser Grösze und ohne Verwendung der von RIEMANN und CHRISTOFFEL zuerst definierten Krümmungsgrößen vierten Grades (Vierindizessymbole) der beiden Mannigfaltigkeiten formulieren lassen, angegeben werden. Diese Eigenschaften sind bis auf einige wenige, die nur des Zusammenhanges wegen erwähnt werden, bisher entweder nicht für allgemeine Werte von m und n oder nicht für beliebige kwadratische Maszbestimmung abgeleitet. Als Beispiel sind zum Schlusz die in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit eingebetteten zwei- und dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten behandelt.

Es bedeute im folgenden V_p eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit mit beliebiger kwadratischer Maszbestimmung, S_p eine solche konstanter Krümmung und R_p eine mit euklidischer Maszbestimmung oder auch ein infinitesimales Gebiet einer V_p .

Die verwendeten Notationen sind in unserer Arbeit über den Satz von MALUS in der V_n in dieser Zeitschrift dargestellt, ausführlicher noch in einer Arbeit von J. A. SCHOUTEN über die V_n , welche sich conform auf eine R_n abbilden lassen sowie in dem Buche von D. J. STRUIK über die *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* ¹⁾. Es wird also nicht nötig sein diese Darstellung hier nochmals zu wiederholen.

¹⁾ J. A. SCHOUTEN und D. J. STRUIK, *Ueber das Theorem von MALUS-DUPIN und einige verwandte Theoreme in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Massbestimmung*

§ 1.

Fundamentaltensoren und Differentiation.

Eine Kurve oder eine Kongruenz, d. h. eine Familie von ∞^{p-1} Kurven in einer V_p , wird im folgenden immer angegeben durch den tangierenden Einheitsvektor i .

Es sei eine V_m in einer V_n gegeben. In der V_n legen wir n gegenseitig orthogonale Kongruenzen $i_1, \dots, i_n$, so dass die V_m gebildet wird von Kurven der Kongruenzen $i_1, \dots, i_m$. Im folgenden durchlaufen die Indizes i, j, k, l die Werte $1, \dots, n$, die Indizes a, b, c, d die Werte $1, \dots, m$, und die Indizes e, f, g, h die Werte $m+1, \dots, n$.

Ist 2g dann der Fundamentaltensor der V_n :

$$(1) \quad {}^2g = aa = bb = \dots$$

$$(2) \quad a = \sum a_j i_j, \quad b = \sum b_j i_j, \dots$$

$$(3) \quad a_j a_k = b_j b_k = \dots = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{„ } j \neq k \end{cases}.$$

so ist der Fundamentaltensor der V_m :

$$(4) \quad {}^2g' = a'a' = b'b' = \dots$$

wenn:

$$(5) \quad a' = \sum a_a i_a, \quad b' = \sum b_a i_a, \dots$$

Setzen wir noch:

$$(6) \quad a'' = \sum a_e i_e, \quad b'' = \sum b_e i_e, \dots$$

so ist:

$$(7) \quad a' + a'' = a, \quad b' + b'' = b, \dots$$

$$(8) \quad a'a'' = a'a' = 0, \quad b'b'' = b'b' = 0, \dots$$

Ist ∇ der Differentialoperatorkern für V_n und ∇' für V_m , so gilt für ein beliebiges Vektorfeld v in V_n :

$$(9) \quad \nabla v = \{\nabla(a \cdot v)\}a,$$

für ein beliebiges Skalarfeld p in V_m :

$$(9_a) \quad \nabla' p = {}^2g'^{-1} \nabla p$$

[Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLV (1921), S. 313-331]; J. A. SCHOUTEN, *Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung* [Mathematische Zeitschrift, Bd. XI (1921), S. 58-88]; D. J. STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* (Berlin, J. Springer, 1922).

und für ein beliebiges ganz in V_m gelegenes Vektorfeld w :

$$(10) \quad \nabla' w = \{\nabla'(a' \cdot w)\} a' = \{\nabla'(a \cdot w)\} a' = {}^2g'^1 \{\nabla(a \cdot w)\} a'^2 g' = g'^2 \nabla w,$$

wo

$$(11) \quad g' = a' b' b' a'.$$

In gleicher Weise leitet man den allgemeinen Satz ab:

Liegt irgend ein Feld $\overset{p}{v}$ ganz in der V_m , so ist $\nabla' \overset{p}{v}$ die in V_m gelegene Komponente von $\overset{p}{\nabla} v$.

§ 2.

Absolute, relative und erzwungene Krümmung einer Kongruenz in V_m .

In der V_m liege eine Kurve i . Wir nennen dann

$$(12) \quad u = i^1 \nabla i = i^1 \nabla(a \cdot i) a$$

den Krümmungsvektor der Kurve in der V_n oder den *absoluten Krümmungsvektor* ²⁾ und

$$(13) \quad u' = i^1 \nabla' i = i^1 \nabla'(a' \cdot i) a'$$

den Krümmungsvektor in der V_m oder den *relativen Krümmungsvektor*. u ist Null, wenn i geodätisch ist in V_m , ebenso u' , wenn i geodätisch ist in V_m .

Nun ist:

$$(14) \quad \begin{cases} u = i^1 \nabla i = i^1 \{\nabla(a \cdot i)\} a = i^1 \{\nabla'(a' \cdot i)\} a = i^1 \{\nabla'(a' \cdot i)\} a' + i^1 \{\nabla'(a' \cdot i)\} a'' \\ = i^1 \nabla' i + i^1 (\nabla' i)^1 a' a'' + i^1 (\nabla' a')^1 i a'' = i^1 \nabla' i + i i^2 (\nabla' a') a''. \end{cases}$$

Schreibt man nun

$$(15) \quad \overset{3}{H} = (\nabla' a') a'',$$

so ist also:

$$(16) \quad u = u' + i i^2 \overset{3}{H}.$$

$u'' = i i^2 \overset{3}{H}$ ist senkrecht zur V_m , da a'' nur $i_{m+1}, \dots, i_n$ enthält, und heisst der

²⁾ RICCI nennt diesen Vektor «curvatura geodetica». G. RICCI, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque* [Atti della R. Accademia dei Lincei, serie V, Memorie, vol II (1895), S. 276-322], S. 298. Vgl. auch J. E. WRIGHT, *Invariants of quadratic differential forms*, Cambridge Tracts N. 9, S. 78.

Vektor der erzwungenen Krümmung in bezug auf V_n . $\overset{3}{H}$ ist unabhängig von i und heisst der Krümmungsaffinor der V_m in bezug auf V_n ³). Es gilt also der Satz:

Der absolute Krümmungsvektor ist die Summe des relativen Krümmungsvektors und des Vektors der erzwungenen Krümmung.

Für $u' = 0$ wird $u = u''$ und u'' ist also der absolute Krümmungsvektor einer in V_m geodätischen Kurve, welche dieselbe Tangente hat als die gegebene. Wird in jedem Punkte der Kurve $u'' = 0$, so nennen wir i eine *Haupttangentenkurve erster Ordnung* der V_m ⁴). Eine in V_m geodätische Kurve ist also dann und nur dann auch in V_n geodätisch, wenn sie Haupttangentenkurve erster Ordnung der V_m ist.

