

gesetzes berechnen. Ich hoffe, auf die Weiterentwicklung dieser Ueberlegungen bald zurückkommen zu können.

Führen wir andererseits das Gesetz  $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{v}{d}\right)^{2/n}$  in (45) ein, so haben wir mit  $\lambda_0 \varepsilon^{2/n} = \zeta$

$$h = \zeta \frac{l}{d^{2/n}} \frac{v^2}{2g}$$

oder

$$v \sim \sqrt{\frac{h}{l} d^{2/n}} \approx \left(\frac{h}{l}\right)^{0,5} d^{0,64}$$

Nach der Analogie zwischen Rohren und Kanälen würde für die Geschwindigkeit in einem Kanal mit dem Gefälle  $J$  und dem hydraulischen Radius  $P$  die Formel gelten:

$$v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,64}$$

Es sei bemerkt, daß nach R. Manning die empirische Formel  $v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,66}$ , nach Forchheimer  $v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,7}$ , schließlich nach Hermašek die Formel  $v = \text{konst. } J^{0,5} P^{0,6}$  die Versuchsergebnisse in rauhen Kanälen gut wiedergibt<sup>1)</sup>. 84

## Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht.

Von K. POHLHAUSEN in Aachen.

Die außerordentlichen mathematischen Schwierigkeiten, die bei der Integration der Differentialgleichungen der Flüssigkeitsbewegung, besonders bei Berücksichtigung der Reibung, auftreten, und die im wesentlichen im nichtlinearen Charakter dieser Gleichungen begründet sind, haben in der geschichtlichen Entwicklung der Lehre von der Flüssigkeitsbewegung eine Trennung zwischen »Hydrodynamik« und »Hydraulik« bewirkt. Auf der einen Seite vernachlässigt man die Reibung, um zu einfacheren Gleichungen zu gelangen, und erkauft die Strenge mit wesentlichen Abweichungen der berechneten Strömung von der beobachteten. Auf der andern Seite entwickelte die Technik, die zu einer Beurteilung des wirklichen Verhaltens einer Flüssigkeit gezwungen ist, in der Hydraulik eine eigene Lehre von den Bewegungen einer Flüssigkeit. Hier werden die exakten Gleichungen durch empirische Annahmen und anschauliche Betrachtungen ersetzt, deren Ergebnisse im wesentlichen mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Erst in neuerer Zeit bemüht man sich, die Hydrodynamik mit der Hydraulik in Einklang zu bringen, und zwar durch Berücksichtigung der Reibung in der mathematischen Theorie und durch Vertiefung der hydraulischen Betrachtungen. Die ersten allgemeinen Ansätze, bei denen die Reibung Berücksichtigung fand, wurden von Stokes<sup>2)</sup> gemacht, dem es unter anderm gelungen ist, den Widerstand einer Kugel in einer Flüssigkeit von sehr großer Zähigkeit zu berechnen. Voraussetzung dieser Lösung war, daß die Bewegung im wesentlichen durch die Zähigkeit bestimmt wird, daß also entweder die Zähigkeit sehr groß oder das Produkt aus Körperabmessung und Geschwindigkeit sehr klein ist. Für die Bewegung einer Flüssigkeit mit geringer Zähigkeit gab zuerst Prandtl<sup>3)</sup> eine systematische Vereinfachung, die zu der Theorie der »Grenzschicht« führte und von seinen Schülern Blasius<sup>4)</sup>, Boltze<sup>5)</sup> und Hiemenz<sup>6)</sup> im einzelnen ausgeführt und auf Beispiele angewandt wurde.

<sup>1)</sup> Vergl. Ph. Forchheimer, Hydraulik, Leipzig 1914, S. 70 u. ff.

<sup>2)</sup> G. Stokes: On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums Camb. Trans. 2, 1851 (See papers Bd. 3, S. 1).

<sup>3)</sup> L. Prandtl: Verhandl. des III. Intern. Math. Kongress 1904 (Heidelberg) Leipzig 1905, S. 444.

<sup>4)</sup> H. Blasius: Dissertation Göttingen 1907, Zeitschr. für Math. u. Phys. 56, 1908, S. 1.

<sup>5)</sup> E. Boltze: Dissertation Göttingen 1908.

<sup>6)</sup> K. Hiemenz: Dissertation Göttingen 1911. Dinglers polyt. Journal Bd. 526, 1911, S. 321.

Im folgenden soll für die Differentialgleichung der Grenzschicht ein näherungsweise Integrationsverfahren entwickelt und dessen Brauchbarkeit an Beispielen gezeigt werden:

**1. Ableitung der Differentialgleichung der Grenzschicht.** Prandtl betrachtet die Bewegung einer Flüssigkeit, die einen eingetauchten ruhenden Körper umströmt, oder die dadurch entsteht, daß ein Körper geradlinig mit unveränderlicher Geschwindigkeit in ruhender Flüssigkeit bewegt wird. Er gelangt dadurch zur Differentialgleichung der Grenzschicht, daß er die Konstante der inneren Reibung als sehr klein annimmt. In großer Entfernung von dem umströmten Körper wird dann die Reibung keinen Einfluß haben und also annähernd eine Potentialbewegung sich einstellen. Nur in einer sehr dünnen Schicht am Körper, der »Grenzschicht«, werden Abweichungen von der Potentialbewegung deshalb stattfinden, weil an der Wand selbst die Flüssigkeit haften soll. Bezeichnet man die Dicke dieser Grenzschicht mit  $\delta$ , so lassen sich die einzelnen Glieder der strengen Differentialgleichungen in ihrer Größenordnung abschätzen. Die Vernachlässigung aller Glieder geringerer Größenordnung führt, wie Blasius im einzelnen gezeigt hat, auf die Prandtische Differentialgleichung der Grenzschicht.

Wir wollen hier dieselbe Differentialgleichung auf etwas andere Weise durch eine asymptotische Näherung gewinnen.<sup>1)</sup> Wir gehen aus von dem Navier-Stokesschen Ansatz, dem die Bewegung einer Flüssigkeit mit Reibung genügt, und beschränken uns auf stationäre Vorgänge in der Ebene, wobei wir zunächst nur für die Strömung längs der Geraden  $y=0$  die Rechnung durchführen wollen. Die Gleichungen lauten wie bekannt:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

Dabei soll die Flüssigkeit an der als eben angenommenen Wand des Körpers haften, es soll also  $u = 0, v = 0$  für  $y = 0$  gelten.

Die Kontinuitätsgleichung integriert man durch Einführung der Stromfunktion  $\psi$  derart, daß

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und erhält dann aus den beiden ersten Gleichungen (1):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \psi \quad (2)$$

Wir führen dimensionslose Größen ein, indem wir alle Längen auf eine geeignet gewählte Länge  $a$  der geometrischen Anordnung und die Geschwindigkeit auf eine geeignet gewählte Geschwindigkeit  $\bar{u}$  (z. B. die ungestörte Geschwindigkeit des Flüssigkeitsstromes im Unendlichen) beziehen und schreiben:

$$\psi = a \bar{u} \psi' (x', y'), \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}$$

Damit geht (2) über in:

$$\left(\frac{a \bar{u}}{a^2}\right)^2 \left[ \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y'} \right] = \frac{a \bar{u}}{a^3} \nu \Delta \Delta \psi'$$

oder mit  $R = \frac{a \bar{u}}{\nu}$  (reduzierte Geschwindigkeit, Reynoldssche Zahl):

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y'} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi' \quad (3)$$

Wir wollen die Lösung unter Beschränkung auf große Reynoldssche Zahlen ansetzen in der Form:

$$\psi' = f(x', y') + R^2 F(x', z), \quad z = y' R^2$$

<sup>1)</sup> Die Ableitung ist etwas allgemeiner, als die in der vorangehenden Kármánschen Arbeit angegebene; aus diesem Grunde ist eine Wiederholung vielleicht nicht unangebracht.

wobei  $\kappa$  und  $\lambda$  vorläufig noch unbestimmte Exponenten sind.  $f(x', y')$  soll die Potentiallösung vorstellen, die ja eine strenge Lösung von (2) ist, also

$$\Delta f(x', y') = 0.$$

Wir bilden:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + R^{2\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Unter der Annahme, daß  $R$  sehr groß und  $\lambda$  positiv ist, kann  $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$  vernachlässigt werden. Ebenso ist in

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x'^4} + 2 R^{2\lambda} \frac{\partial^4 F}{\partial x'^2 \partial z^2} + R^{4\lambda} \frac{\partial^4 F}{\partial z^4}$$

von den drei Gliedern rechts aus den gleichen Gründen nur das letzte beizubehalten. Setzen wir diese Ausdrücke in (3) ein, so wird

$$R^{\kappa+2\lambda} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial^3 F}{\partial x'^2 \partial x'} - R^{\kappa+2\lambda} \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^2} + R^{2\kappa+3\lambda} \left[ \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^3 F}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^2} \right] = R^{\kappa+4\lambda-1} \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} \quad (4).$$

Da die rechte und linke Seite dieser Gleichung mit wachsendem  $R$  gleichmäßig gegen Unendlich gehen soll, so lauten die Bedingungen für  $\kappa$  und  $\lambda$ :

$$\kappa + 2\lambda = 2\kappa + 3\lambda = 4\lambda + \kappa - 1.$$

Hieraus bestimmt sich

$$\lambda = 1/2 \quad \kappa = -1/2.$$

Entwickeln wir weiter  $f(x', y')$  in eine Taylorreihe nach  $y$ :

$$f(x', y') = f_0 + f_1(x')y + \dots,$$

so ist  $f_0$  eine Konstante, da die Wand des Körpers Stromlinie sein muß, und die Differentialgleichung (4) geht über in

$$\left[ f_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x'} z \right] + \left[ \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^3 F}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial^3 F}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial^4 F}{\partial z^4}$$

oder

$$\left( f_1 + \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial^3 (F + f_1 z)}{\partial x' \partial z^2} - \left( \frac{\partial f_1}{\partial x'} z + \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \frac{\partial^3 (F + f_1 z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 (F + f_1 z)}{\partial z^4},$$

wie man durch Differentieren leicht nachweist. Bezeichnen wir  $F + f_1 z$  mit  $G$ :

$$\frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial^3 G}{\partial x' \partial z^2} - \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{\partial^3 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 G}{\partial z^4} \quad (5),$$

so lautet mit Hilfe dieser Funktion  $G$  die Lösung:

$$\psi = f(x', y') + \frac{1}{\sqrt{R}} (G - f_1 z),$$

wobei die Grenzbedingungen für  $G$  sind:

- 1) für  $z = 0$ :  $G = 0$
- 2) \*  $z = 0$ :  $\frac{\partial G}{\partial z} = 0$
- 3) \*  $z = \infty$ :  $\frac{\partial G}{\partial x'} = f_1$ .

In der Tat haben wir damit unter der Voraussetzung großer Reynoldsscher Zahlen eine zweite Näherung für die Bewegung der Flüssigkeit gewonnen, denn in der Nähe der Wand ist  $\psi = \frac{G}{\sqrt{R}}$ , da sich an der Wand  $f(x', y')$  wie  $f_1 y$  oder  $\frac{f_1 z}{\sqrt{R}}$  verhält und damit ist die Haftbedingung erfüllt. Im Unendlichen verhält sich  $G$  wie  $f_1 z$ , also ist  $G - f_1 z = 0$ ; es bleibt also nur  $\psi = f(x', y')$ , d. h. die Potentiallösung. Integrieren wir (5) nach  $z$ , so wird

$$\frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial^2 G}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial G}{\partial x'} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 G}{\partial z^3} + G(x'),$$

setzen wir wieder für  $z$  und  $x'$  die Werte  $x$  und  $y$  ein und bezeichnen wir

$$\frac{\partial G}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -v,$$

so erhalten wir  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi(x) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

Die Funktion  $\varphi(x)$  bestimmt sich aus den Anfangsbedingungen: für  $y = 0$  ist  $v = 0$ , also

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\varphi(x),$$

oder wenn  $p$  den Druckverlauf längs der Wand bedeutet, nach der Bewegungsgleichung der  $x$ -Richtung:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\varphi(x) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

Ersetzen wir  $\varphi(x)$  durch diesen Wert, so erhalten wir die von Prandtl 1904 aufgestellte Differentialgleichung der Grenzschicht

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

die sich von der ersten Gl. (1) durch Wegfall des Gliedes  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  unterscheidet. Man kann natürlich auch unmittelbar einsehen, daß unter den gemachten Annahmen die Ableitung von  $u$  nach  $x$  gegenüber der nach  $y$  verschwindend klein sein muß; überdies wird das in (1) auftretende Druckgefälle  $\frac{dp}{dx}$  jetzt als Funktion von  $x$  allein angesehen. Es läßt sich weiter zeigen, daß diese Gleichung sich nicht ändert, wenn wir an Stelle der ebenen Wand eine krumme und gleichzeitig an Stelle der bisher verwandten rechtwinkligen Koordinaten die Bogenlänge und den senkrechten Abstand vom Körper einführen, wofern die Krümmung nicht allzu stark ist<sup>1)</sup>. Wir werden in Zukunft immer mit diesem Koordinatensystem rechnen. Den Anfangspunkt lassen wir dabei mit dem Staupunkt zusammenfallen.

Die Dicke der Grenzschicht  $\delta$  ergibt sich aus dieser Betrachtung proportional zu solchen Werten von  $\nu$ , die auf ein  $x$  von der Größenordnung 1 führen, also:

$$\delta \propto \frac{\nu}{\sqrt{x}}$$

Wir bemerken noch, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen hinsichtlich der Koordinaten vom elliptischen Typus sind, während die Prandtische Grenzschichten-Gleichung parabolisch ist. Vom physikalischen Gesichtspunkt besteht die Vernachlässigung darin, daß ein Teilchen der Grenzschicht für seine Bewegung nach der  $y$  Koordinate weder mit Masse behaftet ist, noch eine Verzögerung durch die Reibung erfährt. Es ist klar, daß so tief einschneidende Veränderungen der Differentialgleichung wesentliche Unterschiede der berechneten gegenüber den wirklich beobachteten Strömungsvorgängen mit sich bringen könnten, und es ist eine weitere Aufgabe, zu untersuchen, in wie weit die Lösung der Grenzschichten-Theorie mit der Wirklichkeit im Einklang steht.

Die wichtigste Erscheinung, die mit Hilfe der Grenzschichten-Theorie erklärt werden kann, ist die Ablösung der Strömung von der Wand, die z. B. beim Umströmen eines Körpers stattfindet. Da wir die Dicke der Grenzschicht als sehr klein gegenüber den Abmessungen des Körpers erhalten haben, so hat sich auch das Druckgefälle über dem Querschnitt der Grenzschicht genähert als konstant ergeben. Die Geschwindigkeitsverteilung in einem Profil der Grenzschicht sinkt dagegen vom Werte der Potentialströmung auf den Wert Null an der Wand. Findet nun längs des Körpers ein

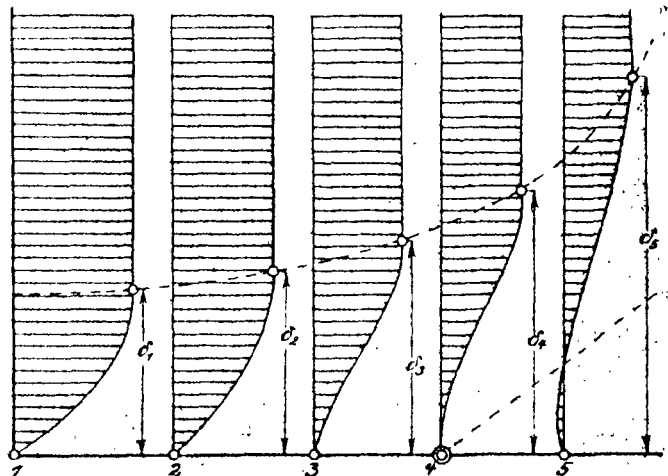


Abb. 1

<sup>1)</sup> Vergl. Hiemenz, Dissertation S. 3.

Druckanstieg statt, so werden die Teilchen der Grenzschicht an der Wand eher zur Ruhe kommen und in eine Rückströmung übergehen als diejenigen, die mehr nach der Potentialströmung zu liegen. Es werden also in der Umgebung des Ablösungspunktes Verhältnisse eintreten, die qualitativ durch Abb. 1 dargestellt werden. Für den Ablösungspunkt selbst muß sein

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ für } y = 0.$$

Hieraus kann die Stelle des Ablösungspunktes berechnet werden. Die Grenzschicht trennt sich in diesem Punkte von der Wand und geht unter einem bestimmten kleinen Winkel in die Flüssigkeitsströmung hinaus.

**2. Ableitung der Kármánschen Integralbedingung.** Für das ebene stationäre Problem lautet die Differentialgleichung der Grenzschicht:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

Hierzu kommt noch die Kontinuitätsbedingung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Wir führen eine Zusatzfunktion  $q(xy)$  derart ein, daß

$$u = U - q(xy),$$

s. Abb. 2, wobei  $U = f_1$  die Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht bedeutet, die durch die Potentialströmung gegeben ist und auf Grund der Eulerschen Gleichung mit dem durch das Experiment ermittelten Druckgefälle längs des Körpers wie folgt verknüpft ist. Es ist

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx} = UU'.$$

Gl. (6) geht bei Einführung dieser Zusatzfunktion über in

$$(U - q) \left( \frac{dU}{dx} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) - v \frac{\partial q}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + U \frac{dU}{dx}$$

oder

$$-q \frac{dU}{dx} - U \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial x} - v \frac{\partial q}{\partial y} = -\nu \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}.$$

Wir integrieren nach  $y$  und erhalten:

$$-\frac{dU}{dx} \int q dy - U \frac{d}{dx} \int q dy + \frac{d}{dx} \int \frac{q^2}{2} dy - \int v \frac{\partial q}{\partial y} dy = -\nu \left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^{\infty}.$$

Als obere Grenze haben wir  $\infty$  zu schreiben, wenn die Funktion  $q$  asymptotisch gegen  $U$  geht. Angenähert können wir annehmen, daß in einer Entfernung, die wir die Dicke der Grenzschicht nennen,  $q$  von Null nicht mehr merklich abweicht. Es genügt dann, die Integrale von 0 bis  $\delta$  zu erstrecken.

Zufolge der Kontinuitätsgleichung können wir nach partieller Integration schreiben:

$$\int v \frac{\partial q}{\partial y} dy = [vq]_0^{\infty} - \int q \frac{\partial v}{\partial y} dy = [vq]_0^{\infty} + \frac{dU}{dx} \int q dy - \frac{d}{dx} \int \frac{q^2}{2} dy.$$

Da nun  $[vq]_0^{\infty}$  sowohl an der oberen wie auch an der unteren Grenze verschwindet, so bleibt:

$$-\frac{dU}{dx} \int q dy - U \frac{d}{dx} \int q dy + \frac{d}{dx} \int \frac{q^2}{2} dy = -\nu \left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^{\infty} \quad (7).$$

Die Randbedingungen, die die Funktion  $q(x, y)$  zu erfüllen hat, lauten:

1. für  $y = 0$ :  $u = 0$ , d. h.  $q = U$ ,

2. »  $y = \infty$ :  $u = U$ , » »  $q = 0$ ,

3. auch für die Wand des Körpers muß die Grenzschichtgleichung gelten. Für  $y = 0$  ergibt sich aber, da sowohl  $u$  als auch  $\frac{\partial u}{\partial y}$  hier den Wert Null haben:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left( \frac{\partial^2 (U - q)}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{1}{\nu} U \frac{dU}{dx}$$

Jede Lösung der Grenzschichtengleichung muß offenbar diese Integralbedingung erfüllen. Wenn wir nun für die Abhängigkeit der Größe  $q$  von  $y$  einen einfachen, angenäherten Ansatz machen, z. B. eine Potenzreihe, so werden die Koeffizienten dieses Ansatzes Funktionen von  $x$  allein sein. Man erhält nun eine Annäherung zur Lösung, falls man die Anzahl dieser Koeffizienten so bestimmt, daß nach Erfüllung der Grenzbedingungen ein noch unbestimmt bleibender Koeffizient übrig bleibt. Alsdann liefert die Integralbedingung eine gewöhnliche Differentialgleichung zur Bestimmung dieses Koeffizienten und damit die Festlegung des Geschwindigkeits-Profiles in Abhängigkeit von  $x$ .

Während daher bei der ursprünglichen Differentialgleichung der Grenzschicht eine partielle Differentialgleichung zu lösen ist, haben wir durch die Integralbedingung nur eine gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen. Es steht nichts im Wege, die Annäherung weiter zu treiben, indem man die Integralbedingung z. B. für mehrere Teilbereiche (etwa von 0 bis  $\frac{\delta}{2}$  und  $\frac{\delta}{2}$  bis  $\delta$ ) einzeln erfüllt und so statt eines freibleibenden Koeffizienten deren zwei bestimmt. Auch liegt die Möglichkeit vor, weitere Integralbedingungen dadurch zu gewinnen, daß man beide Seiten von Gl. (7) etwa mit  $y, y^2, \dots, y^n$  nacheinander multipliziert und dann von Null bis Unendlich integriert, etwa nach Analogie wie bei dem Stieltjesschen Verfahren eine Funktion durch ihre Momente festgelegt wird.

