Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Von

PAUL DU BOIS-REYMOND in Tübingen.

Bezeichnet man mit $F(x)$ eine Function, welche differenzirt eine gegebene Function $F'(x)$ liefert, und mit

$$\int_a^b F'(x) dx$$

die Summengrenze, welche man Integral nennt, so besteht zwischen beiden die fundamentale Beziehung:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

welche leicht zu beweisen ist, falls $F'(x)$ stetig ist. Man beweist sie entweder mit Hülfe des Satzes, dass zwei Functionen mit demselben Differentialquotienten nur um eine Constante verschieden sein können, oder mit Hülfe des Fundamentalsatzes der Differentialrechnung, indem man

$$F(b) - F(a) = \sum_{p=1}^{p=n} F(a + p\delta) - F(a + (p-1)\delta)$$

setzt, wo $n\delta = b - a$, und jede Differenz so ausdrückt:

$$F(a + p\delta) - F(a + (p-1)\delta) = \delta F'(a + (p-\Theta)\delta),$$

worin $0 \leq \Theta \leq 1$. Setzt man z. B.

$$\begin{aligned} & \delta F'(a + (p-\Theta)\delta) = \delta F'(a + p\delta) \\ & - \delta \{F'(a + p\delta) - F'(a + (p-\Theta)\delta)\}, \end{aligned}$$

so reducirt sich, wenn man n unendlich werden lässt, die Klammer rechts auf Null, und die Formel ist ebenfalls bewiesen.

Viel schwieriger ist ihr Beweis, wenn man $F'(x)$ nicht stetig, sondern nur integrirbar voraussetzt. Die erste Beweismethode ist dann offenbar nicht mehr anwendbar, weil der Differentialquotient des Integrals einer integrirbaren Function, wie diese selbst, in jedem beliebig kleinen Intervall unbestimmt werden kann, und die zweite Methode kann nicht in Anwendung kommen, weil der Satz

$$F(x_1) - F(x) = (x_1 - x) F'(x + \Theta(x_1 - x)), \quad 0 \leq \Theta \leq 1,$$

keinen deutlichen Sinn mehr hat.

Die Hauptschwierigkeit für den Beweis des *Fundamentalsatzes* bei Aufhebung der Stetigkeitsbedingung für den Differentialquotienten liegt in der Vieldeutigkeit dieses Begriffs. Es müsste jedenfalls, wenn in der Formel

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

der Differentialquotient die *gegebene* Grösse sein soll, gesagt sein, welche der Grenzen:

$$\lim_{+\varepsilon} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{+\varepsilon}, \quad \lim_{-\varepsilon} \frac{F(x-\varepsilon) - F(x)}{-\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon+\varepsilon_1} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon+\varepsilon_1}$$

er vorstellt, denn sie können für eine und dieselbe Function $F(x)$ sämmtlich von einander verschieden sein, wie z. B. schon an Ecken gewöhnlicher Curven, weshalb es nicht ungereimt ist, *a priori* anzunehmen, dass eine integrirbare Function $F'(x)$ verschiedene Functionen $F(x)$ zulasse, deren Differentialquotient sie ist. In diesem Falle würde der Fundamentalsatz kaum gelten können. Dieser Ungewissheit wegen müssen wir die Function $F(x)$ gegeben annehmen, und untersuchen, unter welchen Voraussetzungen über den Differentialquotienten der Fundamentalsatz gilt.

Von den Zwischenformen

$$\lim_{\varepsilon=0, \varepsilon_1=0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x+\varepsilon_1)}{\varepsilon+\varepsilon_1}$$

des Differentialquotienten vorerst nicht zu reden, so muss der Untersuchung über den Fundamentalsatz eine Vergleichung der Differentialquotienten

$$\lim_{+\varepsilon} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{+\varepsilon}, \quad \lim_{-\varepsilon} \frac{F(x-\varepsilon) - F(x)}{-\varepsilon}$$

vorangehen, denn wenn nicht beide Formen integrirbar sind und dasselbe Integral haben, so würde wiederum der Hauptsatz schwerlich gelten. Für einzelne *Punkte* sind beide Formen ganz unabhängig von einander. Allein *wenn die Function $F(x)$ stetig ist*, so gehört geringe Ueberlegung dazu, um sich zu überzeugen, dass in jedem kleinsten Intervall die obere und untere Grenze jeder der Formen dieselbe sein müsse.

Es lässt sich eben geometrisch kein Fall aussinnen, wo die eine Form z. B. nothwendig grössere Werthe liefert wie die andere. Als mir jedoch die Unerlässlichkeit eines Beweises für den obersten Grundsatz der Integralrechnung zuerst fühlbar wurde, gelang es mir nicht, das eben angegebene Verhalten der beiden Formen in publicirbarer Weise ausser Zweifel zu setzen, so dass ich, was mir damals genügte, es unter die Hypothesen aufnahm, indem ich also beide Differentialquotienten integrirbar und dasselbe Integral liefernd voraussetzte*).