Da die absolute Krümmung einer Kurve i in V_m nach (16) nur von u'' und von der Richtung der ersten Normalen abhängt, folgt der Satz:

Die drei Krümmungsvektoren aller Kurven der V_m , die in einem Punkte P dieselbe Tangente und dieselbe erste Normale haben, sind gleich. Haben zwei Kurven der V_m in P dieselbe Tangente, und enthält die in V_n osculierende R_2 der ersten eine Normale auf V_m , während die in V_n osculierende R_2 der zweiten mit dieser Normalen einen Winkel ψ bildet, so verhalten sich die absoluten ersten Krümmungen wie $\cos \psi : 1$ ⁵).

Dies ist der für V_i in V_m in V_n erweiterte Satz von MEUSNIER.

Da

$$(17) \quad (\nabla a)a = 0 \quad ^6),$$

ist auch

$$(18) \quad (\nabla a)a'' = 0,$$

und man kann also für $\overset{3}{H}$ auch folgenden Ausdruck bilden:

$$(19) \quad \overset{3}{H} = \overset{4}{g}'^2 (\nabla a')a'' = -\overset{4}{g}'^2 (\nabla a'')a' = -\overset{4}{g}'^2 \nabla a'' a'.$$

³) $\overset{3}{H}$ korrespondiert mit dem Ausdruck $\Omega_{,ij}$ bei A. VOSS, *Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten* [Mathematische Annalen, Bd. XVI (1880), S. 129-178], S. 135 (V_m in V_n), mit $b_{\alpha\lambda\gamma\delta}$ bei G. RICCI, *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni* [Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Serie V, vol. XII, 1^o semestre 1903, S. 409-420] (V_m in V_n) und mit $k_{fg}^{(r)}$ bei H. KÜHNE, *Ueber die Krümmung einer beliebigen Mannigfaltigkeit* [Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, vol. VI (1904), S. 251-260], (V_m in R_n).

⁴) Eine Kurve heisst *Haupttangentenkurve p -ter Ordnung*, wenn ihr osculierender p -Vektor in der V_m liegt.

⁵) K. KOMMERELL, *Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen* [Dissertation Tübingen 1897], S. 17 (V_2 in R_4); E. E. LEVI, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* [Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, Scienze fisiche e matematiche, vol. X (1908), N. 2] S. 46 (V_2 in R_n).

⁶) Vergl. SCHOUTEN, l. c. ¹), S. 71.

Da aber

$$(20) \quad \nabla a'' a'' = \nabla^2 g - \nabla^2 g' = -\nabla^2 g',$$

so folgt:

$$(21) \quad \overset{3}{H} = g'^2 \nabla^2 g'.$$

Aus (19) folgt:

$$(22) \quad \overset{3}{H} = - \sum_e g'^2 \nabla i_e i_e = - \sum_e g'^2 (\nabla i_e) i_e.$$

Eine Haupttangentialrichtung erster Ordnung i der V_m genügt der Gleichung:

$$(23) \quad i i^2 \overset{3}{H} = 0,$$

oder nach (21) auch:

$$(24) \quad i i^2 \nabla^2 g' = 0 \quad ^7),$$

nach (22) gleichbedeutend mit den $n - m$ Gleichungen:

$$(25) \quad i i^2 \nabla i_e = 0, \quad (e = m + 1, \dots, n) \quad ^8).$$

Damit eine Kongruenz senkrecht zu einer V_m ist, ist notwendig, dass die Komponente in der V_m der ersten Ableitung des tangierenden Einheitsvektors symmetrisch ist ⁹⁾. ∇i_e ist also symmetrisch in $i_a i_b$, und aus (22) folgt also, dass $\overset{3}{H}$ in den beiden ersten idealen Faktoren symmetrisch ist.

§ 3.

Der Hauptsatz des Krümmungsaffinors (Bedingung einer geodätischen Mannigfaltigkeit).

Eine V_m heisst in V_n *geodätisch*, wenn jede in V_m geodatische Kurve auch in V_n geodätisch ist, oder mit anderen Worten, wenn die erzwungene Krümmung jeder Kurve der V_m null ist. Da aber

$$(26) \quad u'' = i i^2 \overset{3}{H}$$

⁷⁾ Man kann beweisen, dass eine Haupttangentialkurve p -ter Ordnung der Gleichung

$$i^{p+1} i^{p+1} \nabla^p g' = 0$$

genügt.

⁸⁾ Voss, l. c. ³⁾, S. 151.

⁹⁾ Für den Beweis vergl. unsere Arbeit: *Over n-voudig orthogonale stelsels van (n-1)-dimensionale uitgebreidheden in een algemeene uitgebreidheid van n afmetingen* [Verslagen Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Bd. XXVIII (1919), S. 201-212, 452-463, englisch: Proceedings Bd. XXII (1919), S. 596-605, 684-695], oder STRUIK, l. c. ¹⁾, Abschn. II.

und $\overset{3}{H}$ in den beiden ersten idealen Faktoren symmetrisch ist, ist dies dann und nur dann der Fall, wenn $\overset{3}{H}$ verschwindet. Somit gilt der Satz:

Eine V_m ist dann und nur dann in der V_n geodätisch, wenn der Krümmungsaffinor $\overset{3}{H}$ in jedem Punkte verschwindet ¹⁰⁾.

Infolge (22) kann die Bedingung $\overset{3}{H} = 0$ auch geschrieben werden:

$$(27) \quad g'^2 \nabla i_e = 0, \quad (e = m + 1, \dots, n).$$

§ 4.

Der Hauptsatz des mittleren Krümmungsvektors (Bedingung für eine Minimalmannigfaltigkeit).

Schreiben wir

$$(28) \quad D = \frac{1}{m} g'^2 \overset{3}{H} = \frac{1}{m} \sum_a i_a i_a^2 \overset{3}{H},$$

so ist D der vektorische Mittelwert der m Vektoren erzwungener Krümmung, die zu m beliebigen gegenseitig senkrechten Richtungen der V_m gehören, also auch der vektorische Mittelwert für alle Richtungen der V_m überhaupt. D heisst der *mittlere Krümmungsvektor* der V_m ¹¹⁾.

Wir nennen nun eine V_m eine *Minimalmannigfaltigkeit*, wenn die Variation des Inhaltes jedes durch eine geschlossene V_{m-1} begrenzten Teiles bei Festhaltung der Begrenzung verschwindet. Es gilt dann der Satz:

Eine V_m ist dann und nur dann eine Minimalmannigfaltigkeit, wenn der mittlere Krümmungsvektor D in jedem ihrer Punkte verschwindet.

Der Beweis ergibt sich durch Ausführung der Variation ¹²⁾.

¹⁰⁾ RICCI, l. c. 3), für V_m in V_n .

¹¹⁾ Vgl. LEVI, l. c. 5), S. 70, für V_2 in R_n .

¹²⁾ Zuerst bewiesen für V_m in V_n durch R. LIPSCHITZ, *Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 78 (1874), pp. 1-45], S. 31, weiter hat u. a. W. KILLING, *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* [Leipzig, Teubner (1885)], S. 246 den Satz aufgestellt für V_m in S_n , KÖHNE, l. c. 3), S. 260 hat einen Beweis gegeben für V_m in R_n , und LEVI, l. c. 5), S. 91, für V_2 in R_n .

§ 5.

 Das Krümmungsgebiet und das Krümmungsgebilde einer V_m in V_n .