Die nachfolgenden Berechnungen zeigen jedoch, daß die Erfüllung der einfachen Integralbedingung, die — wie nachher gezeigt wird — den wahren physikalischen Inhalt der Grenzschichten-Theorie enthält, durchaus genügt, um die Geschwindigkeitsverteilung mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit zu bestimmen. Insbesondere zeigt das Beispiel der Strömung um den Zylinder, daß unser Verfahren der bisherigen Rechnungsmethode nach dem Hiemenzschen Ansatz (Taylorentwicklung nach  $x$  und Auflöser einer Reihe von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Reihe) weit überlegen ist, indem man nach Auflöser einer einzigen Differentialgleichung eine der exakten Lösung so nahe stehende Annäherung gewinnt, wie wenn man nach dem anderen Verfahren wenigstens vier bis fünf Differentialgleichungen aufgelöst hätte.

Wie die Integralbedingung auf Grund physikalischer Betrachtungen direkt abgeleitet werden kann, ist in der vorangehenden Kármánschen Arbeit gezeigt.<sup>1)</sup>

**3. Die Strömung an der ebenen Platte.** Wir wollen zunächst das Näherungsverfahren zur Integration der Differentialgleichung der Grenzschicht auf den Fall einer ebenen Platte anwenden, die parallel den Stromlinien in einen gleichförmig fließenden Flüssigkeitsstrom eingetaucht ist. Die Geschwindigkeit  $U$  außerhalb der Grenzschicht ist hierbei eine Konstante und die Differentialgleichung (6) lautet:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Die Integralbedingung (7) vereinfacht sich zu

$$-U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} q dy + \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} q^2 dy = -\nu \left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^{\delta}.$$

Als Grenzbedingungen sind vorgegeben:

für die Differentialgleichung: für  $y = 0$ :  $u = 0$ ; für  $y = \infty$ :  $u = U = \text{konst.}$

• » Integralbedingung: für  $y = 0$ :  $q = U$ ; für  $y = \infty$ :  $q = 0$ ;

außerdem muß sein:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Das Beispiel der ebenen Platte läßt, wie Blasius in seiner Dissertation gezeigt hat, die Reduktion der partiellen Differentialgleichung mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung zu. Blasius integriert die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Stromfunktion  $\psi$ , wobei

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

<sup>1)</sup> Dieses Heft, S. 233 bis 252.

und führt zwei neue Variable  $\xi$  und  $\zeta$  derart ein, daß

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} y, \quad \zeta = \eta \sqrt{\frac{\rho}{\mu U x}}$$

Dann wird:

$$u = \frac{1}{2} U \zeta', \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu U}{\rho x}} (\xi \zeta' - \zeta),$$

wobei der Strich die Differentiation nach  $\xi$  bezeichnet. Setzen wir diese Werte in die Grenzschichtgleichung ein, so erhalten wir

$$\zeta \zeta'' = - \zeta''.$$

Die numerische Integration dieser Gleichung mit Hilfe des Kutta-Verfahrens ist von C. Toepfer ausgeführt worden<sup>1)</sup>.

Für den Widerstand pro Flächeneinheit der Platte erhält Blasius

$$X_v = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0,332 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}$$

Gehen wir nunmehr dazu über, auch mit Hilfe des Näherungsverfahrens der Integralbedingung die Lösung für die ebene Platte zu gewinnen. Wir setzen  $q$  als Potenzreihe nach  $y$  an

$$u = U - q = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)y^3 + \dots$$

1. Zunächst brechen wir mit dem ersten Gliede ab, also

$$q = U - a(x)y.$$

Als obere Grenze der Integrale führen wir  $\delta$  ein. Wir ersetzen also das Grenzschichten-Profil durch einen gebrochenen Linienzug. Die Grenzbedingung ist: für  $y = \delta$  soll  $u = U$ , also  $U = a\delta$  sein.

Wir haben zu bilden:

$$\int_0^\delta q \, dy = U \left[ y - \frac{y^2}{2\delta} \right]_0^\delta = \frac{1}{2} U \delta, \quad \int_0^\delta q^2 \, dy = U^2 \left[ y - \frac{2y^2}{2\delta} + \frac{y^3}{3\delta^2} \right]_0^\delta = \frac{1}{3} U^2 \delta$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta q \, dy = \frac{1}{2} \delta', \quad \frac{d}{dx} \int_0^\delta q^2 \, dy = \frac{1}{3} U^2 \delta', \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{U}{\delta}$$

Also lautet die Integralbedingung:

$$\frac{1}{2} U^2 \delta' + \frac{1}{3} U^2 \delta' = - \nu \frac{U}{\delta} \quad \text{oder} \quad \delta \delta' = - \frac{6 \nu}{U}$$

und mithin:

$$\delta = \sqrt{\frac{12 \nu x}{U}}$$

Für den Widerstand ergibt sich:

$$X_v = 0,289 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}$$

2. Eine andere schon etwas bessere Näherung gewinnen wir dadurch, daß wir den Geschwindigkeitsabfall durch eine Parabel annähern und für  $y = \delta$  fordern, daß  $\frac{\partial q}{\partial y}$  stetig bleibt. Allerdings müssen wir dann auf die Bedingung an der Wand  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  verzichten. Es ist  $q = U - u = U - ay - by^2$ , wobei sich  $a$  zu  $\frac{2U}{\delta}$  und  $b$  zu  $-\frac{U}{\delta^2}$  bestimmt. Wir bilden wiederum die erforderliche Integrale

$$\int_0^\delta q \, dy = \frac{U \delta}{3}, \quad \int_0^\delta q^2 \, dy = \frac{U^2 \delta}{5}$$

<sup>1)</sup> In einer von C. Runge gestellten Göttinger Staatsexamenarbeit, vergl. Zeitschrift für Math. und Phys. 1912, S. 397. Der Verlauf der Funktion  $\zeta$  und ihrer Ableitung ist auch wiedergegeben in dem Ansatz von E. Pohlhausen in dieser Zeitschrift, Bd. 1, 1921, S. 119, Abb. 1.

und hieraus

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} q \, dy = \frac{U \delta'}{3}, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} q^2 \, dy = \frac{U^2 \delta'}{5};$$

weiter ist

$$\left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^{\delta} = \frac{2U}{\delta}$$

Mit Hilfe der Integralbedingung ergibt sich:

$$U^2 \delta' \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{2U \nu'}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{30 \nu' x}{U}} = 5,477 \sqrt{\frac{\nu' x}{U}}$$

und für den Widerstand

$$X_b = 0,365 \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}}$$

Während Annäherung 1 einen um 13 vH zu kleinen Betrag ergibt, liefert die Annäherung 2 einen um 6,5 vH zu großen Wert.

3. Um beiden Bedingungen (kein Knick in der Geschwindigkeitsverteilung und Randbedingung für  $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$  an der Wand) zu genügen, müssen wir wenigstens drei Glieder in  $u$  beibehalten. Wir setzen:

$$u = a y + b y^2 + c y^3.$$

Die Funktionen  $a, b, c$  bestimmen sich aus den Grenzbedingungen:

1.  $u = U$  für  $y = \delta$  liefert  $U = a \delta + b \delta^2 + c \delta^3$ .
2.  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  für  $y = 0$  »  $0 = a + 2 b \delta + 3 c \delta^2$ .
3.  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{U U'}{\nu} = 0$  liefert, da  $U' = 0$ ,  $b = 0$ .

Als Gleichungen für die noch unbekanntenen Funktionen  $a$  und  $c$  erhalten wir:

$$U = a \delta + c \delta^3, \quad 0 = a + 3 c \delta^2.$$

Hieraus folgt:

$$a = \frac{3}{2} \frac{U}{\delta}, \quad c = -\frac{U}{2 \delta^3}, \quad q = U \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} + \frac{y^3}{2 \delta^3} \right].$$

Die Integrale berechnen sich zu:

$$\int_0^{\delta} q \, dy = \frac{3}{8} U \delta, \quad \int_0^{\delta} q^2 \, dy = \frac{33}{140} U^2 \delta$$

und

$$\left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^{\delta} = \frac{3}{2} \frac{U}{\delta}.$$

Für  $\delta$  ergibt sich die Differentialgleichung

$$U \delta' \left[ \frac{3}{8} - \frac{33}{140} \right] = \frac{3 \nu'}{2 \delta}$$

und daraus:

$$\delta = \sqrt{\frac{280 \nu' x}{13 U}} = 4,64 \sqrt{\frac{\nu' x}{U}}.$$

Der Widerstandskoeffizient für diese Näherung ist 0,323, d. h. ein Wert, der etwa um 3 vH zu klein ist.

4. Da nach der exakten Grenzschichten-Theorie die Funktion  $q$  wie  $e^{-\lambda y^2}$  zu 0 geht, so kann man annehmen, daß man eine noch bessere Annäherung gewinnt, wenn man für  $y = \delta$  eine noch engere Berührung zu  $u = U$  vorschreibt. Wir nehmen daher als vierte und letzte Annäherung vier unbekanntene Funktionen  $a, b, c, d$  an, so daß

$$u = a y + b y^2 + c y^3 + d y^4$$



und setzen als Nebenbedingungen

1. für  $y = 0$ :  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{U U'}{\nu} = 0$
2. »  $y = \delta$ :  $u = U$
3. »  $y = \delta$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
4. »  $y = \delta$ :  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Damit erhalten wir als Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen

$$a + 2b\delta + 3c\delta^2 + 4d\delta^3 = 0, \quad a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 = U$$

$$b = 0, \quad 2b + 6c\delta + 12d\delta^2 = 0.$$

Durch Auflösen ergibt sich:

$$a = \frac{2U}{\delta}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{2U}{\delta^3}, \quad d = \frac{U}{\delta^4},$$

so daß

$$u = U \left[ 2 \frac{y}{\delta} - 2 \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4} \right]$$

und

$$\int_0^\delta q dy = \frac{3}{10} U \delta, \quad \int_0^\delta q^2 dy = \frac{23}{126} U^2 \delta, \quad \left[ \frac{\partial q}{\partial y} \right]_0^\delta = -\frac{2U}{\delta^2}$$

Die Integralbedingung liefert:

$$\delta^3 = \frac{630}{37} \frac{\nu}{U}$$

und daraus

$$\delta = 2 \sqrt[3]{\frac{315}{37} \frac{\nu x}{U}} = 5,83 \sqrt[3]{\frac{\nu x}{U}}$$

Der Widerstandskoeffizient berechnet sich hiermit zu 0,343. Der Wert ist etwa um 3 vH zu groß, so daß die Annäherung ungefähr dieselbe Genauigkeit wie die vorhergehende hat. Wir haben bei den weiteren Berechnungen diesen Ansatz beibehalten, da die enge Berührung für  $y = \delta$  uns mehr Gewähr dafür bietet, daß die Geschwindigkeitsverteilung auch in komplizierten Fällen die physikalisch anschauliche Gestalt beibehält, so daß z. B. ein Anwachsen über  $U$  vermieden wird.

In Abb 3 sind die Werte der Widerstandskoeffizienten, die sich bei den einzelnen Näherungen ergeben haben, aufgetragen. Um auch ein Bild über den Verlauf eines Profils der Grenzschicht zu gewinnen, sind in folgender Zahlentafel die entsprechenden Profile für  $U = 1, x = 1$  und  $\nu = 1$  zusammengestellt. Vergl. auch Abb. 4.

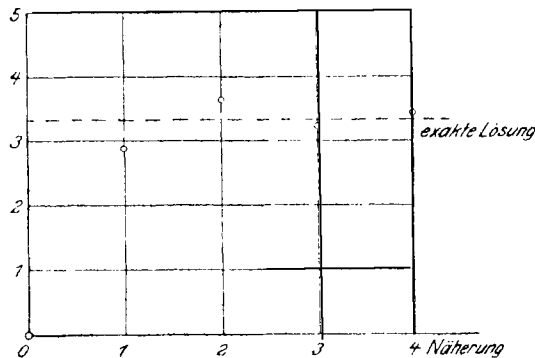


Abb. 3

y	Näherung				exakte Lösung
	I	II	III	IV	
0	0	0	0	0	0
1	0,289	0,332	0,318	0,384	0,329
2	0,578	0,597	0,604	0,619	0,629
3	0,867	0,796	0,834	0,828	0,846
4	1,000	0,927	0,972	0,948	0,955
5	1,000	0,991	0,990	0,995	0,990

Endlich sei auch die »Verdrängungsdicke  $\delta^*$ «, d. h. diejenige Größe angegeben, um welche die Stromlinien der Potentialströmung nach außen verschoben werden. Es ist

$$U \delta^* = \int_0^\delta q dy.$$

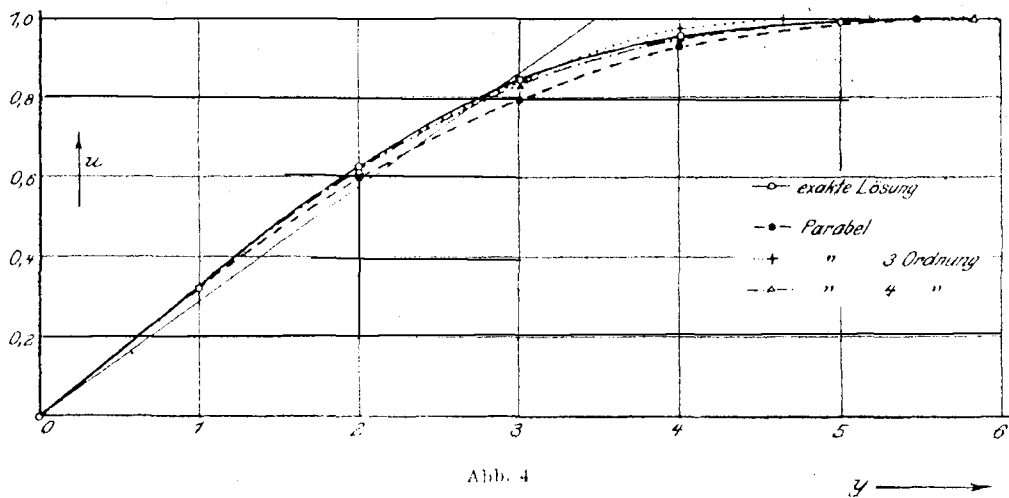


Abb. 4

Für die einzelnen Näherungen ergibt sich:

Näherung	I	II	III	IV	exakte Lösung
$\delta^* =$	$1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1,83 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1,74 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1,75 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1,73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

**4. Die Strömung um Körper bei vorgegebener Druckverteilung.** Der ursprüngliche Gedanke der Prandtl'schen Grenzschichten-Theorie bestand darin, daß Gl. (6) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung — in Verbindung mit der Theorie der Potentialbewegung idealer Flüssigkeiten — ausreicht, um die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht zu bestimmen. Dabei sollte die dritte der in den beiden Gleichungen auftretenden abhängig Veränderlichen,  $\rho$ , in der Weise eliminiert werden, daß man für das Druckgefälle  $\frac{dp}{dx}$  den Wert setzte, der sich dafür aus der Potentiallösung längs der Randlinie ergab; außerdem sollte der in die Randbedingung eingehende Wert von  $U$  ebenfalls der Potentiallösung entnommen werden. In diesem Sinne wurde unser Beispiel in 3 mit  $\frac{dp}{dx} = 0, U = \text{konst.}$  behandelt. Nun haben aber die vorerwähnten Untersuchungen von Blasius, Boltze und Hiemenz gezeigt, daß derart nicht genügende Uebereinstimmung mit der Beobachtung erzielt werden kann. Daher hat Hiemenz auf Anregung Prandtl's einen anderen Weg eingeschlagen: er bestimmt durch Versuche den Druckverlauf längs der Begrenzung und führt diesen und den daraus berechneten Verlauf von  $U$  in die Differentialgleichung bezw. die Randbedingung ein. Wir wollen auch dazu übergehen, den Fall eines durch das Experiment vorgegebenen Druckverlaufes zu behandeln. In diesem allgemeinen Fall müssen wir damit rechnen, daß Ablösung stattfindet, wie es in Abb. 1 dargestellt ist. Es hätte also keinen Zweck, die Funktion  $u$ , die die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht darstellen soll, durch eine ganze rationale Funktion erster oder zweiter Ordnung in  $y$  anzunähern, da erst eine Parabel dritter Ordnung einen Wendepunkt aufweist. Um aber gleich eine bessere Annäherung zu erhalten, wollen wir auch das Glied  $y^4$  noch mitnehmen und schreiben:

$$u = ay + by^2 + cy^3 + dy^4,$$

wobei wie früher  $u = U - \eta$  sein soll. Die Dicke der Grenzschicht sei wiederum  $\delta$ . Als Grenzbedingungen sind vorgegeben:

- 1) für  $y = \delta$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$
- 2) »  $y = \delta$ :  $u = U$
- 3) »  $y = 0$ :  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -U \frac{U'}{\nu}$

Als 4. Bedingung wählen wir wiederum wie bei der Platte willkürlich

- 4) für  $y = \delta$ :  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Mit Hilfe dieser Bedingungen sind nunmehr die vier unbekannt Funktionen  $a, b, c, d$  zu bestimmen. Aus 3) folgt sofort, daß die Funktion  $b$  allein durch den vorgegebenen Druckverlauf bestimmt wird:

$$b = -\frac{vU'}{2v}$$

Die übrigen Bedingungen liefern die folgenden Bestimmungsgleichungen für  $a, c$  und  $d$ :

$$a + 2b\delta + 3c\delta^2 + 4d\delta^3 = 0, \quad a\delta + b\delta^2 + c\delta^3 + d\delta^4 = U, \quad 2b + 6c\delta + 12d\delta^2 = 0.$$

Hieraus berechnet sich:

$$a = \frac{U}{6\delta}(12 + \lambda), \quad b = -\frac{vU'}{2v} = -\frac{U\lambda}{2\delta^2},$$

$$c = -\frac{U}{2\delta^2}(4 - \lambda), \quad d = \frac{U}{6\delta^4}(6 - \lambda),$$

wobei mit  $\lambda$  die dimensionslose Zahl  $\lambda = \frac{v'\delta^2}{v}$  bezeichnet worden ist.

Zwecks Aufstellung der Integralbedingung berechnen wir nunmehr

$$\int_0^{\delta} q dy = \frac{U\delta}{120}(36 - \lambda),$$

$$\int_0^{\delta} q^2 dy = \frac{U^2\delta}{252} \left( 46 - \frac{11}{6}\lambda + \frac{\lambda^2}{36} \right)$$

und bilden:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} q dy = \frac{U\delta'}{40} \left[ 12 - \frac{v'\delta^2}{v} \right] + \frac{3}{10} U'\delta - \frac{\delta^3}{120v} [U'^2 + UU'']$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} q^2 dy = \frac{U^2\delta'}{126} \left[ 23 - \frac{11}{4} \frac{v'\delta^2}{v} + \frac{5}{72} \frac{v'^2\delta^4}{v^2} \right] + \frac{23}{68} UU'\delta$$

$$- \frac{11}{1512} \frac{U\delta^3}{v} (2U'^2 + UU'') + \frac{UU'\delta^5}{4536v^2} [U'^2 + UU'']$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Integralbedingung (7) ein, so ergibt sich nach einiger Zwischenrechnung die Differentialgleichung:

$$U' \frac{d\delta}{dx} = \frac{-2v + \frac{116}{815} U'\delta^2 - \frac{\delta^4}{7560v} [79U'^2 + 8UU''] - \frac{U'\delta^6}{4536v^2} [U'^2 + UU'']}{\left[ \frac{37}{315} + \frac{U'\delta^2}{315v} + \frac{5}{9072} \frac{v'^2\delta^4}{v^2} \right]}$$

oder, wenn wir wieder  $\lambda$  einführen und  $\frac{\delta^2}{v}$  mit  $z$  bezeichnen

$$\frac{dz}{dx} = \frac{0,8 \left[ -9072 + 1670,4\lambda - \left( 47,4 + 4,8 \frac{U'U''}{U'^2} \right) \lambda^2 - \left( 1 + \frac{U'U''}{U'^2} \right) \lambda^3 \right]}{U(1 - 218,12 + 5,76\lambda + \lambda^2)} \quad (8).$$

Die Lösung dieser nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung gibt uns für eine vorgegebene Funktion  $U$  die Änderung der Dicke der Grenzschicht abhängig von der Bogenlänge des Körpers.

Wir bemerken zunächst, daß im Stanzpunkt des Körpers die Grenzschicht eine bestimmte endliche Dicke hat, denn für  $x=0$  und  $\delta=\delta_0$  hat die Differentialgleichung einen singulären Punkt, wobei  $\delta_0$  eine reelle positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$-9072 + 1670,4\lambda - \left( 47,4 + 4,8 \frac{U'U''}{U'^2} \right) \lambda^2 - \left( 1 + \frac{U'U''}{U'^2} \right) \lambda^3 = 0$$

ist. Von den Integralkurven der Differentialgleichung haben wir als für die Dicke der Grenzschicht maßgebend, diejenige auszuwählen, die durch diesen singulären Punkt hindurch geht. An der Stelle der Ablösung der Grenzschicht muß die Tangente des Grenzschichtenprofils senkrecht zur Wand stehen. Es muß also

$$a = \frac{U}{6\delta}(12 + \lambda) = 0, \quad \lambda = -12$$

sein.