Ich habe inzwischen bessere Beweise dafür gefunden, dass die beiden Differentialquotienten in jedem Intervall zwischen denselben Grenzen enthalten sind, wodurch der Beweis des Fundamentalsatzes, oder richtiger seine Untersuchung so gefördert wird, dass man sie als abgeschlossen betrachten dürfte, wenn nicht ein freilich nicht wesentlicher Punkt aufzuklären bliebe. Der Hauptsache nach kann man den Fundamentalsatz der gemeinen Integralrechnung als auch für die allgemeine Functionentheorie festgelegt ansehen.

Unsere Untersuchung stützt sich auf einige allgemeine Principien der Functionentheorie, welche ich voranstellen will. Es wird unbedenklich sein, wenn ich mich geometrischer Darstellung bediene, wo es um rein Analytisches sich handelt. Die geometrische Sprache kann eben sogleich in die rein analytische übersetzt werden, freilich unter Verzicht auf gleiche Kürze des Ausdrucks.

I.

I. Hilfssätze aus der allgemeinen Functionentheorie.

Die folgenden allgemeinen Eigenschaften des stetigen Functionenverlaufs erfreuen sich bei *gewöhnlichen* Functionen der augenfälligsten Evidenz. Aber auch bei *irgendwelchen* stetigen Functionen wird Niemand an ihrer Richtigkeit zweifeln. Gleichwohl sind die Sätze und Aufstellungen nicht so einfach, dass nicht ein Beweis dafür erwünscht wäre, d. i. eine durchweg befriedigende logische Verbindung mit *wirklichen* Elementarvorstellungen. Eine solche herzustellen bin ich in einer unter der Presse befindlichen Schrift über den Grenzbegriff etc. bestrebt.

Bekanntlich besteht ein Satz,

- I. dass eine in einem Intervall $a \leq x \leq b$ stetige positive Function $F(x)$, deren Werthe $F(a)$, $F(b)$ Null sind, für mindestens einen Werth x_1 , der der Ungleichheit $a < x_1 < b$ genügt, ihren grössten Werth annimmt.

*) Abh. d. Bair. Akad. d. Wiss. II Cl. XII. Bd., 2. Abth. Anhang zur Abhandlung: Beweis etc

Man kann als Corollar folgenden Satz hinzufügen:

- Ia. Wenn die Function $F(x)$ ihr Zeichen wechselt, so nimmt sie mindestens für je einen Werth x_1 ihren grössten und für je einen Werth x_2 ihren kleinsten Werth an, wo sowohl $a < x_1 < b$ als $a < x_2 < b$.

Dies ist eine blosser Folge des ersten Satzes, zu der man gelangt, wenn man an Stelle von $F(x)$ zwei Functionen $F_1(x) + F_2(x)$ betrachtet, deren erste positiv und $= F(x)$ oder Null ist, jenachdem $F(x)$ positiv oder negativ ist, während die zweite negativ und $= F(x)$ oder Null ist, jenachdem $F(x)$ negativ oder positiv ist. Beide Functionen $F_1(x), F_2(x)$ genügen alsdann denselben Bedingungen wie $F(x)$ im Satze I.

Folgende weitere hierher gehörige Sätze sind aber nicht in dem von Herrn Weierstrass herrührenden Satz I. enthalten. Sie lauten:

- II. Unter den Bedingungen für die positive $F(x)$ des Satzes I. giebt es stets zwei Werthe x', x'' von folgender Beschaffenheit: Erstens ist:

$$a < x' \leq x'' < b.$$

Zweitens erhält $F(x)$ in x' sowohl als in x'' ihren grössten Werth G . Endlich hat man $F(x) < G$ in den Intervallen

$$a \leq x < x', \quad x'' < x \leq b.$$

- III. Es muss, wenn wir den Punkt x'' ins Auge fassen, zwischen den Punkten x'' und b einen Punkt x_0'' geben, welcher bei von x'' an wachsendem x der erste ist, für den $F(x)$ Null wird, so dass also zwischen x'' und x_0'' keine Wurzel von $F(x)$ liegt. Oder in Formeln:

$$G > F(x) > 0 \quad \text{für} \quad x'' < x < x_0'' \leq b.$$

Ebenso hat man:

$$G > F(x) > 0 \quad \text{für} \quad a \leq x_0' < x < x'.$$

Zu diesen Sätzen gehören wieder Corollare IIa. und IIIa., analog dem Corollar Ia. für den Fall, wo $F(x)$ das Zeichen wechselt im Intervall $a \dots b$. Man erhält alsdann je vier Punkte x_0', x', x'', x_0'' für jede der Functionen $F_1(x), F_2(x)$.