Es sei die Lage von i in V_m in bezug auf die Kongruenzen i_a festgelegt durch die Gleichung:

$$(29) \quad i = \sum_a i_a \cos \alpha_a.$$

Ist dann in einem Punkte P i in V_m geodatisch, so ist da:

$$(30) \quad u = u'' = i i^2 \overset{3}{H} = \sum_{ab} \cos \alpha_a \cos \alpha_b i_a i_b^2 \overset{3}{H}.$$

Die $\frac{m(m+1)}{2}$ Vektoren $i_a i_b^2 \overset{3}{H}$ bestimmen eine $R_{m'}$ und es ist sowohl $m' \leq \frac{m(m+1)}{2}$ als $m' \leq n - m$. Diese $R_{m'}$ bestimmt mit der V_m zusammen eine $R_{m+m'}^{13}$, das Krümmungsgebiet der V_m in P .

In diesem Krümmungsgebiet spielt sich alles ab, was sich auf Krümmungen erster Ordnung in V_m in P bezieht.

Nehmen wir zunächst an, es sei $m' = \frac{m(m+1)}{2}$. Sodann liegt der Endpunkt von u'' in einer $R_{m'-1}$ durch den Endpunkt des Radiusvektors D . Der Endpunkt beschreibt eine $V_{m'-1}$, das Krümmungsgebilde, welches durch die m' Gleichungen

$$(31) \quad u_v = \sum_{ab} \cos \alpha_a \cos \alpha_b H_{abv} \quad (v = m+1, \dots, m+m'),$$

mit den m Parametern $\cos \alpha_a$ und der Beziehung

$$(32) \quad \sum_a \cos^2 \alpha_a = 1$$

charakterisiert ist. Der Punkt mit Radiusvektor D ist der Schwerpunkt des Krümmungsgebildes ¹⁴). Eine beliebige $R_{m'-m+1}$ in der $R_{m'}$ senkrecht zur V_m ist gegeben durch $m-1$ lineare Gleichungen zwischen den u''_v . Fügt man diese Gleichungen zu (31), so ergeben sich m Gleichungen zweiten Grades für die $\cos \alpha_a$ der Schnittpunkte. Da zu jeder positiven Wurzel eine gleich grosse negative gehört, und diese beiden

¹³) P DEL PEZZO, *Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, vol. XXV (1886), S. 176-180] (V_m in R_n). LEVI, l. c. 5), S. 60 (V_2 in R_n).

¹⁴) LEVI, l. c. 5), S. 70, für V_2 in R_n .

Wurzeln zum nämlichen Punkte der V_{m-1} gehören, ergeben sich 2^{m-1} Schnittpunkte und das Krümmungsgebilde ist also vom Grade 2^{m-1} .

Wir haben also den Satz erhalten:

Hat die Dimensionenzahl $m + m'$ des Krümmungsgebietes den Wert $m + \frac{m(m+1)}{2}$, so bildet u'' einen m -dimensionalen Kegelmantel in der $R_{m'}$, senkrecht zur V_m im Krümmungsgebiet, und sein Endpunkt beschreibt eine V_{m-1} , 2^{m-1} -ten Grades, die in einer $R_{m'-1}$ in der $R_{m'}$ liegt, und deren Schwerpunkt den Radiusvektor D hat.

Zwischen den ∞^{m-1} Richtungen in der V_m in P und den ∞^{m-1} Punkten des Krümmungsgebildes besteht eine 1-1 Zuordnung. Die Richtungen der V_m , die den extremen Längen von u'' entsprechen, sind die *Hauptkrümmungsrichtungen* der V_m ¹⁵⁾. Im Allgemeinen geht das Krümmungsgebilde nicht durch P und gibt es also keine Haupttangentialrichtungen erster Ordnung.

Ist $m' < \frac{m(m+1)}{2}$, was stets der Fall ist wenn $\frac{m(m+1)}{2} > n - m$, ist aber $m' \geq m$, so bleibt der für $m' = \frac{m(m+1)}{2}$ abgeleitete Satz gültig, mit der einzigen Ausnahme, dass die V_{m-1} im Allgemeinen nicht mehr in einer $R_{m'-1}$ in $R_{m'}$ liegt, und es besteht im Allgemeinen auch noch eine 1-1 Zuordnung zwischen den Richtungen der V_m und den Punkten des Krümmungsgebildes, dieses Gebilde enthält jetzt aber Punkte, die mehreren Richtungen der V_m zugleich entsprechen. Es gibt im allgemeinen noch keine Haupttangentialrichtungen erster Ordnung.

Wird $m' = m - 1$, so degeneriert das Krümmungsgebilde zur $R_{m'}$ senkrecht zu V_m im Krümmungsgebiet. Jedem Punkte dieser $R_{m'}$ entsprechen 2^{m-1} Richtungen der V_m . Es gibt also auch 2^{m-1} Haupttangentialrichtungen erster Ordnung.

Wird $m' < m - 1$, so degeneriert das Krümmungsgebilde zur $R_{m'}$ senkrecht zu V_m im Krümmungsgebiet, jedem Punkte dieser $R_{m'}$ entsprechen nun aber $\infty^{m-1-m'}$ Richtungen der V_m und es gibt $\infty^{m-1-m'}$ Haupttangentialrichtungen erster Ordnung.

Es sind in der Litteratur noch verschiedene andere Gebilde zur Charakterisierung der Krümmung verwendet worden. Statt des Krümmungsgebildes G kann man den Ort der Krümmungsmittelpunkte G' nehmen, der aus G durch Inversion in bezug auf P erhalten wird. Für $m = 2$, $V_n = R_4$ nennt KOMMERELL¹⁶⁾ die Kurve K in der

¹⁵⁾ Vgl. u. a. L. KRONECKER, *Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln* [Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1869, S. 159-193, 688-698], S. 692 (V_{n-1} in R_n); VOSS, l. c. 3), S. 150 (V_{n-1} in V_n) LEVI, l. c. 5), S. 67 (V_2 in R_2).

¹⁶⁾ l. c. 5), § 6, § 11.

$R_2 \perp V_2$, deren Fuszpunktkurve G' ist, die « Charakteristik » ¹⁷⁾. Durch Inversion von K in bezug auf P entsteht eine vierte Kurve K' , die wieder Fuszpunktkurve von G ist. KUHNE ¹⁸⁾ nimmt für V_m in R_n den Ort der Schnittgebilde der $R_{n-m} \perp V_n$ in P mit den benachbarten R_{n-m} , und nennt diesen Ort die « Krümmungsspur ». Eine beliebige Normale auf V_m schneidet die Krümmungsspur in m Punkten, die den m extremen Werten der Projektion von u'' auf diese Normale entsprechen. Für V_2 in R_4 ist die Krümmungsspur identisch mit der Kurve K' .

§ 6.

Der Umbilikalvektor U .