Wir wollen nunmehr die oben abgeleitete, ganz allgemeine gültige Differentialgleichung auf das Beispiel der Strömung um einen in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Kreiszylinder anwenden und insbesondere die Ablösungsstelle an diesem bestimmen. Für dieses Beispiel ist von Hiemenz die Druckverteilung experimentell bestimmt worden. Bei seinen Versuchen in Wasser mit einem Zylinder von 97,5 mm Durchmesser bei einer Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit von 19 cm/sec ergab sich aus der Druckverteilung

$$U = 7,151 x - 0,04497 x^3 - 0,000330 x^5,$$

wobei die Bogenlänge  $x$  in cm gemessen wird. Wir bilden  $U'$  und  $U''$ , vergl. Abb. 5, und nehmen die Dichte des Wassers mit 1, seine Zähigkeit mit 0,01 an.

Zunächst berechnen wir die Dicke der Grenzschicht im Staupunkt als Wurzel der kubischen Gleichung zu

$$\lambda_0 = \frac{U' \delta_0^2}{\nu} = 7,052, \quad \delta_0 = 0,09931 \text{ cm.}$$

Die Lösung der Differentialgleichung kann entweder graphisch erfolgen oder dadurch, daß wir für die im singulären Punkt  $x = 0$   $\frac{\delta^2}{\nu} = \frac{\delta_0^2}{\nu}$  horizontal verlaufende Lösungskurve eine Reihenentwicklung ansetzen und dann mit Hilfe eines Rechenverfahrens diese Kurve weiter verfolgen. Wir lösen die Differentialgleichung graphisch mit Hilfe des Isoklinen-Verfahrens, setzen zu diesem Zwecke

$$\frac{dz}{dx} = z = \frac{P(x, z)}{Q(x, z)}$$

und rechnen für die Werte  $z = \frac{\delta^2}{\nu} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  die Werte von  $x$  als Funktion von  $x$  aus. Offenbar werden diese Werte für diejenigen Abszissen unendlich, für die der Nenner  $Q(x, z)$  verschwindet. Dies ist der Fall für  $\lambda_1 = 12$  und  $\lambda_2 = -17,76$ . Mit Hilfe dieser Kurven  $z = \text{const}$  konstruieren wir nun das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Wir zeichnen in einem Koordinatensystem  $x, \frac{\delta^2}{\nu}$  die Kurven  $x = \text{const}$  und erhalten auf diese Weise Abb. 6. Eine nähere Diskussion der Differentialgleichung zeigt weiter, daß der singuläre Punkt  $x = 0, \frac{\delta^2}{\nu} = \frac{\delta_0^2}{\nu}$  ein Sattelpunkt ist<sup>1)</sup>. Durch diesen Punkt gehen also nur zwei Lösungskurven, von denen die mit horizontaler Tangente die gesuchte ist. Nehmen wir in der Zeichenebene einen beliebigen Punkt an und versuchen wir von ihm aus die Lösungskurve durch die Isoklinenschar hindurchzulegen, so wenden sich die Kurven wegen der oben angegebenen Singularität entweder nach plus oder minus Unendlich. Wir erhalten auf diese Weise ein scharfes Kriterium für die gesuchte, durch den singulären Punkt gehende Lösungskurve. Die Bogenlänge des Ablösungspunktes finden wir als Abszisse des Schnittpunktes der Integralkurve mit der Kurve  $\lambda = -12$ . Es ergibt sich:

$$x_0 = 6,94 \text{ cm.}$$

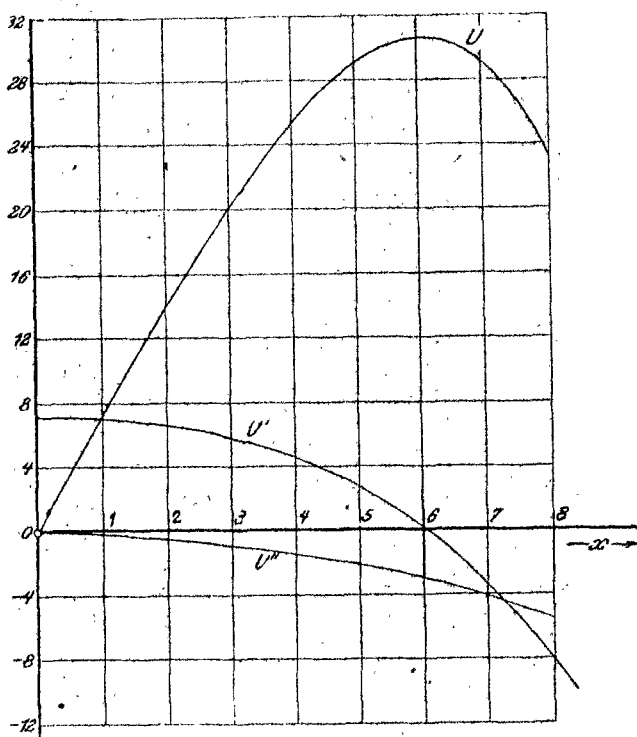


Abb. 5

<sup>1)</sup> Vergl. etwa: Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig 1903 S. 333.

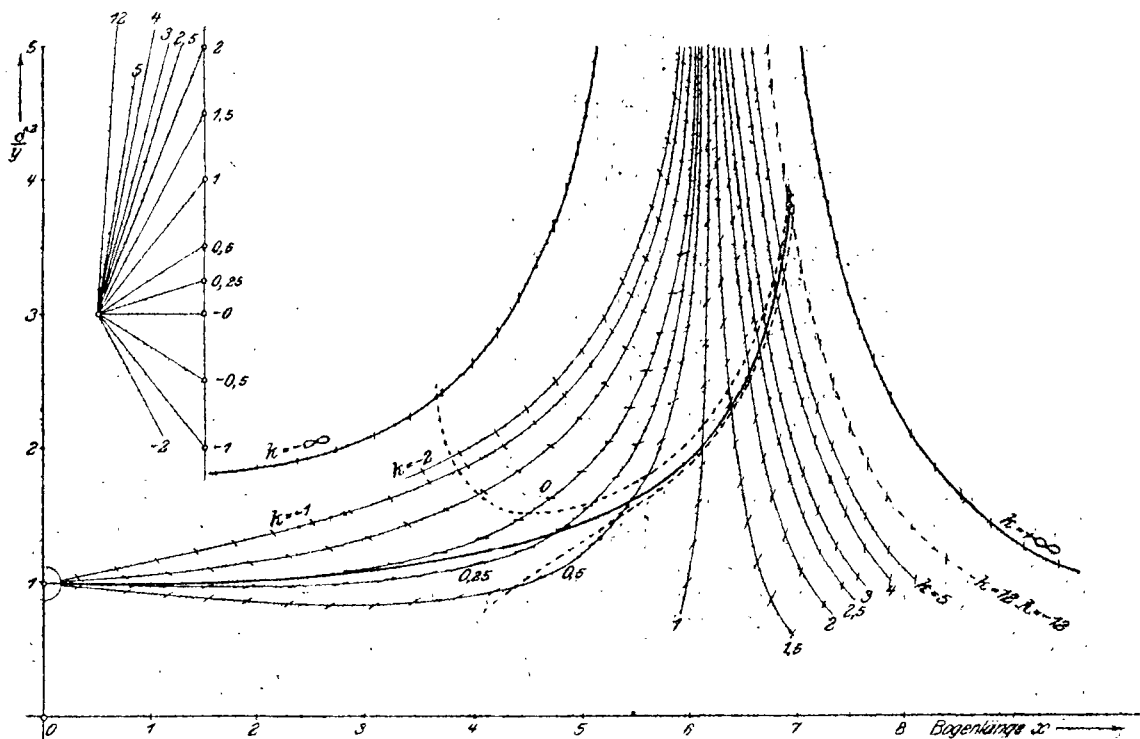


Abb. 6

Hiemenz hat in seiner Dissertation auf ganz anderem Wege den Versuch gemacht, für das Beispiel des Zylinders die Differentialgleichung der Grenzschicht zu lösen. Mit Hilfe der Stromfunktion  $\psi$  kann man schreiben:

$$\rho \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

Das Druckgefälle  $\frac{dp}{dx}$  entwickelt er in eine Potenzreihe nach  $x$  und macht auch für die Stromfunktion den Ansatz:

$$\psi = \psi_1 x + \psi_3 x^3 + \psi_5 x^5,$$

stellt also die Lösung in Gestalt einer vom Standpunkt beginnende Taylorentwicklung dar. Dann läßt sich die partielle Differentialgleichung in eine Reihe unendlich vieler gewöhnlicher Differentialgleichungen zerlegen. Von diesem System löst er die ersten drei und behauptet, ohne den Grad der Konvergenz zu prüfen, daß hierdurch  $\psi$  hinreichend genau bestimmt sei und  $\psi_7, \psi_9$  usw. keinen wesentlichen Einfluß mehr ausüben. Für den Ablösungspunkt erhält er 6,977, einen Wert, der mit dem oben abgeleiteten Näherungswert und mit dem Experiment sehr gut übereinstimmt.

Die Näherungsmethode hat den großen Vorteil, uns infolge der graphischen Behandlung einen wesentlich besseren Einblick in den Verlauf der Grenzschicht zu geben. Wir erkennen aus der unten näher erläuterten Abb. 8 sofort, daß es nicht möglich ist, vom Staupunkt aus mit drei Gliedern einer Taylorreihe den Verlauf der Lösungskurve bis zur Ablösung zu erfassen, da sie sehr bald hinter dieser Stelle senkrecht zur  $x$ -Achse verläuft. Auch der eine geometrische Ort des Ablösungspunktes — die Kurve  $\lambda = -12$  — verläuft sehr steil zur Abszisse, so daß bedeutende Aenderung im Verlauf der Integralkurve relativ geringe Verschiebungen der Ablösung mit sich bringt. Der Ablösungspunkt verliert so vollständig die Bedeutung, die ihm Hiemenz als Prüfstein der Grenzschichten-Theorie zugeschrieben hat.

Der Unterschied unserer Näherungslösung und der von Hiemenz wird aber sehr beträchtlich, wenn man die Profile der Grenzschicht für einige Werte von  $x$  berechnet. Bei Hiemenz ändert sich die Dicke der Grenzschicht nur sehr wenig; sie beträgt etwas

über 1 mm. Die Grenzschicht der Näherung stimmt im Staupunkt mit der von Hiemenz überein. Im Ablösungspunkt dagegen ist  $\frac{\delta^2}{\nu} = 3,84$ ; die Dicke  $\delta = 1,96$  mm also doppelt so groß.

In Abb. 7 ist die Verdrängung  $\delta^*$  sowohl nach der Hiemenzschen als auch nach der oben durchgeführten Lösung aufgetragen. Es ist dabei:

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \frac{q}{U} dy = \delta \int_0^1 \frac{q}{U} d\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Führen wir für  $q$  den Wert  $U(1 - ay - by^2 - cy^3 - dy^4)$  ein, so ergibt sich nach Auswertung des Integrals mit Hilfe der dimensionslosen Größe  $\lambda = \frac{U^2 \delta^2}{\nu}$

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu \lambda}{U^2}} \left( \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120} \right).$$

Folgende Tabelle gibt die berechneten Werte abhängig von der Bogenlänge des Zylinders.

$x$ cm	0	1	2	3	4	5	5,5	6	6,5	6,75	6,94
$\frac{\delta^2}{\nu}$	0,986	0,990	1,02	1,08	1,21	1,44	1,62	1,92	2,48	2,94	3,84
$\delta$ mm	0,993	0,995	1,01	1,04	1,10	1,20	1,27	1,39	1,57	1,71	1,96
$\delta^*$ mm	0,289	0,241	0,246	0,258	0,279	0,320	0,354	0,414	0,520	0,614	0,784

Wir vermuten, daß unsere Lösung eine bessere Annäherung an den wahren Verlauf bietet. Um den Unterschied klar hervortreten zu lassen, ist in Abb. 8 der Verlauf der Geschwindigkeit in der Grenzschicht für  $y = 0,374$  mm (bei Hiemenz  $H = 1$ ) abhängig von der Bogenlänge berechnet worden. Außerdem sind die einzelnen Glieder der Hiemenzschen Reihenentwicklung eingezeichnet worden. Es ergibt sich, daß die Hiemenzsche Lösung wohl gegen unsere Näherungslösung hin konvergiert, daß aber die Anzahl der berechneten Glieder  $\psi_n$  durchaus ungenügend ist und zum mindesten noch  $\psi_7$  und  $\psi_8$  berechnet werden müßten. Es scheint daher, daß eine Reihenentwicklung vom Staupunkte aus in diesem Falle verfehlt ist, weil die Änderung des Geschwindigkeitsprofils erst bei großen Werten von  $x$  merklich einsetzt, bei denen die Taylorentwicklung (wenn überhaupt) langsam konvergiert.

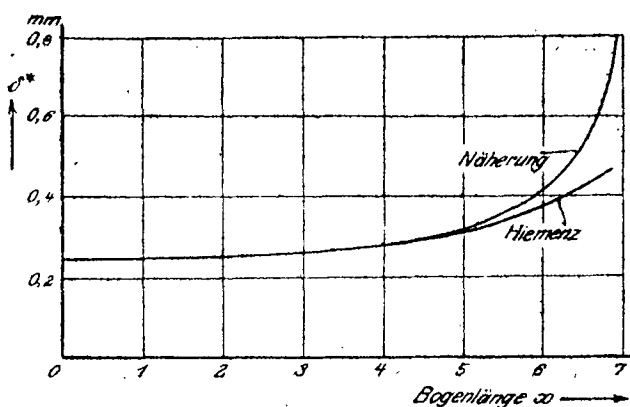


Abb. 7

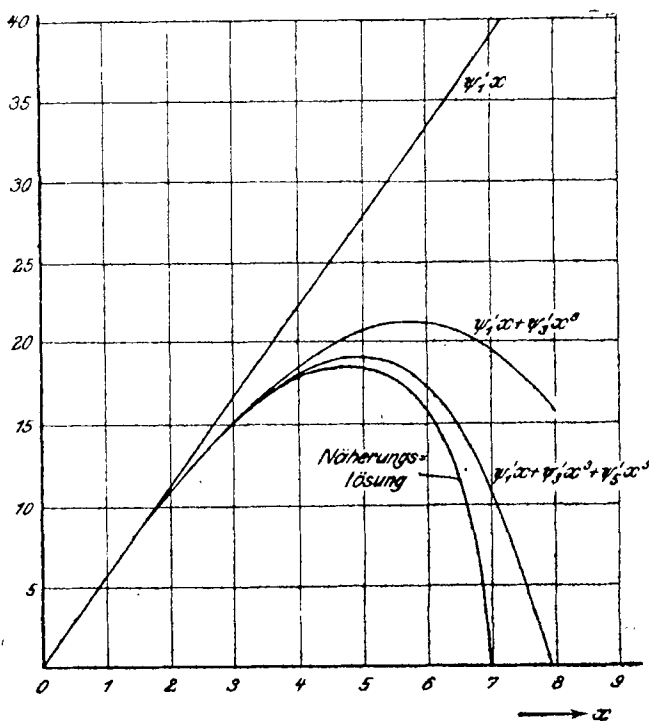


Abb. 8

**5) Die Strömung zwischen nichtparallelen Wänden (Diffusor).** Eine weitere Anwendung der näherungsweise Integration der Differentialgleichung der Grenzschicht soll sich auf die Strömung im Diffusor beziehen.

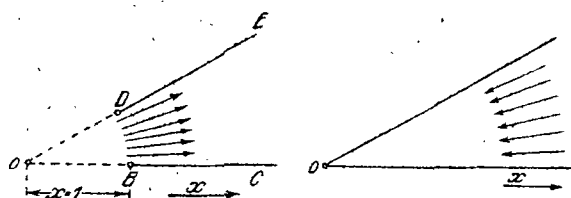


Abb. 9

Wir behandeln den einfachsten Fall zweier nicht paralleler geradliniger Wände  $BC$  und  $DE$ , Abb. 9. Wir verlängern die geraden Stücke bis zum Schnitt in  $O$  und wollen die Entfernung  $OB$  als Einheit festlegen.  $OC$  sei die  $x$ -Koordinatenrichtung unseres Systems. Im Punkte  $O$  nehmen wir nun eine Quelle an, deren Ergiebigkeit  $2\pi A$  sei. Dann ist offen-

bar die radiale Geschwindigkeitsverteilung:

$$U = \frac{A}{x}$$

Diesen Wert haben wir nun in die auf S. 262 abgeleitete allgemein gültige Differentialgleichung (8) einzusetzen. Für  $\frac{UU''}{U'^2}$  erhalten wir den Wert 2, die Differentialgleichung geht also über in

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{0,8 [-9072 + 1670,4\lambda - 57\lambda^2 - 3\lambda^3]}{\frac{A}{x} (-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2)}$$

wobei  $\lambda = U'z = -\frac{A}{x^2}z$  und  $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{A}(2\lambda + \lambda'x)$  ist.

Setzen wir dies ein, so wird

$$\frac{x \frac{d\lambda}{dx}}{2} = \frac{-0,2\lambda^3 - 17,04\lambda^2 + 455,04\lambda - 3628,8}{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}$$

oder nach Trennung der Variablen:

$$\frac{2}{5x} dx = \frac{-213,12 + 5,76\lambda + \lambda^2}{\lambda^3 + 85,2\lambda^2 - 2275,2\lambda + 18144} d\lambda$$

Wir zerlegen die gebrochene rationale Funktion auf der rechten Seite in Partialbrüche und erhalten nach der Integration zwischen den Grenzen null und  $\lambda$

$$\frac{2}{5} \ln x = 0,7581 \ln \frac{107,85 + \lambda}{107,85} + 0,1210 \ln \frac{\lambda^2 - 22,65\lambda + 168,2}{168,2} - 0,0664 \left\{ \operatorname{arctg} \frac{2\lambda - 22,65}{12,65} + \operatorname{arctg} 1,790 \right\}$$

Berücksichtigen wir, daß die Bedingung für Ablösung lautet:  $\lambda = -12$ , so ergibt sich für den Ablösungspunkt:

$$\frac{2}{5} \ln x_0 = 0,7581 \ln 0,8887 + 0,1210 \ln 3,471 - 0,0664 \{ \operatorname{arctg} 1,790 - \operatorname{arctg} 3,688 \}$$

oder ausgerechnet  $x_0 = 1,214$ .

Wir haben also das merkwürdige Ergebnis erhalten, daß auch für geradlinige Diffusoren mit beliebig kleinem Öffnungswinkel auf Grund der Grenzschichten-Theorie sich stets eine Ablösungsstelle angeben läßt, und zwar entspricht derselbe einer Querschnittserweiterung von 1,214:1, d. h. etwa 21–22 vH. Jedoch ist dies Ergebnis physikalisch nicht bindend, da im Falle der Ablösung die Druckverteilung von der hier zugrunde gelegten in der Nähe der Ablösungsstelle abweicht, insbesondere aber in der Praxis die Grundströmung selbst zumeist turbulent ist.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse für den konvergenten Kanal. Wir nehmen dann im Punkte  $O$  eine Senke an, deren Intensität wiederum mit  $2\pi A$  bezeichnet werde. Die radiale Geschwindigkeitsverteilung ist für diesen Fall  $U = -\frac{A}{x}$  und die Differentialgleichung heißt jetzt

$$\frac{x \frac{d\lambda}{dx}}{4,4} = \frac{\lambda^3 + 12,98\lambda^2 - 400,6\lambda + 1649}{213,12 - 5,76\lambda - \lambda^2}$$

Die Integration erfolgt wiederum durch Trennung der Variablen:

$$\frac{4,4}{x} dx = \frac{218,12 - 5,76\lambda - \lambda^2}{\lambda^3 + 12,98\lambda^2 - 400,6\lambda + 1649} d\lambda$$

und liefert:

$$4,4 \ln x = 0,2473 \ln(\lambda - 10,34) - 0,9115 \ln(\lambda - 5,530) - 0,3363 \ln(\lambda + 28,85) + c.$$

Bei dieser Strömung läßt sich, wie vorausszusehen war, keine Ablösungsstelle angeben.

Da sich für das zuletzt behandelte Beispiel der Senke die strenge Integration der Differentialgleichung für den Fall unendlich langer Wände durchführen läßt, so soll der Vergleich mit ihr und der Näherungslösung geführt werden.

Wir setzen die Stromfunktion an in der Form

$$\psi = \psi(t), \quad t = \frac{y}{x}$$

und erhalten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{x} \psi', \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \psi'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\psi'' \frac{y}{x^3} - \psi' \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\psi''}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\psi'''}{x^3}.$$

Das Druckgefälle  $\frac{dp}{dx}$  berechnet sich zu:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U U' = -\frac{A^2}{x^3}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Differentialgleichung der Grenzschicht ein, so ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$-\psi'^2 = -A^2 + r \psi''.$$

Wir bezeichnen  $\psi'$  mit  $\zeta$

$$-\zeta^2 = -A^2 + r \zeta''$$

oder

$$-\frac{\zeta^3}{3} = -A^2 \zeta + r \frac{\zeta'^2}{2} + B.$$

Die Integrationskonstante  $B$  bestimmen wir aus der Bedingung, daß für  $\zeta' = 0$ ,  $\zeta = -A$  sein soll

$$B = -\frac{2}{3} A^3 \text{ und } \frac{r}{2} \zeta'^2 = -\frac{\zeta^3}{3} + A^2 \zeta + \frac{2}{3} A^3$$

oder

$$\sqrt{\frac{3r}{2}} \zeta' = (\zeta + A) \sqrt{2A - \zeta}, \quad \frac{1}{x} dy = \sqrt{\frac{3r}{2}} \frac{d\zeta}{(\zeta + A) \sqrt{2A - \zeta}}.$$

Wir machen nun die Substitution  $2\sqrt{2A - \zeta} = q$  oder  $\frac{-d\zeta}{\sqrt{2A - \zeta}} = dq$  und erhalten:

$$\sqrt{\frac{2A - \zeta}{3A}} = \text{Eg} \left( a + \sqrt{\frac{A}{2r}} \frac{y}{x} \right).$$

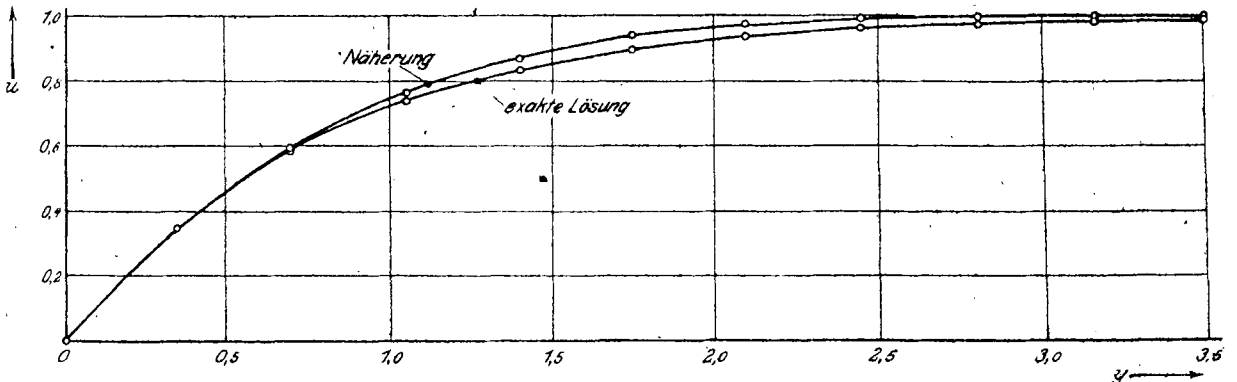


Abb. 10



wobei die Zeichen

- $u$  = Geschwindigkeit in der Stromrichtung,
- $\tau_0$  = Schubspannung an der Wand,  $y$  = Wandabstand,
- $\mu$  = Konstante der inneren Reibung,  $\rho$  = Dichte,
- $\nu = \mu : \rho$  = Zähigkeitszahl,
- $B$  = eine Konstante = 8,82<sup>1)</sup>

bedeuten.

In demselben Gebiet folgt die Geschwindigkeit, wenn wir die Schubspannung an der Wand als bekannt voraussetzen, der Gleichung

$$u = B \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2} \left( \frac{y}{\nu} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (2).$$

Um zur Verteilung der Geschwindigkeit und Schubspannung für das ganze Flüssigkeitsgebiet zu gelangen, gibt es zwei Wege. Entweder man geht von (2) aus und setzt:

$$u(y) = y^{1/2} \{ A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots \} \dots \dots \dots (2a),$$

wobei die Konstante  $A_0$  sich aus der Forderung bestimmt, daß (2a) für kleine Werte von  $y$  in (2) übergeht, oder man kann auch den Ansatz (1) für die zwischen den einzelnen Schichten übertragene Schubspannung erweitern und schreibt:

$$\tau = K [Y(y)]^{6/7} \frac{\partial u}{\partial y} \dots \dots \dots (1a),$$

wobei  $Y$  in der Nähe der Wand in  $y$  übergehen muß. Mit diesen Ansätzen sind wir imstande, das Geschwindigkeitsfeld einer turbulenten Strömung, solange keine Ablösung derselben von den festen Begrenzungswänden erfolgt, zu berechnen.

Für den besonderen Fall eines Kreisrohres wurde in der vorangehenden Arbeit von v. Kármán gezeigt, daß man die Versuchsergebnisse über die Geschwindigkeitsverteilung mit genügender Genauigkeit wiedergeben kann, falls man für die Funktion  $Y(y)$ , die wir als »Einflußfunktion« bezeichnen wollen, setzt:

$$Y = \frac{r^2 - y^2}{2r} \quad [y = r - y].$$

Für den zeitlich und räumlich stationären Zustand erhält man dann für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$u = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \dots \dots \dots (3)$$

und schließlich folgt noch das Verhältnis der maximalen Geschwindigkeit in der Rohrachse  $u_{\max}$  zur mittleren Geschwindigkeit des Querschnittes  $v$  zu

$$v = \frac{7}{8} u_{\max} \dots \dots \dots (4).$$

**2. Die turbulente Wärmeleitfähigkeit.** Im folgenden beschäftigen wir uns ausschließlich mit der Wärmefortpflanzung durch Materie und beschränken uns demgemäß auf ein Temperaturgebiet, in welchem die durch Strahlung übertragene Wärmemenge gegenüber dem durch materielle Teilchen überführten Anteil zurücktritt. Ferner soll die Geschwindigkeitsverteilung lediglich durch äußere Umstände bedingt sein, d. h. wir vernachlässigen den Einfluß des Temperaturfeldes auf das Geschwindigkeitsfeld. Bei turbulenter Bewegung, die ja an verhältnismäßig große Strömungsgeschwindigkeiten gebunden ist, kommt — soweit die Dichteunterschiede im Querschnitt infolge von Temperaturänderungen nicht zu groß sind — der dadurch begangene Fehler nicht in Betracht.

Entsprechend den Anschauungen, die man von der Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern übernommen hat, pflegt man auch bei der Wärmeausbreitung in Flüssigkeiten im allgemeinen zwischen der Wärmeleitfähigkeit, die ein Ausdruck für den Wärmetransport durch die Molekularbewegung sein soll, und der sogenannten Wärme-konvektion, d. h. der Wärmeausbreitung durch molare Bewegungen, zu unterscheiden, benutzt also als einteilendes Prinzip die Größenordnung der Wärmeträger. Sowohl für die mathematische Behandlung als auch für das Verständnis des Vorganges erscheint jedoch eine etwas andere Fassung vorteilhafter, welche die Art der Bewegung der Wärmeträger in den Vordergrund rückt.

<sup>1)</sup> Der Wert der Konstante entspricht dem Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung, die unten benutzt wird. Vgl. Gl. (8).

Dementsprechend wollen wir unter »Wärmeleitung« in Flüssigkeiten die Ausbreitung der Wärme durch die ungeordnete Bewegung der Moleküle verstehen, wie wir sie uns nach dem Bilde der kinetischen Gastheorie vorzustellen haben. Als charakteristisch für die molekulare Wärmebewegung werden wir dann den Umstand ansehen, daß sie bei einem bestimmten Druck und einer bestimmten Dichte der Flüssigkeit eine reine Temperaturfunktion ist und insbesondere vom Bewegungszustand der Flüssigkeit nicht abhängt. »Wärmeleitung« hingegen soll die Uebertragung von Wärme durch eine geordnete Bewegung der Flüssigkeitsteilchen bezeichnen. Der in vielen Lehrbüchern der Physik eingeführte Begriff der Konvektion, als der Entstehung einer natürlichen Strömung durch Dichteunterschiede unter der Einwirkung der Schwerkraft, ist dann in dieser Definition mit enthalten.

Bei laminarer Strömung sind damit alle Anteile der Wärmeübertragung erledigt. Bei turbulenter Strömung sehen wir aber, daß uns nun noch eine Art der Wärmeausbreitung fehlt. Bekanntlich stellt man sich die stationäre turbulente Bewegung so vor, daß man jeder Stelle einen gewissen mittleren Geschwindigkeitsvektor zuschreiben kann und daß sich diesem Vektor ein nach Richtung und Größe schwankender Geschwindigkeitsvektor überlagert, dessen Mittelwert über eine genügende Zeitspanne gleich Null ist. Nach v. Kármán kann man z. B. dieses kinematische Bild durch die Vorstellung genauer beschreiben, daß in der gesamten mit einer bestimmten Geschwindigkeitsverteilung fortbewegten Flüssigkeitsmasse ungeordnet durcheinander bewegte Wirbelfäden schwimmen, deren Bewegungen, so wie diejenige der Moleküle, statistischen Gesetzen gehorchen. Der schwankende Zusatz-Geschwindigkeitsvektor an einem Punkt der Flüssigkeit ist dann durch die Zirkulation und die relative Lage der gesamten Wirbelfäden bedingt.

Diese Vorstellung führt dazu, abgesehen von der gewöhnlichen Wärmeleitfähigkeit, die als Ausdruck für das statistische Gesetz der Molekularbewegung erscheint, noch eine Leitfähigkeit der turbulenten Bewegung einzuführen, die den statistischen Einfluß der Wirbelbewegung auf die Wärmeausbreitung zum Ausdruck bringt. Diese wird dann im Gegensatz zur gewöhnlichen Leitfähigkeit in erster Linie vom Bewegungszustand der Flüssigkeit, der insbesondere durch die Beschaffenheit der festen Begrenzungsflächen bedingt ist, abhängen.

Der Gedanke, diese Erscheinung durch Einführung einer erhöhten Leitfähigkeit für die turbulente Bewegung zu berücksichtigen, ist bekannt. Mehrere Autoren haben verschiedene Ansätze vorgeschlagen, bei denen die erhöhte Leitfähigkeit als eine empirische Funktion der Geschwindigkeit angesehen wird. Wesentlich näher ist man zu der Erkenntnis der Verhältnisse durch die Betrachtungen Reynolds' und Prandtl's gelangt. Beide gehen von der Vorstellung aus, daß turbulente Reibung und turbulente Wärmeübertragung soweit analoge Vorgänge sind, daß derselbe Mechanismus, welcher in dem ersten Falle einen »Impulstransport« bewirkt, in dem zweiten Falle zur Wärmeausbreitung führt. Reynolds<sup>1)</sup> hat in intuitiver Weise nach dieser Ueberlegung aus der Widerstandszahl unmittelbar auf die Wärmeübergangszahl in Kreisrohren geschlossen, also gewissermaßen die Integralvorgänge verglichen. Prandtl<sup>1)</sup> stellt demgegenüber die exakten Bedingungen auf, unter denen ein direkter Analogieschluß erlaubt ist; er zeigt, daß in gewissen Fällen das Temperaturfeld ein genaues Abbild des Geschwindigkeitsfeldes ist, so daß die Kenntnis der Bewegung unmittelbare Schlüsse auf den Wärmezustand zuläßt. Er zeigt aber, daß gerade im kreisförmigen Rohre dies nicht genau der Fall ist, so daß man nur auf die Form der Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern schließen kann, ohne zu zahlenmäßigen Ergebnissen zu gelangen. Die neuen Fortschritte (siehe 1) zur Darstellung der Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung und der ihr entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung ermöglichen nun eine genauere Fassung des »Elementargesetzes« für den turbulenten Wärmeaustausch, so daß die nachfolgenden Ausführungen nach zwei Richtungen über die Prandtl'schen Ergebnisse hinausgehen, indem sie erstens zahlenmäßige Ergebnisse liefern, zweitens eine rechnerische Verfolgung der verschiedensten Anordnungen gestatten, bei denen keine räumliche Konstanz des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes vorliegt. Dies ermöglicht eine ausführliche Diskussion der Versuchsergebnisse, welche die einzelnen Abweichungen erklärt.

<sup>1)</sup> s. Fußnote 4, S. 268.

**3. Das Elementargesetz des turbulenten Wärmeaustausches.** Zunächst wollen wir den Gedankengang der kinetischen Gastheorie, der zum Differentialgesetz der inneren Reibung und der Wärmeübertragung durch ungeordnete Molekularbewegung führt, auf diesen Fall der turbulenten Unordnung übertragen.

Wir betrachten eine Schicht im Abstände  $y$  von der Wand; es herrsche dort die mittlere Geschwindigkeit  $u$  in Richtung der Strömung und  $|w|$  sei der mittlere absolute Betrag der Geschwindigkeit senkrecht zur Stromrichtung. In zwei Schichten im Abstände  $\pm \frac{x}{2}$  von der betrachteten Schicht  $y$  (wobei wir unter  $x$  eine Art »mittlere Weglänge« verstehen) herrscht dann die mittlere Stromgeschwindigkeit

$$u \pm \frac{\partial u}{\partial y} \frac{x}{2}$$

Der Impulstransport pro Flächeneinheit senkrecht zur mittleren Strömung ist mit einem Proportionalitätsfaktor, der von der Art der kohärenten Flüssigkeitsteile und der zeitlichen Mittelwertbildung abhängt, durch den Ausdruck gegeben:

$$\beta \rho w \frac{\partial u}{\partial y} x = \tau \dots \dots \dots (5)$$

und ist gleich der Schubspannung  $\tau$  an der Stelle  $y$ .

Bezeichnet  $C$  die spezifische Wärme der Volumeinheit, so ist andererseits der Wärmetransport  $q$  pro Flächeneinheit ebenfalls senkrecht zur mittleren Strömung gegeben durch:

$$q = \beta C w \frac{\partial \vartheta}{\partial y} x \dots \dots \dots (6)$$

Dies besagt, daß dieselben Flüssigkeitsteilchen, die durch ihre Impulsübertragung die Schubspannung  $\tau$  erzeugen, auch die Wärme übertragen. Durch eine Art Abzählung dieser Teilchen kann somit das Maß der übertragenen Wärme berechnet werden.

Eine solche »Abzählung« ist nun, wie man leicht sieht, durch das Produkt  $\beta \omega x$  gegeben. Wir wollen es den Turbulenzkoeffizienten nennen. Der Turbulenzkoeffizient zusammen mit der Stoffkonstanten  $C$  stellt genau ebenso einen Ausdruck für das statistische Gesetz der Wärmeübertragung im Falle turbulenter Strömung dar, wie die Leitfähigkeit  $\lambda$  im Falle der Ruhe.

Den Turbulenzkoeffizienten können wir aus unserer früher gewonnenen Kenntnis des Strömungszustandes berechnen.

Es war nach Gleichung (1) und (1a)

$$\tau = \varrho \varphi(y) \frac{\partial u}{\partial y},$$

somit folgt:

$$\beta w x = \varphi(y) = \frac{7}{B} \frac{\tau_0^{3/2}}{\varrho^{1/2}} \mu^{1/2} \gamma^{5/2} \dots \dots \dots (7)$$

Der Ansatz (1) soll die gesamte Wirkung der Impulsleitung (innere Reibung) und des Impulstransportes durch Wirbelkonvektion zum Ausdruck bringen. Dementsprechend sind sowohl der Ansatz selbst, als die daraus entspringende Geschwindigkeitsverteilung lediglich als asymptotische Ausdrücke für sehr große Reynoldssche Zahlen anzusehen, bei denen die Wirkung der Impulsleitung neben dem zweiten Anteil des Reibungsmechanismus zurücktritt. Es zeigt sich aber, daß die Proportionalität zwischen  $\tau$  und  $v^{7/2}$  bereits bei Werten der Reynoldsschen Zahl, die etwa der 5fachen kritischen Geschwindigkeit entsprechen, eine sehr gute Annäherung darstellt. Wir schließen daraus, daß die statistischen Gesetze für den molekularen und molaren Impulstransport bereits bei mäßigen Reynoldsschen Zahlen sich in guter Annäherung durch den gemeinsamen Ausdruck (1) darstellen lassen.

Dadurch, daß wir Gl. (1) zur Berechnung von  $\beta \omega x$  herangezogen haben, haben wir die Annahme getroffen, daß sich auch die gesamte Wärmeübertragung durch ein gemeinsames statistisches Gesetz ausdrücken läßt; das molekulare und molare Vorgänge zusammenfaßt. Wir haben daher angenommen, daß bei den molekularen Vorgängen dieselbe Proportionalität zwischen Impuls- und Energieübertragung besteht, wie es bei den molaren Vorgängen der Fall ist; d. h., wir setzen voraus, daß  $\lambda$  und  $\mu$  in demselben Verhältnis wie  $C$  und  $\varrho$  zueinander stehen.

Der dadurch begangene Fehler wird für Gase, wie die folgende Ueberlegung zeigt, vernachlässigbar. Einerseits überwiegt nämlich der durch die reine turbulente

Leitfähigkeit übertragene Teil an Wärme, wie ein Vergleich der W.-Ue.-Zahlen (Wärme-Übergangszahlen) für laminare und turbulente Strömung zeigt, den durch gewöhnliche Leitung übertragenen um ein Vielfaches; andererseits ist je nach der Atomzahl der Gase das Verhältnis  $\frac{\lambda \rho}{c \mu}$  zwischen 1,25 und 0,97 gelegen, d. h. auch der molekulare Mechanismus der Impulsleitung (innere Reibung) und Wärmeleitung sind im wesentlichen ähnlich. Wir werden demnach für Gase und überhitzte Dämpfe praktisch auch quantitativ richtige Ergebnisse von unserer Rechnung erwarten können. In diesem Sinne sollen die folgenden Ausführungen verstanden werden. Auf den Fall, daß  $\frac{\lambda \rho}{c \mu}$  von 1 sehr verschieden ist, werde ich am Schlusse der Arbeit noch einmal zurückkommen.

Unter Berücksichtigung von (6) und (7) erhalten wir demnach für die durch die Flächeneinheit einer Schicht im Abstände  $y$  transportierte Gesamtwärme  $q$ :

$$q = \frac{7}{8} \left( \frac{\tau_0}{\rho} \right)^{3/7} \nu^{1/7} C y^{6/7} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (8).$$

Für die praktischen Anwendungen wollen wir den Grenzwert von  $q$  für  $y = 0$ , d. h. die von der Flächeneinheit der Wand übergehende Wärmemenge, berechnen.

Die Geschwindigkeit  $u$  soll dargestellt werden durch:

$$u(y) = y^{1/2} \{ A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \dots \}.$$

Die Schubspannung  $\tau$  hat für  $y = 0$  einen festen Grenzwert und ist als Funktion von  $y$  in der Nähe von  $y = 0$  regulär. Wir können also  $\tau$  in eine Potenzreihe nach  $y$  entwickeln.

$$\tau = \beta w \kappa \rho \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0 + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \dots$$

Setzen wir  $\frac{\partial u}{\partial y}$  ein, so folgt für  $\beta w \kappa$ :

$$\beta w \kappa = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_0 + \tau_1 y + \tau_2 y^2 + \dots}{y^{1/2} A_0 + 1/2 A_1 y + \dots} y^{6/7}.$$

Denken wir diesen gebrochenen Ausdruck in der Umgebung von  $y = 0$  nach Potenzen von  $y$  entwickelt, so folgt:

$$\beta w \kappa = \frac{7}{\rho} \frac{\tau_0}{A_0} y^{5/7} \{ 1 + a y + \dots \}.$$

Berücksichtigen wir die Gleichung (6), so erhalten wir schließlich:

$$q_0 = \frac{7}{\rho} \frac{\tau_0}{A_0} C \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} y^{6/7} \right] \quad (9).$$

**4. Der Wärmeaustausch in Rohren.** Bei der stationären Strömung durch ein Rohr kann man zwei Bereiche unterscheiden:

1. Den hydrodynamisch ausgebildeten Zustand, d. i. jenen, bei dem sich die einzelnen Querschnitte längs der Stromrichtung nicht mehr voneinander unterscheiden. Es hat sich ein gewisses Geschwindigkeitsprofil ausgebildet, das dann konstant erhalten bleibt.

2. Den hydrodynamisch unausgebildeten Zustand im Rohrantang. Nehmen wir z. B. an, daß die Flüssigkeit aus einem großen Behälter durch glatten Uebergang in das Rohr einströmt, so werden im Einströmungsquerschnitt alle Stromfäden angenähert gleiche Geschwindigkeit haben. Beim weiteren Fortschreiten werden dann die wandnahen Schichten durch die Reibung verzögert, bis sich jenes konstante Geschwindigkeitsprofil ausgebildet hat, das dem Gleichgewichtszustand entspricht. Man nennt oft diesen Teil des Rohres die Anlaufstrecke.

Wir berechnen in den folgenden Abschnitten das Temperaturfeld und den Wärmeübergang im Rohre, falls für den Einströmquerschnitt eine Temperaturverteilung vorgegeben ist und die Rohrwandtemperatur in der Stromrichtung konstant gehalten wird. Wir stellen für die beiden erwähnten Bereiche getrennte Lösungen auf, können aber durch einen stetigen Uebergang von der ersten Lösung zur zweiten erreichen, daß sich die allgemeine Aufgabe durch eine Aneinanderreihung der Teillösungen befriedigen läßt.