Ist $m' = \frac{m(m+1)}{2}$, so geht die $R_{m'-1}$, welche das Krümmungsgebilde enthält, und die durch die $m' - 1$ Vektoren $i_a i_b {}^3H$, $(i_a i_a - i_b i_b) {}^3H$, $a < b$, bestimmt wird, im allgemeinen nicht durch P . Der Vektor U , der sich von P bis zu dieser $R_{m'-1}$ und senkrecht zu ihr erstreckt, heisst der *Umbilikalvektor* der V_m . Ist D senkrecht zur $R_{m'-1}$, so ist $U = D$. Für eine Minimalmannigfaltigkeit ist $U = 0$. Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. Ein besonderer Fall tritt ein, wenn das Krümmungsgebilde sich in einen Punkt zusammenzieht. Es ist dann $U = D$ und 3H hat die Form

$$(33) \quad {}^3H = {}^2g' D.$$

Ein Punkt, wo dies zutrifft, heisst ein *Umbilikalpunkt* oder *Nabelpunkt* der V_m . Das Krümmungsgebiet hat in einem solchen Punkt $m + 1$ Dimensionen. Hat das Krümmungsgebiet $m + 1$ Dimensionen, so heisst der Punkt ein *axialer Punkt* der V_m . Ein axialer Punkt ist nicht immer auch Umbilikalpunkt.

§ 7.

$$V_1 \text{ in } V_{m_2} \text{ in } V_{m_1} \text{ in } V_n.$$

Liegt eine V_1 in einer V_{m_2} , die in einer V_{m_1} in V_n eingebettet ist, so kann man den Satz beweisen:

Der Krümmungsaffinor, der Vektor der erzwungenen Krümmung einer Kurve und der

¹⁷⁾ Vgl. LEVI, l. c. 5) Fussnote S. 68.

¹⁸⁾ l. c. 3).

mittlere Krümmungsvektor einer V_{m_2} in V_{m_1} in V_n in bezug auf die V_{m_1} sind die V_{m_1} -Komponenten der gleichartigen Gröszen in bezug auf die V_n ¹⁹⁾, und sind invariant bei allen Verbiegungen der V_{m_1} in V_n , welche den betrachteten Punkt und die m_1 -Richtung der V_{m_1} in diesem Punkt unverändert lassen ²⁰⁾.

Aus diesem Satze lassen sich einige interessante Folgerungen ableiten.

Ist die Dimensionenzahl des Krümmungsgebietes einer V_m in V_n kleiner als n , so kann man in jedem Punkte der V_m eine q -Richtung, $q \leq n - m - m'$, senkrecht zum Krümmungsgebiet wählen und diese in beliebiger Weise in der V_n fortsetzen. In der so entstandenen V_{m+q} hat dann $\overset{3}{H}$ keine Komponente, und die gegebene V_m ist also in dieser V_{m+q} geodätisch. Es ergibt sich also der Satz:

Ist die Dimensionenzahl $m + m'$ des Krümmungsgebietes einer V_m in V_n kleiner als n , so gibt es für jeden Wert von $q \leq n - m - m'$ unendlich viele V_{m+q} , in bezug auf welche die V_m geodätisch ist ²¹⁾.

Ist in V_m eine bestimmte Kongruenz i gegeben, und ist $n > m + 1$, so kann man in jedem Punkte der V_m eine q -Richtung, $q \leq n - m - 1$, senkrecht zu V_m und zu u'' wählen und diese in beliebiger Weise in der V_n fortsetzen. In der so entstandenen V_{m+q} hat dann u'' keine Komponente und es ergibt sich also der Satz:

Ist $n > m + 1$, so gibt es für jeden Wert von $q \leq n - m - 1$ unendlich viele V_{m+q} , in welchen die Kurven einer in V_m gegebenen Kongruenz geodätische Linien sind.

In derselben Weise beweist man, indem man die q -Richtung senkrecht zu D wählt:

Ist $n > m + 1$, so gibt es für jeden Wert von $q \leq n - m - 1$ unendlich viele V_{m+q} , in bezug auf welche die V_m eine Minimalmannigfaltigkeit ist ²²⁾.

Wird die zu jedem Punkte der V_m gehörige Richtung von D in beliebiger Weise in der V_m fortgesetzt, so entsteht eine V_{m+1} , in bezug auf welche die V_m einen mittleren Krümmungsvektor maximaler Länge hat ²³⁾.

Wird die zu jedem Punkte der V_m gehörige Richtung des Umbilikalvektors in

¹⁹⁾ KILLING, l. c. ¹²⁾, S. 245 für D , V_{m-1} in V_m in S_n ; L. BERZOLARI, *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXIII (1898), S. 692-700, 759-778] für D , V_{m_2} in V_{m_1} in S_n .

²⁰⁾ BERZOLARI, l. c. ¹⁹⁾ für D , V_{m_2} in V_{m_1} in S_n . Für den Beweis vergl. STRUIK, l. c. ¹⁾.

²¹⁾ Das einfachste Beispiel ist der Ort der Binormalen einer Kurve in R_3 .

²²⁾ KOMMERELL, l. c. ⁵⁾, S. 32, V_2 in R_4 .

²³⁾ KOMMERELL, l. c. ⁵⁾, S. 32, V_2 in R_4 ; BERZOLARI, l. c. ¹⁹⁾, S. 696, nennt für V_m in S_n die durch d.e. tangierende S_m und D bestimmte S_{m+1} «spazio osculatore» und D die «Krummung» der V_m . BERZOLARI betrachtet nicht die Krümmungen einer V_m in bezug auf eine V_{m+q} durch V_m , sondern er projiziert V_m auf eine S_{m+q} durch die tangierende S_m und betrachtet dann die Krümmungen dieser Projektion.

beliebiger Weise in der V_n fortgesetzt, so entsteht eine V_{m+1} , in bezug auf welche die V_m lauter Umbilikalpunkte besitzt. Es ergibt sich also der Satz:

Ist der Umbilikalvektor einer V_m nicht Null, so gibt es unendlich viele V_{m+1} , in bezug auf welche die V_m eine Mannigfaltigkeit mit lauter Umbilikalpunkten ist.

§ 8.

V_m in V_n mit lauter axialen Punkten.

Für eine V_m mit lauter axialen Punkten ist

$$(34) \quad {}^3\mathbf{H} = - {}^4\mathbf{g}'^2 (\nabla \mathbf{i}_{m+1}) \mathbf{i}_{m+1}.$$

Wir setzen nun

$$(35) \quad {}^4\mathbf{g}'^2 \nabla \mathbf{i}_{m+1} = {}^2\mathbf{h},$$

und legen die Kongruenzen $\mathbf{i}_a$ in den Hauptrichtungen von ${}^2\mathbf{h}$. Dann ist:

$$(36) \quad {}^3\mathbf{H} = - {}^2\mathbf{h} \mathbf{i}_{m+1} = - \sum_a h_{aa} \mathbf{i}_a \mathbf{i}_a \mathbf{i}_{m+1}, \quad h_{ab} = 0, \quad a \neq b.$$