**5. Der Wärmeübergang bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand.**

Um die Differentialgleichung für das Temperaturfeld aufzustellen, betrachten wir ein Volumenelement, das durch zwei konzentrische Zylinderflächen, die zur Rohrwand parallel

sind und zwei dazu senkrechte Querschnitte begrenzt ist. Um die Vorstellung zu fixieren, nehmen wir an, daß eine warme Flüssigkeit durch ein kälteres Rohr fließt, d. h. der Wärmestrom soll von der Flüssigkeit zur Wand gehen. Wir setzen ferner die konstante Rohrtemperatur gleich 0, so daß die Temperatur der Flüssigkeit  $\vartheta$  die Übertemperatur über die Wandtemperatur bedeutet. Da wir jedoch keine Annahme treffen, welche die eine Richtung des Wärmestromes vor der anderen auszeichnet, so gelten alle Beziehungen ebenso, wenn  $\vartheta$  sein Vorzeichen wechselt.

Bezeichnet  $z$  = die Koordinate der Stromrichtung,  
 $y$  = den Abstand von der Achse,  
 $C$  = die spez. Wärme pro Volumeneinheit,

so gibt die Wärmebilanz für den stationären Zustand:

$$\frac{\partial}{\partial y} \{ 2 \pi y q \} = C u \frac{\partial \vartheta}{\partial z} 2 \pi y \dots \dots \dots (10)$$

Für  $u$  ist gemäß Gl. (3) und (4) einzusetzen:

$$u = \frac{1}{2} v \left\{ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

während  $q$  nach Gl. (8) unter Berücksichtigung von (1a), (3) und (4) zu:

$$q = 0,199 \frac{v^{3/4} r^{1/4} C}{(2r)^{3/4}} \left( \frac{r^2 - y^2}{2r} \right)^{3/4} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}$$

folgt.

Führen wir dies in Gl. (10) ein, so erhalten wir schließlich als Differentialgleichung für den Wärmeaustausch bei hydrodynamisch ausgebildetem Strömungszustand:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ y \left( \frac{r^2 - y^2}{2r} \right)^{3/4} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\} = K y \left\{ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right\}^{1/2} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \dots \dots \dots (11),$$

wobei

$$K = \frac{1}{2} \frac{v^{3/4} (2r)^{3/4}}{0,199 r^{3/4}} \dots \dots \dots (11a)$$

gesetzt ist.

Die Randbedingungen lauten:

- I)  $\vartheta = 0$  für  $y = r$  und wegen der allseitigen Symmetrie
- II)  $\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0$  für  $y = 0$ . Ferner muß
- III) für  $z = 0$  die radiale Temperaturverteilung vorgegeben sein.

Da sich die Flüssigkeitstemperatur mit zunehmender Rohrlänge der Wandtemperatur asymptotisch nähert, so setzen wir die Lösung in der Form an:

$$\vartheta = g(y) e^{-kz}$$

Führt man diesen Ausdruck in die Gleichung ein, so erhält man für die Funktion  $g$  die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dy} \left\{ y \left( \frac{r^2 - y^2}{2r} \right)^{3/4} \frac{dg}{dy} \right\} = -k K g y \left\{ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

welche nach Wegschaffung der gebrochenen Exponenten durch die Transformation  $\left\{ 1 - \left( \frac{y}{r} \right)^2 \right\}^{1/2} = x$  übergeht in:

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dg}{dx} \right\} = -\omega x^2 g \dots \dots \dots (12),$$

wenn

$$\omega \text{ für } 4gkK \left( \frac{r}{2} \right)^{5/2} \dots \dots \dots (12a)$$

geschrieben wird.

Die Randbemerkungen lauten jetzt:

- I)  $g = 0$  für  $x = 0$  und
- II)  $\frac{dg}{dx}$  endlich für  $x = 1$ .

Wir gelangen zu einer angenäherten Lösung mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens, indem wir die Aufgabe in ein Variationsproblem verwandeln. Dieses lautet, wie sich leicht verifizieren läßt:

$$\int_0^1 \left\{ (1-x^2) \left( \frac{dg}{dx} \right)^2 - \omega x^2 g^2 \right\} dx = \text{Minimum} \dots \dots \dots (13)$$

mit den Randbedingungen I und II als Nebenbedingung. Wir haben es hier mit einem Eigenwertproblem zu tun, da die Gleichung (13) Lösungen, die auch die Randbedingungen befriedigen, nur für bestimmte Werte von  $\omega$  haben wird. Wir setzen für  $g$  an:

$$g(x) = g_1 P_1(x) + g_2 P_2(x) + g_3 P_3(x) + \dots \quad (14),$$

wobei  $g_1, g_2, g_3$  unbestimmte Koeffizienten und die  $P_1, P_2, \dots$  die Legendreschen Kugelfunktionen erster Art bedeuten sollen und beschränken uns zunächst auf drei Glieder. Die Minimalbedingung liefert dann eine Gleichung dritten Grades für  $\omega$ , deren Wurzel sind:

$$\omega_1 = 8,712, \omega_2 = 164,36, \omega_3 = 1700,40 \quad (14a).$$

Die Eigenfunktionen normieren wir in Abweichung von dem üblichen Verfahren so, daß

$$g_1 + g_2 + g_3 = 1 \quad (15),$$

ist, um zu erreichen, daß die Temperatur in der Rohrachse 1 wird;  $g(y)$  ist somit das Verhältnis der Temperatur an der betreffenden Stelle zu der Temperatur in der Rohrachse. Wir finden so die ersten Eigenfunktionen:

$$\left. \begin{aligned} g_I &= 0,9703 P_1 + 0,0212 P_2 + 0,0085 P_3 \\ g_{II} &= -0,7312 P_1 + 0,9665 P_2 + 0,7647 P_3 \\ g_{III} &= 2,6552 P_1 - 6,1589 P_2 + 4,5037 P_3 \end{aligned} \right\} \quad (16).$$

Wir wollen nunmehr noch die Wahl der Entwicklung nach Kugelfunktionen näher begründen. Da es sich um ein Minimalproblem handelt, so kann der exakte Eigenwert nur kleiner sein als jeder Näherungswert. Die Größe der Eigenwerte, die man je nach der Wahl des Reihenansatzes für die zu variierende Funktion erhält, bildet somit ein geeignetes Kriterium für die Güte der Annäherung. Es zeigt sich nun, daß im Vergleich mit einem einfachen Potenzansatz nach  $x$ , sowie mehreren Fourierreihenentwicklungen, der Ansatz nach Kugelfunktionen zu den kleinsten Eigenwerten führt. Was das Verhalten bei Weitertreiben der Näherungen anlangt, so liefern die 3 ersten Näherungen für den ersten Eigenwert, z. B. nacheinander die Werte 8,75, 8,67, 8,71, die Konvergenz des Verfahrens dürfte somit befriedigend sein.

Um auch für die weiteren Eigenwerte zu gleich guten Resultaten zu kommen, müßten natürlich weitere Näherungen

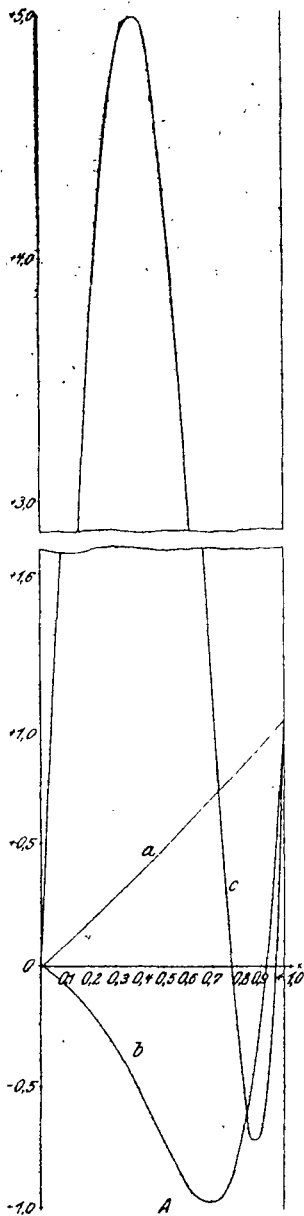


Abb. 1A. Die drei Eigenfunktionen a, b, c aufgetragen über  $x$  als Abszisse.

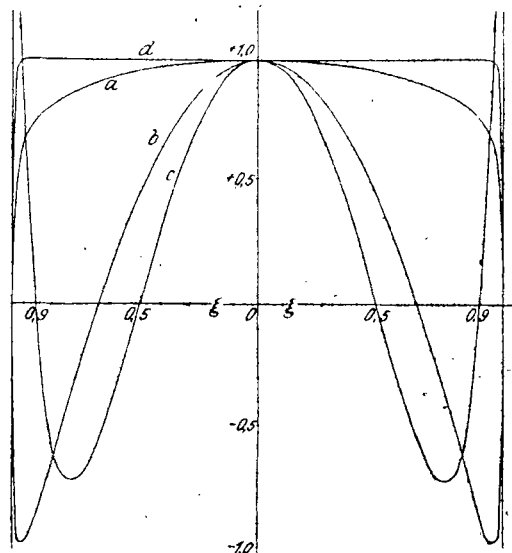


Abb. 1B. Dieselben über  $y$  als Abszisse.  $d$  = Anfangsverteilung für  $x = 0$ .

gerechnet werden; insbesondere der dritte Eigenwert wird bei dem nur dreigliedrigen Ansatz nur in der Größenordnung stimmen. Wir werden aber gleich sehen, daß dies in unserem Resultat nur von geringem Einfluß ist.

Die besondere Eignung der Kugelfunktionen für das vorliegende Problem läßt sich auch noch durch die folgende anschaulichere Ueberlegung plausibel machen, die gleichzeitig auch etwaige Bedenken wegen des Anwachsens des zweiten Koeffizienten in der zweiten Eigenfunktion zerstreuen kann. Betrachtet man die Abb. 1, so sieht man, daß die Eigenfunktionen selbst große Aehnlichkeit mit den Kugelfunktionen zeigen. Entwickelt man nun ein Schema, wie es durch die Gleichungen (16) dargestellt wird, nach Funktionen, die mit den Eigenfunktionen identisch sind, so wird der Koeffizient, dessen Index mit der Ordnungszahl der Eigenfunktion gleich ist, gleich 1, alle anderen werden gleich 0. Die betreffende Eigenfunktion wird durch das eine Glied der Entwicklung bereits exakt dargestellt. Entwickeln wir nach Funktionen, die mit den Eigenfunktionen zwar nicht identisch sind, aber mit ihnen doch gewisse Aehnlichkeit haben, so wird in der Entwicklung der Koeffizient, dessen Index gleich der Ordnungszahl ist, überwiegen. Es ist klar, daß eine solche Entwicklung die darzustellende Funktion mit verhältnismäßig wenig Gliedern gut annähern wird.

Setzt man die Werte von  $\omega$  nach (14a) in Gl. (11a) und (12a) ein, so erhält man für den Potenzexponenten

$$k_1 = 0,1510 \frac{1}{a} \left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^{1/4}, \quad k_2 = 2,844 \frac{1}{a} \left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^{1/4}, \quad k_3 = 29,42 \frac{1}{a} \left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^{1/4} \quad (17).$$

Die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (12) können wir nunmehr als Entwicklung nach Eigenfunktionen anschreiben,

$$\vartheta = a_1 g_I e^{-k_1 z} + a_2 g_{II} e^{-k_2 z} + a_3 g_{III} e^{-k_3 z} \quad (18),$$

deren Koeffizienten so zu bestimmen sind, daß die vorgeschriebene Temperaturverteilung für  $z = 0$  erfüllt wird. Wir wollen die Rechnung vorweg für den Fall gleichmäßiger Temperaturverteilung für den Anfangsquerschnitt durchführen. Wir haben daher  $a_1 \dots a_3$  zunächst so zu bestimmen, daß  $\vartheta(y)$  für  $z = 0$  sich möglichst wenig von  $\vartheta = 1$  unterscheidet. Jede andere Temperatur folgt dann durch eine multiplikative Konstante. Das Minimum der Fehlerquadrate liefert die Werte:

$$a_1 = 1,129, \quad a_2 = -0,180, \quad a_3 = 0,048.$$

Wir erhalten so schließlich die Gleichung des Temperaturfeldes für turbulente Strömung in Röhren bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand, falls im Anfangsquerschnitt die gleichförmige Temperatur  $\vartheta_0$  herrscht:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{ \begin{aligned} &1,129 e^{-0,151 \left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^{1/4} \frac{z}{a}} [0,9544 x - 0,0212 x^3 + 0,0668 x^5] \\ &- 0,180 e^{-2,844 \left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^{1/4} \frac{z}{a}} [-0,7472 x - 4,275 x^3 + 6,022 x^5] \\ &+ 0,048 e^{-29,42 \left(\frac{\nu}{\nu a}\right)^{1/4} \frac{z}{a}} [20,34 x - 54,80 x^3 + 35,47 x^5] \end{aligned} \right\} \quad (19),$$

wobei die gleichen Potenzen von  $x$  aus den  $P$  zusammengefaßt sind.

Man erkennt nun auch, daß ein gewisser Fehler im dritten Eigenwert und in der dritten Eigenfunktion von geringer Bedeutung ist; selbst wenn der dritte Potenzexponent noch etwas kleiner werden sollte, klingt die dritte Eigenfunktion nach wenigen Zentimetern vom Beginn der thermischen Einwirkung ab, auf den ganzen übrigen Teil des Rohres ist der Fehler ohne Einfluß. Immerhin kann jederzeit eine vierte Näherung gerechnet werden.

**6. Diskussion des Ergebnisses und Vergleich mit Beobachtungen.** An Hand der Abb. 1 können wir die Temperaturverteilung über den Querschnitt diskutieren. Für  $z = 0$  haben wir rechteckige Verteilung angenommen, d. h. die Flüssigkeit soll mit einer über den ganzen Querschnitt gleichmäßigen Temperatur eintreten. In dem Intervall von  $\frac{y}{\tau}$  zwischen 0,8 und 0 ist dies durch unsere Entwicklung mit einem maximalen Fehler von  $\pm 2\frac{1}{2}$  pro Mille erfüllt. Von  $\frac{y}{\tau} = 0,9$  bis 1 haben wir einen scharfen Temperaturabfall, da wir ja nur 3 Glieder berücksichtigen. Aehnliche Verhältnisse werden auch in Wirklichkeit vorliegen, da die wandnahen Schichten schon durch

Strahlung vor der unmittelbaren Berührung mit der Wand eine Temperaturänderung erleiden werden. Beim weiteren Fortschreiten längs des Rohres flacht sich das Temperaturgefälle an der Wand immer mehr ab; bis auch die zweite Eigenfunktion abgeklungen ist, ist die sogenannte »Endtemperaturverteilung« erreicht, die durch die erste Eigenfunktion allein dargestellt wird. Von da ab bleiben sich alle Querschnitte ähnlich, indem alle Temperaturen nach derselben Exponentialfunktion in der  $z$ -Richtung abnehmen; in diesem Sinne ist der Ausdruck Endtemperaturverteilung zu verstehen. Wie Gl. (16) zeigt, unterscheidet sich die erste Eigenfunktion und somit die Endtemperaturverteilung nur wenig von der Geschwindigkeitsverteilung im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand.

Mit Hilfe des bekannten Temperaturfeldes sind wir jetzt in der Lage, alle Fragen über den Wärmeaustausch zu beantworten. Um z. B. die W.-Ue.-Zahl  $\alpha$  zu berechnen, bilden wir das Verhältnis der von der Flächeneinheit der Wand übergehenden Wärmemenge zur Mitteltemperatur des Querschnittes, d. h.

$$\alpha = \frac{q_0}{\vartheta_m} \quad (20).$$

Nach Gl. (9) ist  $q_0$  gegeben durch:

$$q_0 = \frac{0,176 v^{3/4} C v^{1/4}}{r^{3/28}} \lim_{y=0} \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial y} y^{3/2} \right],$$

während die Mitteltemperatur  $\vartheta_m$  durch die Gleichung definiert ist:

$$\vartheta_m = \frac{1}{r^2 \pi} \int_0^r \vartheta(y) 2\pi y dy.$$

Wir erhalten demnach für  $\alpha$  den Ausdruck:

$$\alpha = 0,0346 v C \left( \frac{v}{v d} \right)^{1/4} \frac{1,078 e^{-k_1 z} + 0,134 e^{-k_2 z} + 0,980 e^{-k_3 z}}{0,970 e^{-k_1 z} + 0,024 e^{-k_2 z} + 0,006 e^{-k_3 z}} \quad (21).$$

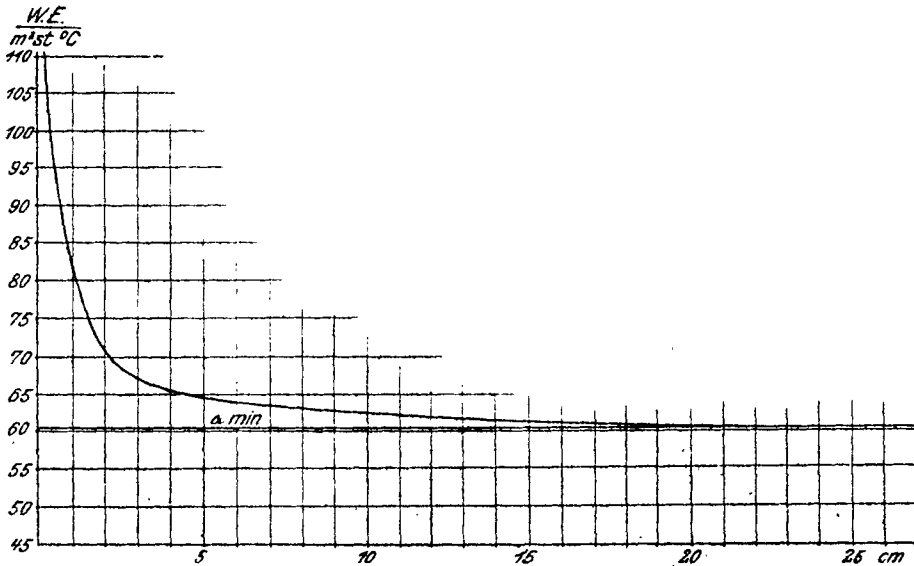


Abb. 2. Abhängigkeit der W.-Ue.-Zahl von der Rohrstelle bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung [ $c = 0,804 \text{ Cal/m}^2$ ,  $v = 18,3 \text{ m/sec}$ ,  $\nu = 0,175 \text{ cm}^2/\text{sec}$ ,  $d = 2,2 \text{ cm}$ ].

Das analoge Resultat für Laminarströmung hat Nusselt<sup>1)</sup> berechnet.

Die Abhängigkeit der W.-Ue.-Zahl  $\alpha$  von der Rohrstelle ist aus Abb. 2 zu ersehen, die für den speziellen Wert  $\frac{1}{d} \left( \frac{\nu}{v d} \right)^{1/4} = 0,037$  durchgerechnet ist.  $\alpha$  ist für  $z = 0$  unendlich, nimmt dann entsprechend der Verminderung des Temperaturabfalles an der Wand ab, und zwar bedeutend rascher als bei laminarer Strömung; es nähert sich

<sup>1)</sup> S. Föfn. 4, S. 268.



schließlich einem Minimalwert  $\alpha_{\min}$ . Während im laminaren Fall dieser Kleinstwert unabhängig von der Geschwindigkeit ist, geht bei turbulenter Strömung, Gl. (21) in die Form über:

$$\alpha_{\min} = 0,0384 \nu C \left( \frac{\nu}{\nu a} \right)^{1/4} \quad (21a)$$

Gl. (21a) ist mit der von Reynolds entwickelten Formel analog. Da, wie wir bereits erwähnt haben, im turbulenten Strom die molare Wärmeübertragung die molekulare um ein Vielfaches überwiegt, so erscheint es vollkommen berechtigt, daß in der Formel für die W.-Ue.-Zahl nur diejenigen Größen auftreten, die für den Strömungszustand und damit für den molaren Wärmetransport maßgebend sind. Dies sind aber  $\nu$ ,  $d$  und  $\nu$  bzw.  $C$ . Die Temperaturabhängigkeit liegt in den Werten der Zähigkeitszahl  $\nu$ . Berücksichtigt man für Gase die Relation  $\frac{\lambda \rho}{C \mu} \sim 1$ , so sieht man, daß Gl. (21a) mit den Dimensionsformeln von Nusselt<sup>1)</sup> und Prandtl<sup>2)</sup> ebenfalls der Form nach übereinstimmt.

Das vorhandene Versuchsmaterial reicht leider für eine exakte Prüfung dieser Ergebnisse nicht aus, da bei den Messungen stets mittlere Uebergangszahlen gemessen werden, wobei »Anlaufstrecken« und Heizungsstrecken nicht so lang gewählt sind, daß man in der Meßstrecke mit Sicherheit einen hydrodynamisch ausgebildeten Zustand mit ähnlich bleibendem Temperaturprofil erreicht hätte. In den meisten Fällen kann sogar gar nicht festgestellt werden, von welchem Punkte die thermische Einwirkung beginnt. Dies ist offenbar ein Zeichen dafür, daß die Experimentatoren sich über den Einfluß der Anordnung auf das Meßergebnis vielleicht kein klares Bild gemacht haben.