Für $\mathbf{i}_a$ gilt

$$(37) \quad \frac{d\mathbf{i}_a}{ds_b} = \mathbf{i}_b^1 \nabla \mathbf{i}_a = \sum_c (\mathbf{i}_c \mathbf{i}_b^2 \nabla \mathbf{i}_a) \mathbf{i}_c - h_{ab} \mathbf{i}_{m+1}$$

also

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{i}_a}{ds_b ds_c} &= \sum_d \left\{ \frac{d}{ds_c} (\mathbf{i}_d \mathbf{i}_b^2 \nabla \mathbf{i}_a) \right\} \mathbf{i}_d \\ &+ \sum_{du} (\mathbf{i}_d \mathbf{i}_b^2 \nabla \mathbf{i}_b) \cdot \{ (\mathbf{i}_u \mathbf{i}_c^2 \nabla \mathbf{i}_d) \mathbf{i}_u - h_{dc} \mathbf{i}_{m+1} \} - \frac{dh_{ab}}{ds_c} \mathbf{i}_{m+1} - h_{ab} \frac{d\mathbf{i}_{m+1}}{ds_c} \end{aligned} \right. \quad 24)$$

während in einer S_n :

$$(39) \quad \frac{d^2 \mathbf{i}_a}{ds_b ds_c} - \frac{d^2 \mathbf{i}_a}{ds_c ds_b} = \sum_d^1, \dots, m \alpha_d \mathbf{i}_d + \alpha_{m+1} \mathbf{i}_{m+1}.$$

Die wichtigste Folgerung, die sich aus diesen Gleichungen ableiten lässt, ergibt sich für $a = b$, $b \neq c$. $h_{aa} \frac{d\mathbf{i}_{m+1}}{ds_c}$ erscheint dann als eine Summe von Termen, die nur $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_{m+1}$ enthalten. Ist nun der Tensor ${}^2\mathbf{h}$ von Range m und also keine seiner Bestimmungszahlen Null, so enthält $\frac{d\mathbf{i}_{m+1}}{ds}$ für jede beliebige Richtung nur $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_{m+1}$

²⁴⁾ In dieser Formel durchläuft auch u die Werte $1, \dots, m$.

und es ist also :

$$(40) \quad \frac{d}{ds} (i_1 \dots i_{m+1}) = 0.$$

Dies besagt, dass die V_m in einer in S_n geodätischen S_{m+1} liegt. Die S_{m+1} entsteht, wenn die Richtungen von i_{m+1} in S_n geodätisch verlängert werden. Es ergibt sich also der Satz:

Eine V_m in S_n mit lauter axialen Punkten liegt entweder in einer in S_n geodätischen S_{m+1} oder der Tensor 2h hat einen Rang $< m$ ²⁵⁾.

§ 9.

V_{n-1} in V_n .

Für eine V_{n-1} hat $\overset{3}{H}$ die Form:

$$(41) \quad \overset{3}{H} = - \overset{4}{g}'^2 (\nabla i_n) i_n.$$

Die symmetrische Grösze

$$(42) \quad {}^2h = \overset{4}{g}'^2 \nabla i_n$$

ist der zweite Fundamentaltensor der V_{n-1} ²⁶⁾. Im Allgemeinen ist offenbar:

$$(43) \quad \nabla i_n = {}^2h + i_n u_n,$$

wo u_n der Krümmungsvektor von i_n ist. Wird i_n geodätisch genommen, so ist einfacher:

$$(44) \quad {}^2h = \nabla i_n$$

$$(45) \quad \overset{3}{H} = - {}^2h i_n = - (\nabla i_n) i_n.$$

Der mittlere Krümmungsvektor

$$(46) \quad D = - \frac{1}{n} {}^2g'^2 (\nabla i_n) i_n = - \frac{1}{n} {}^2g'^2 {}^2h i_n$$

²⁵⁾ Für V_2 in R_n rührt dieses Theorem von SEGRE her: C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII (1907), S. 559-591]. S. 571.

²⁶⁾ In der Tat berechnet sich leicht:

$$h_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (i_n \cdot \nabla) g_{\lambda\mu}.$$

Vergl. l. c. 9), S. 208, englisch S. 601 und L. BIANCHI, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, autorisierte deutsche Übersetzung von MAX LUKAT, 1^e Auflage [Leipzig, Teubner, 1899], S. 601.

hat die Richtung von i_n . Für die Hauptrichtungen des zweiten Fundamentaltensors bekommt

$$(47) \quad u'' = -i i^{22} h i_n$$

einen extremen Wert. Diese Hauptrichtungen sind also zugleich die Hauptkrümmungsrichtungen ²⁷⁾. Sind i_a , $a = 1, \dots, n-1$ Einheitsvektoren in diesen Richtungen und $R_1, \dots, R_{n-1}$ die Hauptkrümmungsradien, positiv gerechnet wenn der Krümmungsvektor den Sinn von i_n hat, so ist

$$(48) \quad \begin{cases} i_a i_a^{22} h = h_{aa} = -\frac{1}{R_a} \\ i_a i_b^{22} h = 0, & a \neq b \end{cases}$$

und also

$$(49) \quad {}^2h = -\sum_a \frac{1}{R_a} i_a i_a,$$

und daraus ergibt sich der Satz:

Der Rang des zweiten Fundamentaltensors (d. i. der Rang der Matrix der Bestimmungszahlen) ist gleich der Anzahl nicht verschwindender Hauptkrümmungsradien.

Gilt für ein beliebige Richtung

$$(50) \quad i = \sum_a i_a \cos \alpha_a,$$

so ist nach (47):

$$(51) \quad u'' = -i i^{22} h = \sum_a \frac{1}{R_a} \cos^2 \alpha_a.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der EULER'schen Gleichung für V_{n-1} in V_n . Aus (49) folgt

$$(52) \quad i_a i^{12} h = i_a i^1 \nabla i_n = -\frac{1}{R_a} i_a$$

und die geodätische Aenderung des auf V_{n-1} normalen Einheitsvektors i_n liegt also dann und nur dann in der Richtung der Verrückung, wenn letztere in einer Hauptkrümmungsrichtung liegt ²⁸⁾. Dies ist die Verallgemeinerung eines Satzes von RODRIGUEZ für V_{n-1} in V_n . Für V_{n-1} in S_n besagt der Satz, dass die Normalen einer Krümmungslinie entlang und nur entlang dieser eine abwickelbare V_2 bilden.

Sind alle Hauptkrümmungsradien in einem Punkte der V_{n-1} gleich, so ist 2h ein Vielfaches des Fundamentaltensors der V_{n-1} :

$$(53) \quad {}^2h = -\frac{1}{R} {}^2g'$$

und der Punkt ist ein Umbilikalpunkt.

²⁷⁾ KRONECKER, l. c. ¹⁵⁾, V_{n-1} in R_n .

²⁸⁾ KRONECKER, l. c. ¹⁵⁾, V_{n-1} in R_n .

Alle diese Sätze über die Krümmung einer V_{n-1} in V_n gelten selbstverständlich auch in einem axialen Punkte einer V_m . Der Einheitsvektor in der Richtung ${}^2g'{}^2\overset{3}{H}$ tritt dann an der Stelle von i_n .

§ 10.

Uebertragung der Eigenschaften für V_{n-1} auf V_m .

Ist eine beliebige V_m gegeben, so kann man jedem Punkte eine zu V_m senkrechte Richtung i_{m+1} zuordnen und diese Richtungen in der V_n in beliebiger Weise fortsetzen. In bezug auf die so entstehende V_{m+1} hat dann die V_m m gegenseitig senkrechte Hauptkrümmungsrichtungen und m Hauptkrümmungsradien. In einem Punkte einer V_m kann man also auch stets sprechen von den Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungsradien in bezug auf eine beliebige zu V_m senkrechte Richtung.

In besonderen Fällen kann eine bestimmte Normale auf V_m ausgezeichnet sein. Dies ist z. B. der Fall wenn eine Kongruenz i in der V_m gegeben ist. Die ausgezeichnete Richtung ist dann die Richtung von u'' . Es ergeben sich dann ähnliche Schlüsse wie in § 9.