Nur Nusselt hat in einer kurzen Versuchsreihe<sup>2)</sup> einmal ein 2 m langes Rohrstück vor die eigentliche Versuchsstrecke vorgeschaltet. Nach den Berechnungen, die wir im nächsten Abschnitt kennen lernen werden, war der Strömungszustand damit sicher ausgebildet. Da überdies sowohl diese Anlaufstrecke wie das geheizte Versuchsrohr aus Messing bestanden und fest metallisch miteinander verbunden waren, so war die vorgeschaltete Rohrstrecke gleichfalls, zumindest in dem an das Versuchsrohr anschließenden Teil, mitgeheizt. Außerdem lag die erste Temperaturmeßstelle im Durchschnitt noch etwa 15 cm vom Anfang der geheizten Versuchsstrecke ab, so daß wir nach den Ergebnissen der Gl. (21) mit Sicherheit annehmen können, daß die W.-Ue.-Zahl ihren Minimalwert erreicht hatte. Ich habe diese Versuche nach der Formel für  $\alpha_{\min}$  nachgerechnet. Die Ergebnisse sind in nachstehender Tafel enthalten ( $p$  = Luftdruck,  $\gamma$  = spez. Gewicht der Luft):

Versuchs-Nr.	$\beta_m$	$l$	$\rho_m$	$\gamma_m$	$\nu$	$\alpha$ gemessen	$\alpha$ berechnet	Unterschied $\nu H$
95	39,0	0,6133	1,161	1,273	4,24	19,29	20,09	+ 4,14
96	37,8	0,6245	1,167	1,285	5,75	24,95	25,86	+ 1,64
97	34,3	0,6368	1,164	1,255	8,29	32,75	32,57	- 0,5
98	31,5	0,6438	1,163	1,307	13,06	46,8	47,44	+ 1,3
99	35,6	1,0590	1,164	1,291	21,06	65,3	67,51	+ 3,85
100	32,1	1,1300	1,167	1,309	24,05	73,0	75,25	+ 3,0

Versuch 95 mit der Reynoldsschen Zahl 6100 (etwa 3- bis 4fache kritische Geschwindigkeit) liegt hart an der Grenze des Gültigkeitsbereiches der oben entwickelten Theorie. In Anbetracht der Genauigkeitsgrenzen für derartige Messungen erscheint die Uebereinstimmung durchaus befriedigend.

In den nächsten Abschnitten wollen wir den Wärmeübergang in der Anlaufstrecke eines Rohres, d. h. bei hydrodynamisch unausgebildetem Zustand untersuchen: da für den Rohranfang eine Lösung für das Geschwindigkeitsfeld bisher nicht gegeben wurde, müssen wir dieses erst bestimmen.

**7. Das Geschwindigkeitsfeld in der Anlaufstrecke.** Um einen angenäherten Ausdruck für das Geschwindigkeitsfeld in der Anfangstrecke<sup>3)</sup> des Rohres bei turbulenter

<sup>1)</sup> a. a. O.

<sup>2)</sup> Forschungsarb. herausg. v. Ver. deutsch. Ing. B. 89, Zahlent. 6.

<sup>3)</sup> L. Schiller, der sich in neuester Zeit experimentell — eine theoretische Ergänzung ist gleichfalls angekündigt — mit dem Problem der Anlaufstrecke befaßt hat, behandelt nur den laminaren Fall. Vgl. z. B. Zeitschrift für Physik 3, 1920, 412.

Strömung zu gewinnen, wollen wir die von v. Kármán eingeführte Impulsbetrachtung<sup>1)</sup> anwenden.

Wir betrachten einen Längsschnitt durch den Rohranfang. Bei A soll die Flüssigkeit aus einem großen Behälter mit gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung einströmen.

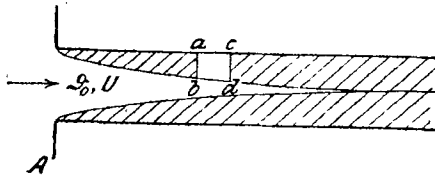


Abb. 3

Die wandnahen Schichten werden unter dem Einfluß der inneren Reibung verzögert werden und die Dicke der Schicht, in der die Schubspannung übertragen wird (in der Abbildung schraffiert gezeichnet) wird solange wachsen, bis die beiden »Grenzschichten«, wie wir sie kurz nennen wollen, zusammentreffen. Von da ab wird — unter Zwischenschaltung eines kurzen Uebergangsbereiches — die Geschwindigkeitsverteilung über

den Querschnitt konstant bleiben.

Wir nehmen also an, daß es im Rohranfang ein Gebiet im Innern der strömenden Flüssigkeit gibt, in dem die Reibung vernachlässigt werden kann. Für diesen Bereich setzen wir die Gültigkeit der Eulerschen Gleichung voraus, wie sie für eine reibungslose Flüssigkeit aufgestellt wird.

Wir nehmen den stationären Vorgang und betrachten das Gleichgewicht eines Elementes der Grenzschicht, das ringförmige Gestalt hat; abcd stellt in Abb. 3 einen Querschnitt dieses Elementes dar. Es bezeichne:

- Q = das durch den Querschnitt in der Grenzschicht sekundlich strömende Volumen,
- J = den sekundlichen Transport von Impuls der Stromrichtung durch die Querschnittsfläche,
- U = Geschwindigkeit der ungestörten Strömung,
- u = in der Grenzschicht,
- v = mittlere Geschwindigkeit über den Querschnitt,
- delta = Dicke der Grenzschicht, tau\_0 = Schubspannung an der Wand,
- p = den Druck, z = Koordinate in der Stromrichtung,
- y = Abstand von der Rohrwand.

Die Gleichgewichtsbedingung für das Element der Grenzschicht können wir dann folgendermaßen anschreiben:

$$\frac{dJ}{dz} - \rho U \frac{dQ}{dz} = - \frac{dp}{dz} (2r\delta - \delta^2)\pi - 2r\pi\tau_0 \dots \dots \dots (22).$$

Hierzu treten noch folgende Bedingungen: Infolge der Kontinuität muß durch alle Rohrquerschnitte dieselbe Flüssigkeitsmenge gehen. Wenn also die Schichten an der Wand verzögert werden, so muß die Geschwindigkeit der ungestörten Flüssigkeit (ungestört immer in dem Sinne, daß keine Schubspannung übertragen wird) zunehmen. Diese Zunahme an Geschwindigkeit wird dann nach der Bewegungsgleichung für ideale Flüssigkeit von einem Druckabfall begleitet. Dies liefert die weiteren Bedingungengleichungen:

$$Q + U(r - \delta)^2\pi = vr^2\pi \dots \dots \dots (23),$$

$$\frac{dp}{dz} + \rho U \frac{dU}{dz} = 0 \dots \dots \dots (24).$$

u setzen wir nach Gleichung (2a) in der Form an:

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{ \alpha + \beta \left(\frac{y}{\delta}\right) \right\} \dots \dots \dots (25)$$

und bestimmen die Koeffizienten alpha und beta aus den Forderungen

$$\begin{aligned} u &= 0 && \text{für } y = 0 \\ u &= U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 && \text{» } y = \delta. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \left\{ \frac{8}{7} - \frac{1}{7} \frac{y}{\delta} \right\} \dots \dots \dots (25a).$$

<sup>1)</sup> Dieses Heft S. 235 und 256.

$\tau_0$  ergibt sich aus der Bedingung, daß für kleine Werte von  $y$  (25a) in Gleichung (2) übergehen muß, zu:

$$\tau_0 = \rho \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4} U^{1/4} \left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/4} \dots \dots \dots (26).$$

Berücksichtigen wir die aus Gleichung (23) folgende Beziehung zwischen der Geschwindigkeit der ungestörten Strömung  $U$  und der mittleren Geschwindigkeit  $v$ :

$$U = \frac{165v}{4\xi^2 - 22\xi + 165} \dots \dots \dots (27),$$

wobei  $\frac{\delta}{r} = \xi$  gesetzt ist, so liefert die Gleichgewichtsbedingung eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\xi$ , in der sich die Variablen trennen lassen und man erhält:

$$\int_0^1 \frac{\left\{ \frac{64}{345} \xi^3 - \frac{100}{69} \xi^2 - \frac{206}{207} \xi + \frac{616}{69} \right\} \xi^{1/4}}{[4\xi^2 - 22\xi + 165]^{6/4}} d\xi = \frac{1}{165^{1/4}} \left(\frac{8}{7B}\right)^{7/4} \frac{\nu^{1/4}}{v^{1/4} r^{6/4}} z \dots \dots (28).$$

Statt die Quadraturen numerisch auszuführen, wenden wir folgenden Rechnungsgang an.

Für kleine Werte von  $\xi$  kann man die höheren Potenzen in  $\xi$  vernachlässigen und erhält:

$$\xi = z^{4/5}.$$

Setzt man  $z^{4/5} = t$ , so muß sich  $\xi$  als Potenzreihe in  $t$  darstellen lassen. Man kann also schreiben:

$$\xi = At + Bt^2 + Ct^3 + \dots \dots$$

Schreibt man (28) in der Form

$$\frac{(1 + \alpha\xi + \beta\xi^2 + \gamma\xi^3) \xi^{1/4}}{[1 + p\xi + q\xi^2]^{6/4}} d\xi = K dz$$

und führt die obigen Ausdrücke ein, so fallen die gebrochenen Potenzen von  $t$  fort und man erhält, indem man alles nach Potenzen von  $t$  entwickelt und die Koeffizienten links und rechts vergleicht als Verlauf der Grenzschichten im Rohranfang, wenn man mit dem dritten Gliede abbricht:

$$\xi = \frac{\delta}{r} = 1,41 \left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/5} \left(\frac{z}{d}\right)^{4/5} - 0,048 \left(\frac{\nu}{vd}\right)^{2/5} \left(\frac{z}{d}\right)^{6/5} + 0,168 \left(\frac{\nu}{vd}\right)^{3/5} \left(\frac{z}{d}\right)^{12/5} \dots \dots (29).$$

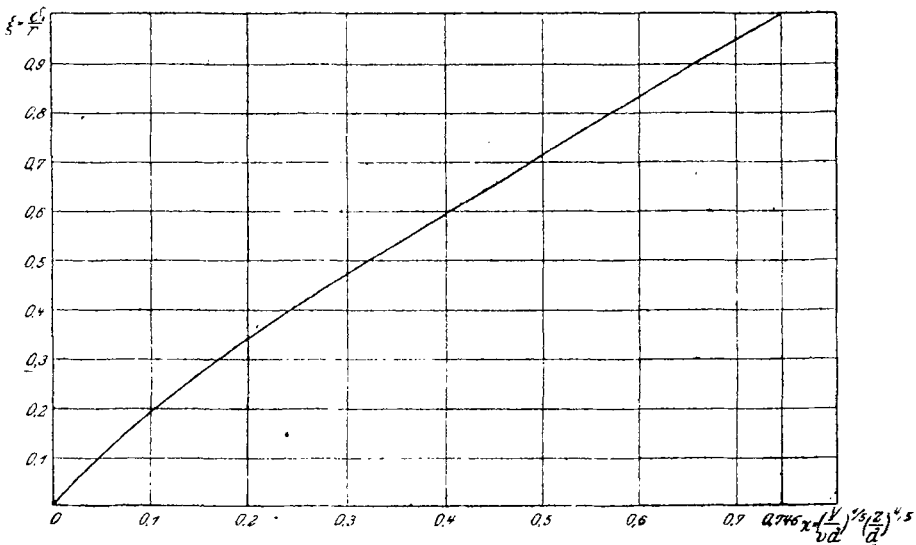


Abb. 4

$\xi$  als Funktion von  $\chi = \frac{r^{1/6}}{v^{1/6} a} z^{1/6}$  ist in Abb. 4 dargestellt. Für  $\chi = 0,746$  wird  $\xi = 1$ ; die Länge der Rohrstrecke bis zum Zusammenstoßen der Grenzschichten beträgt somit:

$$z_0 = 0,693 d \left( \frac{v d}{\nu} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (30).$$

Mit Gleichung (29) beherrschen wir das Feld der mittleren Geschwindigkeiten in der Anlaufstrecke und können alle Fragen, für welche die Kenntnis der Verteilung derselben genügt, beantworten. So erhalten wir z. B. den Rohrwiderstand zwischen zwei Querschnitten  $z_1$  und  $z_2$  der Anlaufstrecke, d. h. das Integral:

$$W = - 2 r \pi \int_{z_1}^{z_2} \tau_0(z) dz,$$

indem wir die Differenz der Impulstransporte durch die Querschnitte  $z_1$  und  $z_2$ , ferner die Druckdifferenz  $\times$  Querschnittsfläche berechnen und die beiden Beträge addieren.

**8. Der Wärmeübergang in der Anlaufstrecke.** Zur Berechnung des Temperaturfeldes wenden wir eine ähnliche Betrachtung an, indem wir die Wärmebilanz für ein Element der Grenzschicht aufstellen. Es soll wiederum eine warme Flüssigkeit in ein Rohr mit unveränderlicher Wandtemperatur  $\vartheta_w = 0$  einströmen. Wir machen nur die eine vereinfachende Annahme, daß dort, wo keine Schubspannung übertragen wird, auch kein Wärmetransport erfolgt, und vernachlässigen damit jenen geringen Betrag an Wärme, der an der inneren Begrenzung der Grenzschicht noch durch die gewöhnliche Wärmeleitung fortgeführt wird. An dieser Stelle ist jedoch der Temperaturgradient, da wir die Rechnung für überkritische Geschwindigkeit durchführen, so flach, daß der damit begangene Fehler ohne weiteres in Kauf genommen werden kann. Wir nehmen also an, daß im Gebiet, wo die ungestörte Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit  $U$  strömt, die Temperatur konstant gleich der Eintrittstemperatur  $\vartheta_0$  sei. Die Wärmebilanz für das betrachtete Element lautet dann:

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta u C \vartheta 2 \pi (r - y) dy = C \vartheta_0 \frac{dQ}{dz} - 2 r \pi q_0 \dots \dots \dots (31).$$

Da wir bereits für den Fall der hydrodynamisch ausgebildeten Strömung gesehen haben, daß bei Turbulenz die Temperaturverteilung der Geschwindigkeitsverteilung sehr ähnlich ist, so setzen wir  $\vartheta$  an:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/2} \left\{ \alpha + \beta \frac{y}{\delta} + \gamma \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (32).$$

Entsprechend unseren obigen Annahmen gelten dann die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \vartheta &= 0 \text{ für } y = 0 \\ \vartheta &= \vartheta_0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \text{ für } y = \delta, \end{aligned}$$

welche gestatten, die 3 Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  auf einen einzigen zurückzuführen. Wir erhalten so:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/2} \left\{ \left( \frac{8}{7} - \frac{1}{7} \frac{y}{\delta} \right) + \gamma \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (32a).$$

Der erste Term ist identisch mit der Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung, der zweite kann als eine Art Korrekturglied zur Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung aufgefaßt werden. Dies läßt sich auch physikalisch leicht verstehen. Denn für  $y = 0$  beginnen Temperatur- und Geschwindigkeitskurve mit derselben Potenz von  $y$ . Für  $y = \delta$  haben beide horizontale Tangente. Die Kurven müssen somit im Zwischengebiet ähnlichen Charakter haben.

Für  $q_0$  finden wir:

$$q_0 = \frac{1,349 r^{3/4} \nu^{1/4} C \vartheta_0 \left\{ \frac{8}{7} + \gamma \right\}}{\left[ 4 \xi^2 - 22 \xi + 165 \right]^{3/4} \xi^{1/4} d^{1/4}} \dots \dots \dots (32a).$$

Die Gleichung (31) wird nunmehr, da wir ja den Verlauf der Grenzschichtdicke  $\delta$  kennen, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von  $\gamma$  liefern, die sich auf die Form bringen läßt:

$$\frac{d\gamma}{dz} + A(z) \gamma = B(z).$$

Die Funktionen  $A$  und  $B$  werden jedoch sehr unhandlich, so daß das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung erster Ordnung, das bekanntlich lautet:

$$\gamma = Ke^{-\int A dz} + e^{-\int A dz} \int Be^{\int A dz} dz,$$

eine sehr mühsame numerische Berechnung erfordern würde. Wir wählen daher eine graphische Methode und sind hier in der Lage, eine weit größere Genauigkeit zu erzielen, als der physikalischen Voraussetzung der Aufgabe entspricht. Wir führen  $\frac{\delta}{r}$  gleich  $\xi$  als neue unabhängige Variable ein; dadurch wird die Gleichung wesentlich vereinfacht, die gebrochenen Potenzen von  $\xi$  fallen weg und man erhält nach einiger Rechnung:

$$\gamma = \frac{-0,1855 \xi^3 + 1,477 \xi^2 - 2,658 \xi}{0,1623 \xi^3 - 0,701 \xi^2 - 23,05 \xi + 45,4} - \frac{-0,269 \xi^4 + 2,890 \xi^3 - 16,10 \xi^2 + 37,59 \xi}{0,1623 \xi^3 - 0,701 \xi^2 - 23,05 \xi + 45,4} \gamma' \quad (33),$$

wobei  $\gamma' = \frac{d\gamma}{d\xi}$  gesetzt ist.

In dieser Form ist die Gleichung (33) unmittelbar zur Berechnung des Richtungsfeldes der Differentialgleichung geeignet, das dann in Abb. 5a wiedergegeben ist. Der Punkt  $\xi = 0, \gamma = 0$  ist ein Sattelpunkt; alle Lösungskurven kommen aus plus  $\infty$  oder minus  $\infty$ , bis auf eine einzige, die in den Punkt  $0,0$  hineinführt. Da  $\gamma$  für  $\xi = 0$  jedenfalls endlich sein muß, so gewinnen wir so die Anfangsbedingung

$$\gamma = 0 \text{ für } \xi = 0.$$

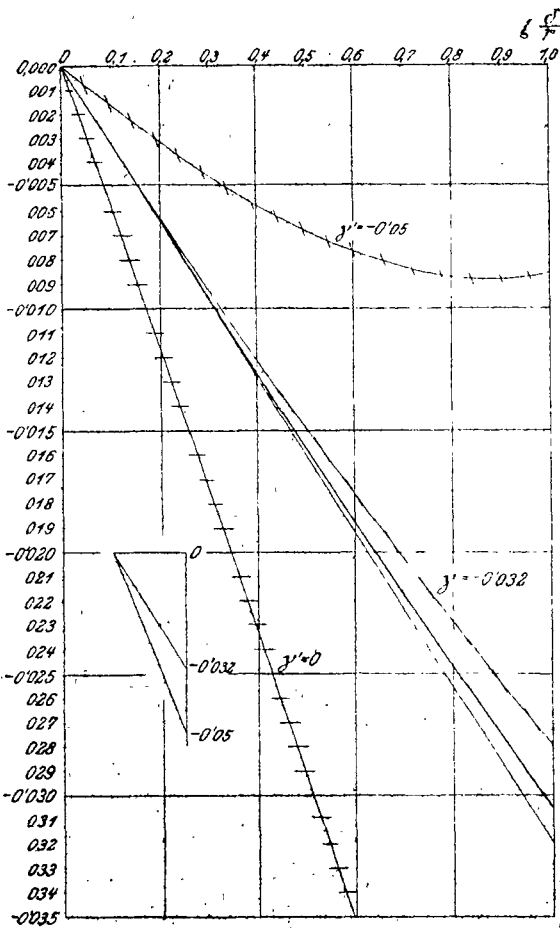


Abb. 5 A

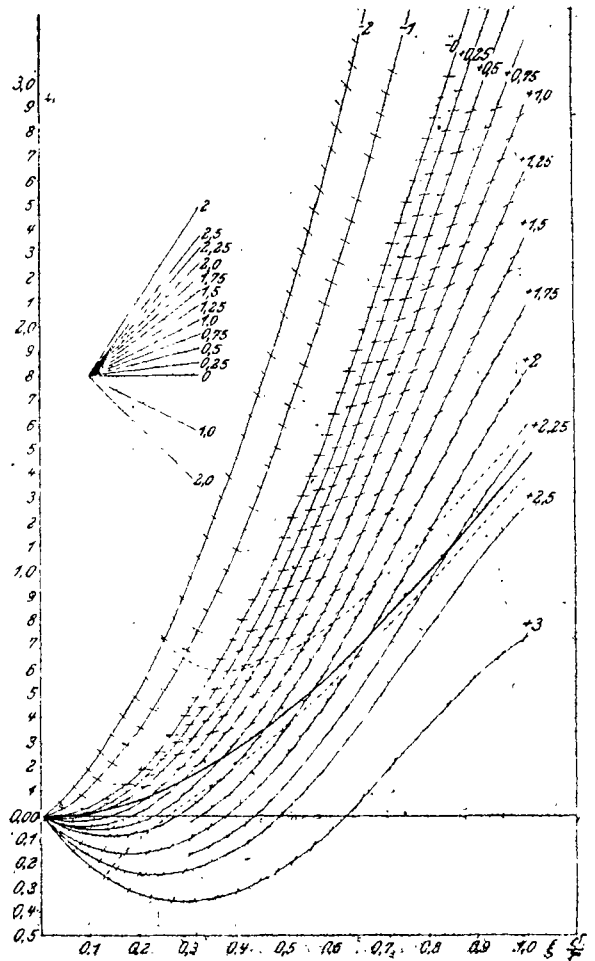


Abb. 5 B

Dies läßt sich auch physikalisch leicht verstehen. Der unmittelbare Rohranfang kann sich, solange  $\delta \leq r$  ist, weder in hydrodynamischer noch thermischer Beziehung von dem Verhalten einer Platte in freier Strömung unterscheiden. Wir werden aber später sehen, daß Geschwindigkeits- und Temperaturfeld im Falle der Platte gleich sind. Demnach muß im Rohranfang für  $z = 0$  die Temperaturverteilung in die Geschwindigkeitsverteilung übergehen.