§ 11.

V_2 in V_n .

Gilt für eine Richtung

$$(54) \quad i = i_1 \cos \alpha + i_2 \sin \alpha,$$

so ist

$$(55) \quad \begin{cases} u'' = i i^2 \overset{3}{H} = i_1 i_1^2 \overset{3}{H} \cos^2 \alpha + 2 i_1 i_2^2 \overset{3}{H} \cos \alpha \sin \alpha + i_2 i_2^2 \overset{3}{H} \sin^2 \alpha = u''_{11} \cos^2 \alpha \\ \quad + 2 u''_{12} \sin \alpha \cos \alpha + u''_{22} \sin^2 \alpha = D + \frac{1}{2} (u''_{11} - u''_{22}) \cos 2 \alpha + u''_{12} \sin 2 \alpha. \end{cases}$$

Die 3 Vektoren u''_{11} , u''_{22} und u''_{12} sind im allgemeinen linear unabhängig. Das Krümmungsgebilde ist dann nach (55) eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $D = \frac{1}{2} (u''_{11} + u''_{22})$ und den halben konjugierten Durchmesser $\frac{1}{2} (u''_{11} - u''_{22})$ und u''_{12} , die *Krümmungsellipse* ²⁹⁾. Zwei gegenseitig senkrechte Richtungen in der V_2 entsprechen zwei sich diametral gegenüberliegenden Punkten der Ellipse.

²⁹⁾ KOMMERELL, I c. 5) (V_2 in R_4); M. SERVANT, *Sur une extension des formules de GAUSS* [Bulletin de la Société Mathématique de France, vol. 30 (1902), S. 92-100] (V_2 in R_4); LEVI, I. c. 5), p. 60 (V_2 in R_n); C. L. E. MOORE, *Note on normal sections of a surface in a space of n dimensions* [Annals of Mathematics of Princeton University, Serie 2, vol. 16 (1914-1915), S. 89-96] S. 95 (V_2 in R_n).

Die Länge von u'' ist

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} u'' &= \sqrt{u''_{11} \cdot u''_{11} \cos^4 \alpha + 4 u''_{11} \cdot u''_{12} \sin \alpha \cos^3 \alpha + (2 u''_{11} \cdot u''_{22} + 4 u''_{12} \cdot u''_{12}) \cdot} \\ &\quad \cdot \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4 u''_{12} \cdot u''_{22} \sin^3 \alpha \cos \alpha + u''_{22} \cdot u''_{22} \sin^4 \alpha \}. \end{aligned} \right.$$

Soll diese Länge einen extremen Wert haben, so musz der Differentialquotient nach α verschwinden, und es ergibt sich daraus eine Gleichung vierten Grades in $\operatorname{tg} \alpha$. Es existieren also in der V_2 vier Hauptkrümmungsrichtungen ³⁰⁾.

Zwei Richtungen

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} i_p &= i_1 \cos \alpha_p + i_2 \sin \alpha_p \\ i_q &= i_1 \cos \alpha_q + i_2 \sin \alpha_q \end{aligned} \right.$$

sind konjugiert, wenn

$$(58) \quad i_p i_q^2 H^3 = u''_{11} \cos \alpha_p \cos \alpha_q + u''_{12} (\cos \alpha_p \sin \alpha_q + \sin \alpha_p \cos \alpha_q) + u''_{22} \sin \alpha_p \sin \alpha_q = 0.$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn u''_{11} , u''_{22} und u''_{12} in derselben R_2 liegen. Die Ebene der Krümmungsellipse geht dann durch den betrachteten Punkt der V_2 . Haben u''_{11} , u''_{22} und u''_{12} nicht dieselbe Richtung, so heizt der Punkt in diesem Falle *planar* ³¹⁾. Das Krümmungsgebiet eines planaren Punktes ist eine R_4 . Eine V_2 in V_4 hat lauter planare Punkte. Für einen planaren Punkt giebt die Gleichung (58) zwei bestimmte konjugierte Richtungen ³²⁾ i_p und i_q , die im allgemeinen verschieden sind. Wenn eine beliebige Richtung i der V_2 in i_p und i_q ausgedrückt wird:

$$(59) \quad i = \lambda i_p + \mu i_q$$

so ist

$$(60) \quad u'' = \lambda^2 u''_p + \mu^2 u''_q.$$

Sind i_p und i_q reell, so lässt sich der Krümmungsvektor zu jeder beliebigen reellen Richtung also linear mit positiven Koeffizienten in u''_p und u''_q ausdrücken. Dies ist nur möglich, wenn u''_p und u''_q in den Tangenten durch P an der Ellipse liegen. Die konjugierten Richtungen sind also reell oder imaginär, je nachdem P ausserhalb oder innerhalb der Ellipse liegt. Liegt P auf der Ellipse, so fallen die beiden konjugierten Richtungen zusammen und es giebt in der V_2 eine einzige Haupttangentenrichtung ³³⁾.

³⁰⁾ KOMMERELL, l. c. 5), S. 21 (V_2 in R_4), LEVI, l. c. 5), pag. 66 (V_2 in R_n).

³¹⁾ V_2 in R_n mit lauter planaren Punkten sind untersucht von SEGRE, l. c. 25) und von LEVI, l. c. 5). SEGRE spricht von «Flachen φ ».

³²⁾ SEGRE, l. c. 25), S. 576 nennt die von diesen Kurven gebildeten Kurven die *Charakteristiken* der V_2 .

³³⁾ LEVI nennt einen Punkt, wo dies zutrifft, *parabolisch*, l. c. 5), S. 63 (V_2 in R_n); KOMMERELL, l. c. 5), nennt die konjugierten Richtungen (ineiner V_2 in R_4) *asymptotisch*. Vgl. dazu LEVI, l. c. 5), Fussnote S. 68.

Ist die Ellipse zu einer Doppelgeraden degeneriert, so sind die konjugierten Richtungen gegenseitig senkrecht und zugleich Hauptkrümmungsrichtungen.

Da

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d(\mathbf{i}_p \circ \mathbf{i}_q)}{ds_p} &= \mathbf{i}_p^1 \nabla (\mathbf{i}_p \circ \mathbf{i}_q) = (\mathbf{i}_p^1 \nabla \mathbf{i}_p) \circ \mathbf{i}_q + \mathbf{i}_p \circ (\mathbf{i}_p^1 \nabla \mathbf{i}_q) \\ &= \mathbf{u}'_p \circ \mathbf{i}_q + (\mathbf{i}_p \mathbf{i}_p^2 \overset{3}{H}) \circ \mathbf{i}_q + \mathbf{i}_p \circ \mathbf{u}'_{pq} + \mathbf{i}_p \circ (\mathbf{i}_p \mathbf{i}_q^2 \overset{3}{H}) \\ &= \mathbf{u}'_p \circ \mathbf{i}_q + \mathbf{i}_p \circ \mathbf{u}'_{pq} + (\mathbf{i}_p \mathbf{i}_p^2 \overset{3}{H}) \circ \mathbf{i}_q, \end{aligned} \right.$$

haben $\mathbf{i}_p \circ \mathbf{i}_q$ und $\frac{d}{ds_p}(\mathbf{i}_p \circ \mathbf{i}_q)$ die Richtung $\mathbf{i}_q$ gemein. Zwei in der Richtung $\mathbf{i}_p$ «benachbarte» tangierende Bivektoren schneiden sich also in der Richtung $\mathbf{i}_q$. Umgekehrt beweist man leicht, dass diese Eigenschaft nur bei konjugierten Richtungen auftritt ³⁴⁾.