Lösen wir (33) nach  $\gamma'$  auf und betrachten den Grenzwert, dem  $\gamma'$  für  $\xi = 0$  zustrebt, so finden wir:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \gamma' = -0,032.$$

Sämtliche Isoklinen entspringen im Punkt 0,0; die Isokline für  $\gamma' = 0,032$  läuft mit der ihr zugeordneten Neigung in diesen Punkt ein, im übrigen ist sie ganz schwach gegen die Abszissenachse konkav. Die Isoklinen stärkerer Neigung liegen gänzlich oberhalb von ihr, die schwächerer Neigung unterhalb. Aus diesem Verhalten folgt, daß die gesuchte Lösungskurve in ihrem ganzen Verlauf in dem schmalen Streifen zwischen der Isokline  $\gamma' = -0,032$  und der Tangente an diese im Nullpunkte liegen muß. Die Gerade  $\gamma = -0,032 \xi$  wird somit eine erste Näherung mit einem maximalen Fehler von  $12\frac{1}{2} \sqrt{H}$  darstellen.

Um eine zweite Näherung zu erhalten, setzen wir  $\gamma = -0,032 \xi + h(\xi)$  und führen diesen Ausdruck in (33) ein, die dann in eine Differentialgleichung für  $h$  übergeht, deren Isoklinenschar in Abb. 5b gezeichnet ist. Um die Genauigkeit zu steigern, ist 1000facher Ordinatenmaßstab gewählt.

Die Lösung beginnt naturgemäß mit  $h = 0$  für  $\xi = 0$ .

Setzen wir  $e = 1000h$ , so kann diese Größe, wie man sich durch Auftragen in logarithmischem Maßstab leicht überzeugt, durch die Formel  $e = 1,48 \xi^{1,865}$  wiedergegeben werden, so daß wir schließlich für  $\gamma$  den Ausdruck erhalten:

$$\gamma = -0,032 \xi + 0,00148 \xi^{1,865} \dots \dots \dots (34).$$

Diese Funktion ist durch die stark angezogene Linie in Abb. 5a wiedergegeben.

Damit haben wir auch für den Bereich des hydrodynamisch unausgebildeten Zustandes das Temperaturfeld aufgestellt. Wir schreiben für  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2} \left\{ \frac{8}{7} - \frac{1}{7} \frac{y}{\delta} - \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 [0,00148 \xi^{1,865} - 0,032 \xi] \right\} \dots \dots (35).$$

Die Werte von  $\delta$  bzw.  $\xi$  sind aus Gl. (29) oder aus Abb. 4 zu entnehmen. Für  $\xi = 1$  wird  $\vartheta$  gleich

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{r}\right)^{1/2} \left\{ 1,112 - 0,0819 \frac{y}{r} - 0,0305 \left(\frac{y}{r}\right)^2 \right\} \dots \dots (35a),$$

d. h., die Endverteilung der Temperatur bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand ist noch nicht ganz erreicht (Abb. 6), was wohl auch zu erwarten war.

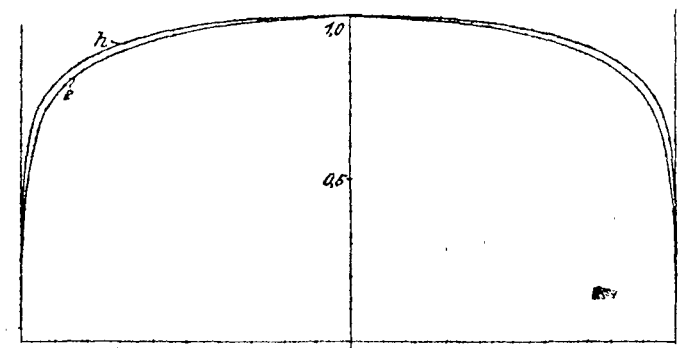


Abb. 6. Endtemperaturverteilung bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand (e) und Verteilung im Endquerschnitt der Anlaufstrecke (h).

Um den weiteren Anschluß zu bekommen, bestimmen wir jene Lösung der Differentialgleichung für das Temperaturfeld bei hydrodynamisch ausgebildetem Zustand, die der Anfangsbedingung (35a) genügt. Zu diesem Zwecke haben wir die durch Gl. (35a) dargestellte Funktion nach den Eigenfunktionen (16) zu entwickeln. Da sich die Temperaturverteilung der Gl. (35a) nicht sehr von der ersten Eigenfunktion, Gl. (16), unterscheidet, so setzen wir die Entwicklung mit nur zwei Gliedern an.

Die Entwicklung kann die Funktion (35a) naturgemäß nicht vollkommen exakt darstellen, schon deshalb, weil wir die Geschwindigkeitsverteilung das eine Mal mit der Einflußzahl, das andere Mal mit einer Potenzreihenentwicklung angesetzt haben. Um aber einen möglichst guten Uebergang von der einen Lösung zur anderen zu erzielen,

können wir es so einrichten, daß die beiden Temperaturkurven gerade in den uns wichtigen Eigenschaften völlig übereinstimmen.

Der Wärmeübergang ist durch die Vorgänge an der Wand bedingt; wir werden demnach

1. festsetzen, daß beide Kurven mit demselben ersten Entwicklungsglied an der Rohrwand beginnen und
2. die Energieströme durch den Gesamtquerschnitt gleichsetzen.

Dies liefert zwei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der beiden Koeffizienten der Entwicklung.

Man erhält so als Fortsetzung für das Temperaturfeld im hydrodynamisch ausgebildeten Bereich

$$\vartheta = \vartheta_0 \left\{ 1,016 e^{-k_1 z} [0,9544 x - 0,0212 x^2 + 0,0668 x^3] - 0,051 e^{-k_2 z} [-0,7472 x - 4,276 x^2 + 6,022 x^3] \right\} \quad (36).$$

Die Kenntnis des Temperaturfeldes soll zunächst wieder zur Berechnung der W.-Ue.-Zahl benutzt werden. Wir berücksichtigen zunächst die Anlaufstrecke.

$q_0$  haben wir in Gl. (3 b) bereits ausgedrückt. Die Mitteltemperatur des Querschnittes folgt zu:

$$\vartheta_m = \frac{1}{r^2 \pi} \left\{ \int_0^z \vartheta \cdot 2 \pi (r - y) dy + \vartheta_0 \int_z^r 2 \pi (r - y) dy \right\}.$$

Es ergibt sich somit für  $\alpha_u$  der Ausdruck ( $\alpha_u = \alpha$  im hydr. unangeb. Bereich):

$$\alpha_u = 1,340 v C \left( \frac{v}{vd} \right)^{1/4} \times \frac{1,143 - 0,032 \xi + 0,00148 \xi^{1,865}}{(4 \xi^2 - 22 \xi + 165)^{3/4} \xi^{1/4} \{ 1 - 0,183 \xi + 0,024 \xi^2 + (0,00148 \xi^{1,865} - 0,082 \xi) (0,520 \xi - 0,1484 \xi^2) \}} \quad (37 a).$$

Die Fortsetzung im zweiten Bereich lautet ( $\alpha_u = \alpha$  im hydr. ausgeb. Bereich)

$$\alpha_u = 0,03461 v C \left( \frac{v}{vd} \right)^{1/4} \frac{0,969 e^{-k_1 z} + 0,038 e^{-k_2 z}}{0,873 e^{-k_1 z} + 0,0068 e^{-k_2 z}} \quad (37 b).$$

Die Abhängigkeit der W.-Ue.-Zahl von der Rohrstelle in der Anlaufstrecke ist in der Abb. 7 a wiedergegeben. Schreibt man (37 a) in der Form

$$\alpha_u = K v C \left( \frac{v}{vd} \right)^{1/4} \text{ WE/Std. m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

so ist als Ordinate der Faktor  $K$ , der eine reine Funktion von  $\xi$  ist, über  $\xi$  als Abszisse aufgetragen. Damit umfaßt Abb. 7 A in Verbindung mit Abb. 4, der die jeweiligen Werte

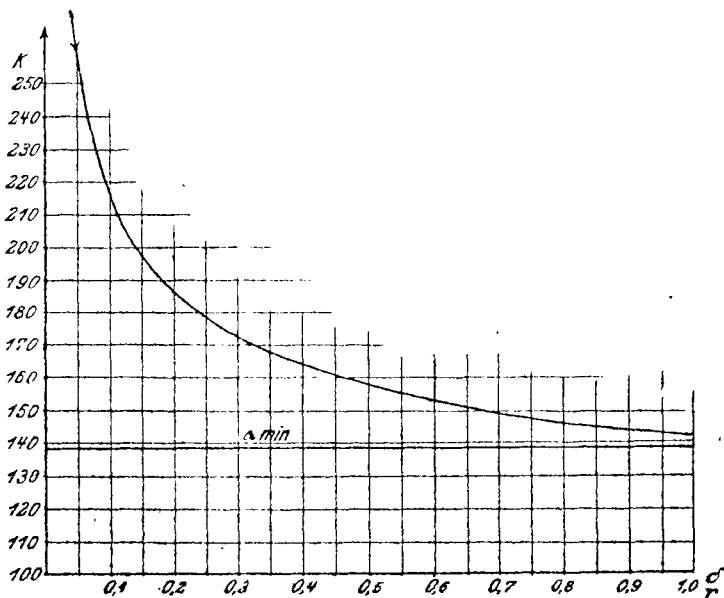


Abb. 7 A

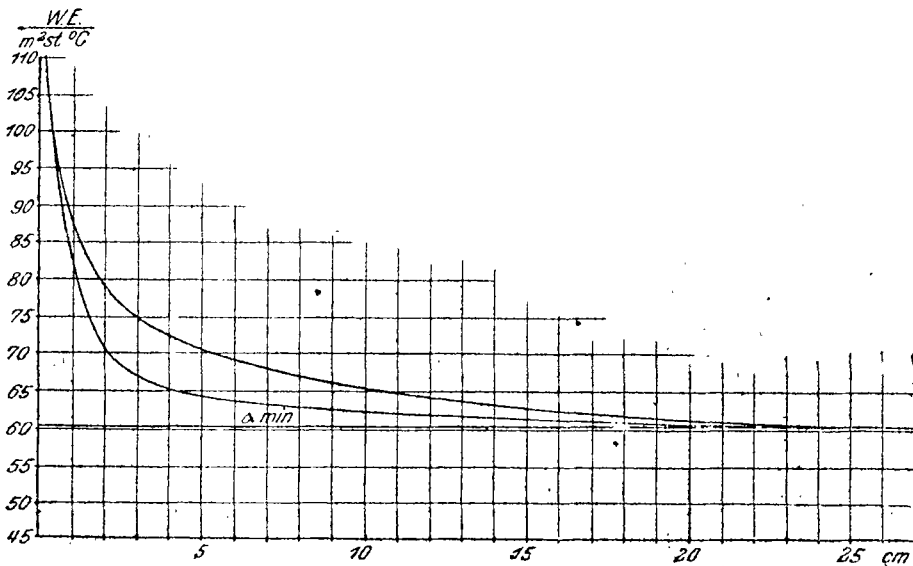


Abb. 7 B

von  $\xi$  entnommen werden können, alle möglichen Fälle. In Abb. 7 B ist die Abhängigkeit für einen bestimmten Fall nochmals mit dem Abszissenmaßstab  $z$  im Vergleich mit demselben Fall bei hydrodynamisch ausgebildeter Strömung eingezeichnet. Man sieht, daß der Abfall von  $\alpha$  in dem ersten Falle wesentlich weniger rasch erfolgt.

**9. Zusammenfassung und Vergleich mit Beobachtungen.** Nunmehr sind wir in der Lage, den Wärmeübergang im Rohr in allen Einzelheiten zu überblicken. Wir wollen die Ergebnisse kurz zusammenfassen:

Für den Wärmeübergang sind entsprechend der Gestalt des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes folgende Fälle zu unterscheiden, in denen der Wärmeübergang verschiedenen Gesetzmäßigkeiten gehorcht.

1. Hydrodynamisch und thermisch ausgebildeter Zustand. Dieser ist erreicht, wenn die Flüssigkeit bereits ein entsprechendes Stück der Rohrstrecke durchlaufen hat. Die W.-Ue.-Zahl ist konstant und durch Gl. (21 a) gegeben.

2. Hydrodynamisch ausgebildete Strömung, thermischer Anfangszustand. Realisierung durch eine vorgeschaltete Anlaufstrecke, die durch entsprechende Heizung auf der ursprünglichen Flüssigkeitstemperatur gehalten wird. Die W.-Ue.-Zahl ist von der Stelle im Rohr abhängig, fällt von einem Höchstwert sehr rasch ab und nähert sich asymptotisch ihrem konstanten Minimalwert, Gl. 21.

3. Der hydrodynamische Anfang, d. h. die Einströmung der Flüssigkeit in das Rohr, fällt mit dem Beginn der thermischen Einwirkung zusammen. Die W.-Ue.-Zahl ist gleichfalls von der Stelle im Rohr abhängig, fällt jedoch langsamer auf ihren Minimalwert ab. Die W.-Ue.-Zahl wird durch Gl. (37 a, b) dargestellt.

4. Der Beginn der thermischen Einwirkung fällt irgendwo mitten in die Anlaufstrecke.

Für diesen letzteren Fall erhalten wir eine gute Näherung für die W.-Ue.-Zahl  $\alpha$ , indem wir die Kurven, welche die Abhängigkeit von  $\alpha$  von der Rohrstelle für Fall 2 und 3 darstellen, in dasselbe Koordinatensystem einzeichnen, den Nullpunkt des Abszissenmaßstabes für  $\alpha_a$  (hydrodyn. ausgebild. Str.) jedoch um die Strecke  $l$  verschieben, um welche der Beginn der thermischen Einwirkung von der Einströmöffnung abliegt. Die Kurve für  $\alpha_a$  wird, da sie steiler abfällt, die Kurve  $\alpha_a$  schneiden; die Einhüllende stellt in erster Annäherung die  $\alpha$ -Verteilung für diesen speziellen Fall dar.

Die großen Differenzen in den Ergebnissen der einzelnen experimentellen Arbeiten sind nunmehr ohne weiteres verständlich. Während Nusselt diese am Schlusse seiner Arbeit über den Wärmeübergang bei laminarer Strömung ausschließlich auf den oben unter Punkt 2 angeführten Umstand zurückführt, sehen wir jetzt eine Reihe von Faktoren, die in wechselseitiger Kombination den Vorgang beeinflussen.



Die beiden sorgfältigsten Untersuchungen, die wir kennen, diejenigen von Nusselt<sup>1)</sup> und Jordan<sup>2)</sup>, haben rechtwinklige Zuströmung der Gase in die Meßstrecke angewendet. Im Anfang derselben bestand daher bestimmt kein hydrodynamisch ausgebildeter Zustand. Wir haben es offenbar mit Fall 4 zu tun. Zahlenmäßige Angaben lassen sich jedoch heute nicht mehr darüber machen. Sowohl der Beginn der thermischen Einwirkung wie selbst die genaue Lage der ersten Temperaturmeßstelle sind nicht mehr genau festzustellen<sup>3)</sup>. Eine exakte Auswertung der Versuchsergebnisse auf Grund der obigen Theorie ist daher für diese Versuche nicht möglich. Ich habe trotzdem eine Reihe von Versuchen von Nusselt daraufhin untersucht, wie weit die gemessenen W.-Ue.-Zahlen über dem Minimal  $\alpha$  liegen. Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt. Berücksichtigt man die Abmessungen der Nusseltschen Apparatur, so sieht man, daß diese Zahlen sich durchaus mit dem decken, was nach den oben entwickelten Ergebnissen zu erwarten ist.

Zahlentafel 2.

Versuch Nr.	$l$	$p_m$	$\rho_m$	$\gamma_m$	$v$	$\alpha$ gem.	$\alpha_{min}$	Unterschied vH
7	0,5906	1,153	43,7	1,245	8,52	35,7	33,43	6,4
10	0,5983	1,152	35,3	1,278	18,33	65,5	60,4	8,4
13	0,5880	1,171	31,6	1,315	27,2	91,7	82,6	11,0
19	0,7870	2,050	69,0	2,050	8,94	57,3	50,9	12,5
24	0,6022	1,888	30,4	2,122	29,94	146,6	127,2	15,3
30	0,6178	3,96	31,9	4,45	10,87	124,8	103,8	20,0
41	0,5988	6,97	29,2	7,91	9,27	162,9	141,6	15,1
54	0,5863	9,98	26,0	11,41	10,04	233,0	198,0	17,7

Werten wir z. B. Versuch 10 unter der Annahme aus, daß wir es mit dem Fall 3 zu tun haben, der den Versuchsbedingungen jedenfalls nahe kommt, so bekommen wir einen Wert für  $\alpha$ , der 10,2 vH über dem  $\alpha_{min}$  liegt. In Wirklichkeit war die hydrodynamische Bedingung gleichmäßiger Geschwindigkeitsverteilung bei der ersten Temperaturmeßstelle nicht vollständig erfüllt, so daß der  $\alpha$  Wert etwas niedriger ausfallen muß; der gemessene Wert liegt 8,4 vH über  $\alpha_{min}$ .

Nach Formel (29) ist die Länge der Anlaufstrecke proportional  $\sqrt[4]{v\varrho}$ , mit zunehmender Geschwindigkeit und Dichte muß demnach der Anteil der Anlaufstrecke an der gesamten Länge der Meßstrecke wachsen und demgemäß müssen auch die Werte von  $\alpha$  etwas zunehmen. Dies zeigen deutlich die Versuche 7, 10, 13, bei denen unter befriedigender Konstanthaltung der anderen Parameter die Geschwindigkeit variiert, sowie die Versuche 7, 19, 41, 54, in denen der Wert von  $\varrho$  bis zum Verhältnis 1:10 verändert wurde.

**10. Die praktische Berechnung der übergehenden Wärmemenge.** Anschließend wollen wir noch die Frage der praktischen Berechnung des Wärmeüberganges in Rohren besprechen. Zufolge der Tatsache, daß wir zwei verschiedene Lösungen für das Temperaturfeld bekommen haben, je nachdem ob der hydrodynamische Zustand ausgebildet ist oder nicht, muß man auch bei der Berechnung der auf einer bestimmten Rohrstrecke übergehenden Wärmemenge unterscheiden, in welchem Bereich man sich befindet. Wir wollen jedoch einige allgemeine Bemerkungen, die für beide Bereiche gelten, vorausschicken.

Die zwischen zwei Querschnitten im Abstände  $l = z_1 - z_2$  übergehende Wärme kann immer auf zwei Arten gefunden werden:

1. Man bezieht die Rechnung auf das durch den Querschnitt in der Zeiteinheit hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen. Da wir Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung kennen, so können wir den Wärmestrom, der pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche

<sup>1)</sup> S. Fußn. 4, S. 268.

<sup>2)</sup> H. P. Jordan, On the rate of heat transmission between fluids and metal surfaces. Proc. Inst. of Mech. Eng. 1909, Parts 3 bis 4.

<sup>3)</sup> Diese Angaben stützen sich auf eine Zuschrift, die Hr. Prof. Nusselt mir freundlichst übermittelt hat.

geht, durch eine Quadratur angeben. Die auf einer Wandstrecke von der Länge  $l$  zwischen  $z_1$  und  $z_2$  übergehende Wärme ist somit durch die Differenz der beiden Integrale:

$$Q = C \int u(y, z_1) \vartheta(y, z_1) df - C \int u(y, z_2) \vartheta(y, z_2) df \dots (38)$$

gegeben.  $df$  ist das Flächenelement im Querschnitt, bei dessen Bildung nur zuachten ist, von wo  $y$  gezählt ist.

2. Man betrachtet nur den Vorgang an der Wand. Zu diesem Zweck haben wir die Gleichungen für  $q_0$  aufgestellt. Die übergehende Wärmemenge schreibt sich dann mit den obigen Bezeichnungen:

$$Q = 2r\pi \int_{z_1}^{z_2} q_0(z) dz \dots (39),$$

für  $\vartheta_c$  in  $q_0$  ist die Differenz der Wandtemperatur von der Temperatur in der Rohrachse im Querschnitt  $z_1$  einzusetzen.

Die Ausdrücke für  $q_0$  sind aber ziemlich unhandlich, so daß man meist die Gleichung (38) vorziehen wird. Als Beispiel wollen wir Gl. (38) für die praktisch wichtigsten Fälle ausführen.

1a. Der Wärmeübergang auf der ganzen Anlaufstrecke ist, da im Anfangsquerschnitt sowohl gleichmäßige Temperatur als Geschwindigkeitsverteilung herrscht, gleich:

$$Q = 0,115 r^2 \pi v C \vartheta_0 \dots (40).$$

Der Wert ist konstant, da ja die Temperatur- und Geschwindigkeitsverteilung für Anfangs- und Endquerschnitt festliegen. Die speziellen Fälle unterscheiden sich durch die Länge der Rohrstrecke von der Einströmöffnung bis zur Ausbildung des hydrodynamischen Endzustandes.