Haben $\mathbf{u}''_1$, $\mathbf{u}''_2$ und $\mathbf{u}''_3$ dieselbe Richtung, so ist der Punkt P axial. Das Krümmungsgebiet eines axialen Punktes ist eine R_3 . $\overset{3}{H}$ hat die Form:

$$(62) \quad \overset{3}{H} = - {}^2h \mathbf{i}_3.$$

Die Krümmungsellipse ist degeneriert zur doppelt zählenden Geraden in der Richtung von $\mathbf{i}_3$. Nach der in § 8 bewiesenen Eigenschaft liegt eine V_2 in S_n mit lauter axialen Punkten entweder in einer in S_n geodätischen S_3 , oder 2h hat den Rang 1.

Es giebt wieder 4 Hauptkrümmungsrichtungen, zwei dieser Richtungen sind aber selbstkonjugiert und bilden die Haupttangentenrichtungen, die beiden anderen sind die Hauptkrümmungsrichtungen im engeren Sinne.

Eine Minimalfläche hat, wo sie nicht geodätisch ist, nur planare oder axiale Punkte. Ein planarer Punkt liegt in der Mitte der Krümmungsellipse ³⁵⁾. In einem axialen Punkt sind die beiden extremen Krümmungsvektoren entgegengesetzt gleich. Man vergleiche hier den Schluss des § 5.

³⁴⁾ SERVANT, l. c. ²⁹⁾, S. 99 (V_2 in R_4); LEVI, l. c. 5), S. 82 (V_2 in R_n).

³⁵⁾ EISENHART hat gezeigt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine V_2 in R_4 durch die Gleichung $u + iv = f(x + iy)$ gegeben werden kann, ist, dass die Krümmungsellipse ein Kreis ist: L. P. EISENHART, *Minimal surfaces in Euclidean four-space* [American Journal of Mathematics, vol. 34 (1912), S. 215-236]; KWIETNIEWSKI und KOMMERELL hatten schon bewiesen, dass diese Bedingung notwendig ist: STEFAN KWIETNIEWSKI, *Ueber Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven* (Dissertation Zurich, 1902), S. 47. Vgl. auch LEVI, l. c. 5), Fussnote S. 91; K. KOMMERELL, *RIEMANNsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen* [Programm des Karls Gymnasiums Heilbronn N. 707, auch Mathematische Annalen, Bd. 60 (1905), S. 546-596] S. 35 und S. 580.

§ 12.

 V_3 in V_n .

Gilt für eine Richtung

$$(63) \quad i = i_1 \cos \alpha_1 + i_2 \cos \alpha_2 + i_3 \cos \alpha_3,$$

so ist

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} u'' &= i_1 i_1^2 \overset{3}{H} \cos^2 \alpha_1 + i_2 i_2^2 \overset{3}{H} \cos^2 \alpha_2 + i_3 i_3^2 \overset{3}{H} \cos^2 \alpha_3 \\ &+ 2 i_2 i_3^2 \overset{3}{H} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + 2 i_3 i_1^2 \overset{3}{H} \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 + 2 i_1 i_2^2 \overset{3}{H} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ &= u''_{11} \cos^2 \alpha_1 + \text{cycl.} + 2 u''_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \text{cycl.} \\ &= \frac{1}{3} (u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}) + \frac{1}{3} (u''_{11} - u''_{22}) (3 \cos^2 \alpha_1 - 1) \\ &+ \frac{1}{3} (u''_{22} - u''_{33}) (1 - 3 \cos^2 \alpha_3) + (2 u''_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \text{cycl.}). \end{aligned} \right.$$

Die 6 Vektoren u''_{11} , u''_{22} , u''_{33} , u''_{23} , u''_{31} , u''_{12} sind im allgemeinen linear unabhängig.

Das Krümmungsgebilde ist dann eine V_2 vierten Grades in einer R_5 durch den Punkt mit dem Radiusvektor

$$(65) \quad D = \frac{1}{3} (u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}),$$

die durch die fünf Vektoren $u''_{11} - u''_{22}$, $u''_{22} - u''_{33}$, u''_{23} , u''_{31} und u''_{12} bestimmt wird.

Setzt man

$$(66) \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1,$$

so ist

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} u'' &= u''_{11} \cos^2 \alpha_1 + u''_{22} \sin^2 \alpha_1 + 2 u''_{12} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 \\ &= \frac{1}{2} (u''_{11} + u''_{22}) + \frac{1}{2} (u''_{11} - u''_{22}) \cos 2 \alpha_1 + u''_{12} \sin 2 \alpha_1, \end{aligned} \right.$$

und der Endpunkt von u'' beschreibt also eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2} (u''_{11} + u''_{22})$ und den halben konjugierten Durchmesser $\frac{1}{2} (u''_{11} - u''_{22})$ und u''_{12} . Da die Lage von i_1 , i_2 und i_3 ganz beliebig ist, liegen also auf der V_2 vierten Grades ∞^2 Ellipsen. Jeder 2-Richtung in der V_3 entspricht eine solche Ellipse, und zwei gegenseitig senkrechten Richtungen der V_2 entsprechen zwei sich diametral gegenüberliegende Punkte einer solchen Ellipse.

Zwei Richtungen

$$(68) \quad \begin{cases} i_p = i_1 \cos \alpha_p + i_2 \cos \beta_p + i_3 \cos \gamma_p \\ i_q = i_1 \cos \alpha_q + i_2 \cos \beta_q + i_3 \cos \gamma_q \end{cases}$$

sind konjugiert, wenn

$$(69) \quad i_p i_q^2 \overset{3}{H} = u''_{11} \cos \alpha_p \cos \alpha_q + \text{cycl.} + u''_{23} (\cos \beta_p \cos \gamma_q + \cos \gamma_p \cos \beta_q) + \text{cycl.} = 0.$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn u''_{11} , u''_{22} , u''_{33} , u''_{23} , u''_{31} , und u''_{12} in derselben R_5 liegen. Die R_5 , welche das Krümmungsgebilde enthält, geht dann also durch P . Bestehen zwischen den fünf Vektoren $u''_{22} - u''_{33}$, u. s. w. zwei lineare Beziehungen, so reduziert sich die R_5 des Krümmungsgebildes zu einer R_3 , und die charakteristische V_2 zu einer STEINER'schen Fläche, da diese Fläche bekanntlich die einzige Fläche vierter Ordnung in R_3 ist, die ∞^2 Ellipsen enthält. Für $n = 6$ ist dies immer der Fall, die R_3 geht dann überdies durch P . Der Punkt mit dem Radiusvektor D ist der Schwerpunkt der Fläche.