1b. Betrachten wir eine Rohrstrecke von der Einströmung bis zu einem Querschnitt im Abstände  $L$  und sei  $l$  die Länge der Anlaufstrecke, dann ist (unter Benutzung von Gl. (36)) die gesamte auf der Länge  $L$  übergehende Wärme gleich

$$Q = r^2 \pi v C \vartheta_0 \{ 1 - 0,886 e^{-k_1 l} - 0,0037 e^{-k_2 l} \} \dots (40a),$$

wobei  $l_1 = L - l$  gesetzt ist.

2) Im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand beträgt die vom Beginn der thermischen Einwirkung ( $z = 0$ ) bis zu einem Querschnitt  $z$  im Abstände  $l$  davon übergehende Wärmemenge:

$$Q = r^2 \pi v C \vartheta_0 \{ 1 - 0,985 e^{-k_1 l} - 0,013 e^{-k_2 l} - 0,0022 e^{-k_3 l} \} \dots (41).$$

**11. Abschätzung der Eigenerwärmung der Flüssigkeit durch die Reibung.**

In unseren bisherigen Ausführungen haben wir die Wärmeerzeugung im Flüssigkeitsinnern durch die Vorgänge der Reibung durchwegs außer acht gelassen. Eine genaue Berücksichtigung derselben ist uns auch nicht möglich, solange wir die zusätzlichen Pulsationsgeschwindigkeiten nicht im einzelnen kennen, insbesondere genügt hierfür die Kenntnis der Verteilung der (zeitlich) mittleren Geschwindigkeit nicht, da die Dissipationsfunktion die Pulsationsgeschwindigkeit in quadratischen Termen enthält. Wir wollen dennoch versuchen, uns durch eine Näherungsbetrachtung darüber Rechenschaft zu geben, in welchen Geschwindigkeitsbereichen die oben erwähnte Vernachlässigung gestattet ist. Wir beschränken uns dabei auf die Vorgänge bei hydrodynamisch und thermisch ausgebildetem Zustand, d. h. die W.-Ue.-Zahl soll von der Rohrstelle unabhängig sein.

Wir nehmen beispielsweise an, daß eine kalte Flüssigkeit durch ein geheiztes Rohr fließt und betrachten wieder ein Volumelement, das durch das Rohr und zwei Querschnitte im Abstände  $dz$  begrenzt ist. Die konstante Wandtemperatur sei  $\vartheta_w$ , die Mitteltemperatur des Querschnittes an der Stelle  $z$   $\vartheta(z)$ , die Differenz von Wand- und Mitteltemperatur im Anfangsquerschnitt werde mit  $\vartheta_0$  bezeichnet. Alsdann lautet die Wärmebilanz für das Element:

$$r^2 \pi v C d\vartheta = \alpha (\vartheta_w - \vartheta) 2r \pi dz + T \zeta v^2 2r \pi dz \dots (42),$$

wobei  $T$  das thermische Arbeitsäquivalent,  $\zeta$  den auf das Quadrat der Geschwindigkeit bezogenen Koeffizienten des Reibungswiderstandes bedeuten soll. Wir schreiben (42) in der Form:

$$\frac{d\vartheta}{dz} + \frac{2\alpha}{rvC} \vartheta = \frac{2\alpha}{rvC} \left( \vartheta_w + T \frac{\zeta}{\alpha} v^2 \right).$$

Das Glied  $T \frac{\zeta}{\alpha} v^3$  hat die Dimension einer Temperatur. Wir wollen  $T \frac{\zeta}{\alpha} v^3$  die Reibungstemperatur nennen und mit  $\vartheta_R$  bezeichnen.

Beachtet man die Anfangsbedingung für  $z = 0$ , so lautet die Lösung der Diff.-Gl. (42):

$$\vartheta(z) = (\vartheta_w + \vartheta_R) - e^{-\frac{2\alpha}{rvC}z} [\vartheta_0 + \vartheta_R] \dots \dots \dots (43).$$

Die Temperatur der Flüssigkeit ist also proportional der Wandtemperatur vermehrt um die Reibungstemperatur.

Tragen wir diese Beziehung in ein Koordinatensystem mit  $\vartheta$  als Ordinate und  $z$  als Abszisse ein, so gelangen wir zu dem anschaulichen Ergebnis der Abb. 8, die für den Fall strömender Luft bei

$$v = 200 \text{ m/s}, \quad r = 0,025 \text{ m}, \quad p = 1 \text{ at},$$

$$C = 0,282 \text{ WE/m}^3, \quad r = 0,175 \text{ cm}^2/\text{s}$$

gezeichnet ist.

Die Flüssigkeitstemperatur nähert sich asymptotisch einer Grenze, die um die Reibungstemperatur höher liegt als die Wandtemperatur. Da die übergegangene Wärmemenge der (in der Abb. schraffierten) Fläche zwischen der Geraden  $\vartheta_w = \text{konst.}$  und der Kurve der Flüssigkeitstemperatur proportional ist, so sieht man, daß zwischen der Länge der Rohrstrecke und der Strömungsgeschwindigkeit eine Beziehung besteht, derart, daß zu einer vorgegebenen Länge eine bestimmte Geschwindigkeit und zu einer vorgegebenen Geschwindigkeit eine bestimmte Rohrlänge existiert, bei der das Maximum an Wärme übergeht.

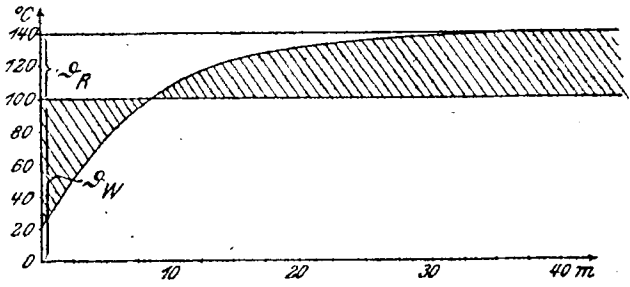


Abb. 8

Der Faktor  $\frac{\zeta}{\alpha}$  ergibt sich zu:

$$\frac{\zeta}{\alpha} = 0,103 \frac{1}{rc}$$

ist also, wenn wir von der geringen Veränderlichkeit der spez. Wärme mit der Temperatur absehen, im wesentlichen eine reine Geschwindigkeitsfunktion. Für Luft und  $c = 0,238 \text{ WE/kg}$  habe ich  $\vartheta_R$  für einige Geschwindigkeiten berechnet und in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt:

$v =$	10,	25,	50,	100,	150,	200 m/s.
$\vartheta_R =$	0,102,	0,634,	2,54,	10,15,	22,80,	40,6° C.

Man sieht, daß die Vernachlässigung in den meisten praktischen Fällen ohne weiteres erlaubt ist.

Die abgeführte Wärme erhält man durch Einsetzen von (43) in die Gleichung:

$$dQ = \alpha 2r \pi dz (\vartheta_w - \vartheta_s)$$

und Integration zwischen  $z_1 = 0$  und  $z_2 = l$  zu

$$Q = \vartheta_0 r^2 \pi v C \left(1 - e^{-\frac{2\alpha l}{rvC}}\right) - \frac{1}{2} \vartheta_R r^2 \pi v C \left(\frac{2\alpha l}{rvC}\right)^2 \dots \dots \dots (44),$$

wobei höhere Potenzen von  $\frac{2\alpha l}{rvC}$  vernachlässigt sind.

**12. Der Wärmeübergang an einer ebenen Platte.** Als zweite geometrische Konfiguration, für die wir den Wärmeübergang berechnen wollen, wählen wir eine ebene zur Stromrichtung parallele Platte. Diese soll so dünn sein, daß der Einfluß der Vorderkante vernachlässigt werden kann. Prandtl hat bereits in der oben erwähnten Arbeit nachgewiesen, daß für den Fall einer unendlich dünnen Platte, die parallel zu sich selbst durch eine Flüssigkeit bewegt wird, Geschwindigkeitsfeld und Temperaturfeld übereinstimmen, wenn man wieder von der Eigenerwärmung durch innere Reibung absieht.

Bezeichnet nämlich  $u$  den Geschwindigkeitsvektor,  $p$  den Druck, so gilt für die zeitliche Aenderung des auf die Volumeinheit bezogenen Impulsvektors einer inkompressiblen Flüssigkeit, wenn man Schwerkraftwirkungen vernachlässigt:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{ds} &= -\text{grad } p + \mu \Delta u, \\ D &= \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45),$$

andererseits schreibt sich die Kirchhoffsche Differentialgleichung für das Temperaturfeld:

$$\frac{D\vartheta}{dt} = \frac{\lambda}{c\rho} \Delta \vartheta \dots \dots \dots (46).$$

Für die Platte ist nun  $p = \text{konst}$ , falls sie unendlich dünn ist, oder bei endlicher Dicke doch der Mittelwert von  $p$  über einen gewissen Bereich konstant; somit wird  $\text{grad } p = 0$  und man sieht, daß die beiden Gleichungen (45) und (46) formal übereinstimmen. Wenn  $\frac{\lambda}{c\rho} = 1$  ist, wird demnach eine Lösung von (45) auch eine Lösung für (46) sein. Von diesem Umstande machen wir Gebrauch, in dem wir die Lösung für das Geschwindigkeitsfeld, wie sie v. Kármán in der vorangehenden Arbeit gegeben hat, übernehmen. Wir haben also:

$$u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2}, \quad \delta = 0,366 \left(\frac{\nu}{Uz}\right)^{1/6} z \dots \dots \dots (47)$$

und dementsprechend:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2}.$$

Die Bedingung für das Wärmegleichgewicht in einem Element der Grenzschicht lautet:

$$\frac{d}{dz} \int_0^\delta U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2} C \vartheta_0 \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2} dy - C \vartheta_0 \frac{d}{dz} \int_0^\delta U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2} dy + q_0 = 0.$$

Führen wir die Ausdrücke (47) ein, so können wir nach  $q_0$  auflösen und erhalten:

$$q_0 = 0,0285 \vartheta_0 C U \left(\frac{\nu}{Uz}\right)^{1/6} \dots \dots \dots (48).$$

Die gesamte von einem Platten-Streifen der Breite 1 abgeführte Wärmemenge folgt dann gleich:

$$Q = \int_0^l q_0 dz = 0,0356 C U \vartheta_0 l \left(\frac{\nu}{Ul}\right)^{1/6} \dots \dots \dots (46)$$

( $l$  = Länge in der Stromrichtung).

**13. Uebertragung auf tropfbare Flüssigkeiten.** Im Voranstehenden haben wir gesehen, daß die Gesetzmäßigkeiten, die wir für den Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeitsstrom, für die beiden wichtigsten geometrischen Grundformen abgeleitet haben, im Falle strömender Gase (und überhitzter Dämpfe) zu Ergebnissen führen, die auch quantitativ mit der Erfahrung gut übereinstimmen. Wir können uns hier vollkommen der statistischen Anschauungen der kinetischen Gastheorie bedienen und kommen so zu der einheitlichen Auffassung sowohl der molekularen wie molaren Vorgänge bei der Reibung einerseits und der Wärmeübertragung anderseits.

Auf tropfbare Flüssigkeiten, bei denen man die Wirkung der molekularen Kohäsionskräfte nicht mehr vernachlässigen darf, kann man naturgemäß die obigen einfachen Ansätze nicht unmittelbar übertragen. Während die Wärme und Impulskonvektion durch das Wirbelsystem auch hier einen wesensgleichen Vorgang darstellen, ist dies für die molekulare Wärme und Impulseitung nicht mehr der Fall. Die letztere Tatsache findet ihren Ausdruck darin, daß das Verhältnis  $\frac{\lambda\rho}{c\mu}$  von 1 stark verschieden ist. Für Wasser liegt die Größenordnung dieser Zahl, die stark von der Temperatur abhängig ist, etwa bei 0,1.

Das gemeinsame Gesetz für die molekularen und molaren Erscheinungen der inneren Reibung, das durch den Turbulenzkoeffizienten dargestellt wird, wird demnach auf die Wärmeausbreitung nur in jenem Gebiet übertragen werden können, in dem die

molaren Vorgänge überwiegen. Es ist dies aber, bis auf eine ganz dünne Schicht<sup>1)</sup> an der Wand das ganze Innere der Flüssigkeitsmasse, in welchem demnach die oben abgeleiteten Differential-Gleichungen ihre Gültigkeit behalten werden.

Um zu einer geeigneten Beschreibung des Wärmeüberganges für Flüssigkeiten zu gelangen, wird man somit einen Uebergang von dem statistischen Gesetz für das Innere der Flüssigkeitsmasse (Turbulenzkoeffizient) zu dem molekularen Gesetz in unmittelbarer Wandnähe (Wärmeleitzahl) suchen müssen. Mathematisch läßt sich dieser Uebergang durch eine Abänderung der Randbedingungen fassen. Auf diese Erweiterung der Theorie soll demnächst näher eingegangen werden. Immerhin ist aber zu bemerken, daß auch die bisherigen experimentellen Forschungsergebnisse, die sich ausschließlich auf den Wärmeübergang an Wasser beziehen, derart voneinander abweichende Resultate zeigen, daß ein einigermaßen klares Bild des Vorganges nur schwer gewonnen werden kann.

Mit erheblichem Aufwand hat Soennecken 1911 Versuche über den Wärmeübergang an Wasser in Röhren unternommen, die in der heutigen Literatur vielfach als maßgebend zitiert werden. Seine Ergebnisse faßt er in den beiden Formeln für die W.-Ue.-Zahl  $\alpha$  zusammen:

1. glatte Oberfläche

$$\alpha = 2020 \frac{v^{0,9}}{d^{0,1}} (1 + 0,014 T_i) \text{ WE/st m}^2 \text{ } ^\circ\text{C},$$

2. raue Oberfläche

$$\alpha = 735 \frac{v^{0,7}}{d^{0,3}} (1 + 0,014 T_i) \text{ WE/st m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

( $v$  = Wassergeschwindigkeit in m/s,  $d$  = Rohrdurchmesser in m,  $T_i$  = innere Rohrwandtemperatur in  $^\circ\text{C}$ ). Unter glatter Oberfläche wird dabei ein nahtlos gezogenes Messingrohr verstanden, während die Versuche mit »rauer« Oberfläche mit Eisenrohren durchgeführt wurden. Diese Formeln widersprechen direkt unseren Grundanschauungen vom Wesen des Wärmeüberganges. Es ist nämlich ausgeschlossen, daß bei rauher Oberfläche die W.-Ue.-Zahl kleiner ist als bei glatter. Infolge der erhöhten Wirbelbildung wird der molare Wärmetransport verstärkt und damit die W.-Ue.-Zahl erhöht. Die geringeren Werte, die bei den Eisenrohren gemessen wurden, sind höchstwahrscheinlich infolge des Auftretens von Rost und Kesselsteinschichten auf eine unrichtige Bestimmung der wirklichen Wandtemperatur zurückzuführen.

Umfangreiche Versuche an Kondensatoren sind ferner von Josse in Charlottenburg angestellt worden. Josse hat dabei die Wärmedurchgangszahl  $k$ , von kondensierendem Dampf an Wasser gemessen, die durch die Formel<sup>2)</sup> definiert ist:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\delta} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

( $\alpha_1, \alpha_2$  die W.-Ue.-Zahlen der Flüssigkeiten,  $\lambda$  die Wärmeleitzahl der Zwischenwand,  $\delta$  deren Dicke). Er kommt nun, indem er für die  $\lambda, \delta$  die bekannten Werte einsetzt und für den Wärmeübergang an Wasser die Zahlen von Nichol (rd. 4500 M. E./m<sup>2</sup> st  $^\circ\text{C}$ ), die in der Größenordnung eine Mittellage zwischen den Zahlen von Soennecken für glatte und raue Oberfläche darstellen, benutzt, für den Wärmeübergang von kondensierendem Dampf an Metall zu außergewöhnlich hohen Werten. Nach diesen Versuchen würde die W.-Ue.-Zahl für kondensierenden Dampf bis zu 7mal so groß sein können, wie für strömendes Wasser.

Diese Ergebnisse sind gleichfalls nicht verständlich. Mit Nusselt<sup>3)</sup> können wir uns den Kondensationsvorgang an einer kalten senkrechten Wand so vorstellen, daß

<sup>1)</sup> Eine nähere Untersuchung zeigt, daß diese Schicht von wesentlich kleinerer Größenordnung ist, als die Grenzschicht selbst, die wir als das Gebiet, in welchem Schubspannung übertragen wird, definiert hatten. Für das Kreisrohr ist deren Dicke  $\delta$  im hydrodynamisch ausgebildeten Zustand durch den Ausdruck gegeben.

$$\delta = 5,51 \frac{d}{R^{1/8}},$$

wo  $d$  den Durchmesser und  $R$  die Reynoldssche Zahl bedeutet.

<sup>2)</sup> Hütte I, 22. Auflage, S. 385.

<sup>3)</sup> W. Nusselt, Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes, Z. V. d. I. 1916, S. 541.

sich auf der kälteren Oberflächenseite eine Wasserhaut bildet, auf die das gesamte Wärmegefälle von dem Dampf zur Wandtemperatur entfällt. Die Wasserhaut haftet an der einen Seite an der Wand, die übrigen Schichten fließen unter der Wirkung der Schwere nach abwärts. Da die Stärke der Wasserhaut jedenfalls sehr gering ist — nach der Nusseltschen Rechnung Bruchteile eines Millimeters — so haben wir es offenbar mit einer laminaren Strömung zu tun. Es ist nun nicht einzusehen, warum die W.-Ue.-Zahl von Wasser an die metallische Wand auf der einen Seite der Wand (wo noch dazu der Strömungszustand laminar ist) 7mal so groß sein soll als auf der anderen Seite (bei turbulenter Strömung).

Die Versuchsergebnisse von Josse müssen sich danach anders deuten lassen, so daß die W.-D.-Zahl  $k$  durch zwei annähernd gleich große Terme  $\frac{1}{\alpha_1}$  und  $\frac{1}{\alpha_2}$ , wobei  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  mittlere Werte haben, dargestellt wird. Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß demnach die W.-Ue.-Zahl an Wasser höhere Werte hat, als vielfach bisher angenommen wurde. Eine umfassende experimentelle Untersuchung des Wärmeüberganges an Flüssigkeiten erscheint dringend geboten, um die Richtigkeit der theoretischen Rechnungen prüfen zu können. Die Schwierigkeiten, die sich bei der Verwendung von Wasser durch Rostbildung und Kesselsteinansatz zeigen, legen es nahe, hierfür andere Flüssigkeiten, z. B. Öle, heranzuziehen. 86

## Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben.

Von L. HOPF und E. TREFFTZ in Aachen.

Die Probleme der Grundwasserströmung, bei denen die Geschwindigkeit (Durchflußmenge pro Einheit des Querschnittes in der Sekunde) proportional den auf die Flüssigkeit wirkenden Kräften gesetzt werden kann, führen mathematisch auf die gleichen Aufgaben (Integration der Gleichung  $\Delta u = 0$ ) wie die Probleme der wirbellosen Strömung inkompressibler Flüssigkeiten. Speziell die ebenen Probleme sind daher den gleichen mathematischen Methoden der konformen Abbildung zugänglich, die für die idealen Flüssigkeiten, z. B. bei der Strahlbildung, zur Lösung führen. Im folgenden behandeln wir mit diesen Methoden eine Aufgabe, die unmittelbar der Praxis entnommen ist.

In den »Moosen« Süddeutschlands strömen beträchtliche Wassermengen mit geringer Geschwindigkeit im Erdreich. Die freie Oberfläche des Grundwassers liegt der Erdoberfläche nahe, was eine Versumpfung des Bodens zur Folge hat. Zum Zwecke der Trockenlegung solcher Moore und zugleich zur Ausnutzung der Wassermengen zur Kraftgewinnung sucht man das Grundwasser in Gräben abzufangen und wegzuleiten. Reicht dieser Abfanggraben nicht bis zur Sohle der Grundwasser führenden Schicht, sondern taucht nur bis zu einer gewissen Tiefe ein, so erhebt sich die Frage, welche Wassermengen ein solcher Graben der Grundwasserströmung entzieht, welche Geschwindigkeiten lokal auftreten, wie im einzelnen die Stromlinien verlaufen, insbesondere die Oberfläche der Grundwasserströmung, und welche konstruktiven Maßnahmen diese Größen beeinflussen.

**1. Physikalische und mathematische Grundlagen.** Auf die Flüssigkeit wirken Druckgefälle, Schwere und Reibungskräfte. Diese setzt man proportional der Geschwindigkeit und vernachlässigt alle Beschleunigungen. Derart erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten den Ansatz:

$$u = -k \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -k \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \right) \dots \dots \dots (1)$$

oder vektoriell zusammengefaßt:

$$w = -\text{grad } \varphi \dots \dots \dots (1')$$

wobei das Potential  $\varphi = k(p + \gamma y)$  ist. Hierbei bedeuten:

- $k$  eine vom Material der Wasser führenden Schicht abhängige Konstante (reziproke Reibungszahl),
- $p$  den Druck,
- $\gamma$  das spezifische Gewicht des Wassers,
- $y$  die Höhe über einem Nullniveau.