Legen wir in der R_3 ein rechtwinkliches Koordinatensystem i_4, i_5, i_6 mit den Koordinaten x_4, x_5, x_6 , dessen Ursprung den Radiusvektor D hat, so ist die charakteristische Fläche in bezug auf dieses Koordinatensystem nach (64) gegeben durch die Gleichungen

$$(70) \quad \begin{cases} x_4 = p_{114} \cos^2 \alpha_1 + \text{cycl.} + 2p_{234} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \text{cycl.} \\ x_5 = p_{115} \cos^2 \alpha_1 + \text{cycl.} + 2p_{235} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \text{cycl.} \\ x_6 = p_{116} \cos^2 \alpha_1 + \text{cycl.} + 2p_{236} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \text{cycl.}, \end{cases}$$

wo

$$(71) \quad \begin{cases} p_{114} = \frac{1}{3}(2u''_{114} - u''_{224} - u''_{334}) \\ p_{234} = u''_{234}, \end{cases} \quad \text{cycl. } 1, 2, 3; 4, 5, 6.$$

oder, anders geschrieben:

$$(72) \quad \begin{cases} x_4 = p_{114} y_1^2 + \text{cycl.} + 2p_{234} y_2 y_3 + \text{cycl.} \\ x_5 = p_{115} y_1^2 + \text{cycl.} + 2p_{235} y_2 y_3 + \text{cycl.} \\ x_6 = p_{116} y_1^2 + \text{cycl.} + 2p_{236} y_2 y_3 + \text{cycl.} \\ 1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2. \end{cases}$$

Die vier kwadratischen Formen bilden, konstante Faktoren ausser Acht gelassen, ein dreifach unendliches lineares System. In einem allgemeinen System dieser Art existieren bekanntlich gerade drei Formen, welche die zweifaktorigen Produkte dreier Linearformen sind ³⁶⁾.

³⁶⁾ In der Geometrie der Kegelschnitte korrespondieren diese Linearformen mit den Diagonalen des CLIFFORDSchen selbstkonjugierten vollständigen Vierseits des durch vier Kegelschnitte bestimmten Systems, vergl. Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften III C 1 [F. DINGELDEY, *Kegelschnitte und Kegelchnittssysteme*, S. 1-160], S. 147.

Diese drei Formen $z_2 z_3, z_3 z_1, z_1 z_2$ lassen sich linear in x_4, x_5 und x_6 ausdrücken:

$$(73) \quad \begin{cases} z_2 z_3 = \lambda_{14} x_4 + \lambda_{15} x_5 + \lambda_{16} x_6 + \lambda_{17} \\ z_3 z_1 = \lambda_{24} x_4 + \lambda_{25} x_5 + \lambda_{26} x_6 + \lambda_{27} \\ z_1 z_2 = \lambda_{34} x_4 + \lambda_{35} x_5 + \lambda_{36} x_6 + \lambda_{37} \end{cases}$$

und im allgemeinen ist also

$$(74) \quad \begin{cases} x_4 = \mu_{41} z_2 z_3 + \mu_{42} z_3 z_1 + \mu_{43} z_1 z_2 + \mu_{44} \\ x_5 = \mu_{51} z_2 z_3 + \mu_{52} z_3 z_1 + \mu_{53} z_1 z_2 + \mu_{54} \\ x_6 = \mu_{61} z_2 z_3 + \mu_{62} z_3 z_1 + \mu_{63} z_1 z_2 + \mu_{64} \end{cases}$$

Setzen wir nun:

$$(75) \quad \begin{cases} \mu_{41} i_4 + \mu_{51} i_5 + \mu_{61} i_6 = e_\alpha \\ \mu_{42} i_4 + \mu_{52} i_5 + \mu_{62} i_6 = e_\beta \\ \mu_{43} i_4 + \mu_{53} i_5 + \mu_{63} i_6 = e_\gamma \\ \mu_{44} i_4 + \mu_{54} i_5 + \mu_{64} i_6 = E \end{cases}$$

so ist

$$(76) \quad u'' - D = E + z_2 z_3 e_\alpha + z_3 z_1 e_\beta + z_1 z_2 e_\gamma.$$

Einem bestimmten Wertsatz z_1, z_2, z_3 entspricht in projektiver Weise eine bestimmte Richtung i in der V_3 . Man kann also drei Vektoren e_1, e_2 und e_3 in der V_3 wählen, so dass im allgemeinen stets:

$$(77) \quad i = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3.$$

Ist nun e'_1, e'_2, e'_3 das zu e_1, e_2, e_3 reziproke System:

$$(78) \quad e_u \cdot e'_v = \begin{cases} 0 & \text{für } u \neq v \\ 1 & \text{» } u = v, \end{cases} \quad (u, v = 1, 2, 3),$$

so ist

$$(79) \quad u'' = D + E + i i^2 \{ (e'_2 \circ e'_3) e_\alpha + (e'_3 \circ e'_1) e_\beta + (e'_1 \circ e'_2) e_\gamma \}$$

und $\overset{3}{H}$ hat also die Form:

$$(80) \quad \overset{3}{H} = {}^3g'(D + E) + (e'_2 \circ e'_3) e_\alpha + (e'_3 \circ e'_1) e_\beta + (e'_1 \circ e'_2) e_\gamma.$$

Hat i die Richtung von e_1, e_2 oder e_3 , so wird $u'' = D + E$. Der Punkt $D + E$ ist also der dreifache Punkt der STEINER'schen Fläche. Für $i = \lambda e_2 + \mu e_3$ wird $u'' = D + E + \lambda \mu e_\alpha$. Umgekehrt entsprechen dem Werte $u'' = D + E + \nu e_\alpha$ zwei Werte von i , die sich aus den Gleichungen

$$(81) \quad \begin{cases} \lambda \mu = \nu \\ \lambda^2 e_2 \cdot e_2 + 2 \lambda \mu e_2 \cdot e_3 + \mu^2 e_3 \cdot e_3 = 1 \end{cases}$$

bestimmen lassen. Die Gerade $u'' = D + E + v e_\alpha$ ist also eine Doppelgerade der Fläche.

Aus (28) und (80) folgt:

$$(82) \quad D = D + E + \frac{1}{3} g'^2 (e'_2 e'_3 e_\alpha + e'_3 e'_1 e_\beta + e'_1 e'_2 e_\gamma),$$

sodasz

$$(83) \quad E = -\frac{1}{3} \{ (e'_2 \cdot e'_3) e_\alpha + (e'_3 \cdot e'_1) e_\beta + (e'_1 \cdot e'_2) e_\gamma \}.$$

Daraus geht hervor, dass E dann und nur dann verschwindet, wenn e'_1 , e'_2 und e'_3 und also auch e_1 , e_2 und e_3 gegenseitig senkrecht sind. Dann und nur dann fällt der Schwerpunkt der STEINER'scher Fläche in den dreifachen Punkt.

Im Allgemeinen enthält die R_3 dann noch keine Haupttangentialrichtungen. Eine Haupttangentialrichtung tritt erst auf, wenn die STEINER'sche Fläche durch den betrachteten Punkt der V_3 geht. Zwei Haupttangentialrichtungen sind vorhanden, wenn dieser Punkt in einer Doppelgeraden liegt, drei wenn der Punkt mit dem dreifachen Punkt der Fläche zusammenfällt, also wenn $D + E = 0$. Zu den durch zwei Haupttangentialrichtungen bestimmten ∞^1 Richtungen gehören dann Vektoren erzwungener Krümmung, die alle die Richtung einer Doppelgeraden haben.

Delft, Juni 1921.

J. A. SCHOUTEN,
D. J. STRUIK.