IV. Für die Anwendungen ist es häufig vortheilhaft zu diesen Sätzen noch folgenden Zusatz zu machen. Um es geometrisch auszudrücken, brauchen die Functionswerthe nicht senkrecht auf die Strecke $a \dots b$ aufgetragen zu werden, sondern können sämmtlich denselben beliebigen Winkel mit ihr einschliessen, indem die Begriffe Stetigkeit, grösster und kleinster Werth, u. s. f. in üblicher Weise in die Vorstellung eines schiefwinkligen Coordinatensystems eingefügt sind. (Nichts hinderte daran, die Functionswerthe sogar auf den Strahlen eines Büschels von einer das Büschel schneidenden Curve aus

abzutragen.) In diesem Sinne ist von den Sätzen weiter unten Gebrauch gemacht, und so werden wir sie auch zum Beweis des folgenden Satzes benutzen.

Mit Hülfe der Sätze II. und III. lässt sich nämlich eine wichtige Beziehung zwischen Differenz- und Differentialquotient bei stetigen sonst voraussetzungslosen Functionen feststellen. Es ist diese:

V. Lehrsatz: *Der Differentialquotient:*

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$$

ist seiner Grösse nach eingeschlossen zwischen dem grössten und dem kleinsten Werth von

$$f_v(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon}$$

im Intervall $x \dots x + \delta$.

Beweis. Wir construiren die Gerade G , welche die Punkte

$$x, F(x) \text{ und } x + \delta, F(x + \delta)$$

verbindet. Die Function $F(x)$ schneidet entweder die Gerade G nicht, oder sie thut es. Denken wir uns im Satze III. x und $x + \delta$ statt a und b geschrieben, so muss es also ein oder zwei Punktsysteme geben:

$$x \leq x_0' < x' \leq x'' < x_0'' \leq x + \delta,$$

die entweder dem Verlauf der Function $F(x)$ oder $F_1(x)$ oberhalb G , oder dem Verlauf der Function $F(x)$ oder $F_2(x)$ unterhalb G entsprechen.

Im ersten Falle hat man:

$$\text{für } 0 < \gamma < x' - x_0': \frac{F(x_0' + \gamma) - F(x_0')}{\gamma} > \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta},$$

$$\text{für } 0 < \gamma < x_0'' - x'': \frac{F(x'' + \gamma) - F(x'')}{\gamma} < \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta},$$

oder an der Grenze:

$$f_v(x_0') \geq \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta},$$

$$f_v(x'') \leq \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta}.$$

Im zweiten Falle hat man:

$$\text{für } 0 < \gamma < x' - x_0': \frac{F(x_0' + \gamma) - F(x_0')}{\gamma} < \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta},$$

$$\text{für } 0 < \gamma < x_0'' - x'': \frac{F(x'' + \gamma) - F(x'')}{\gamma} > \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta}$$

$$\text{oder an der Grenze: } f_v(x_0') \leq \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta},$$

$$f_v(x'') \geq \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta},$$

womit der Beweis unseres Satzes geführt ist. Bezeichnet man noch mit $f_v(x + \delta_1)$, $0 \leq \delta_1 \leq \delta$ einen Werth, der zwischen dem kleinsten und dem grössten Werth von $f_v(x)$ im Intervall $x \dots x + \delta$ (die Endwerthe eingeschlossen) liegt, so ist also:

$$F(x + \delta) - F(x) = \delta f_v(x + \delta_1), \quad 0 \leq \delta_1 \leq \delta.$$

Die Grösse $f_v(x + \delta_1)$ wird, wenn der Differentialquotient $f_v(x)$ stetig ist, stets einen wirklich von ihm angenommenen Werth darstellen, in welchem Falle vorstehende Formel die aus den Elementen wohlbekannte Bedeutung erhält.

Für den Differentialquotienten $\frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta}$ gilt ganz Aehnliches.

VI. Endlich führe ich hier wie in anderen Aufsätzen den Begriff des Werthevorraths (ein Hrn. C. Neumann entlehnter Ausdruck) wieder ein, nach welchem Begriff der Werthvorrath $f(x)$ für $x = x_1$ besteht, erstens aus dem Werth, den man findet, wenn man $f(x)$ für $x = x_1$ berechnet, zweitens aus sämtlichen Werthen $\lim_{\varepsilon=0} f(x_1 + \varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon=0} f(x_1 - \varepsilon)$, wenn darin ε und ε_1 auf beliebige Weise Null werden. Der Werthevorrath einer Function in einem Intervall besteht aus sämtlichen Werthevorräthen seiner Punkte.

An den Begriff des Werthevorraths knüpft sich eine Eigenschaft von Integralen integrirbarer Functionen, die schliesslich noch hervorgehoben werden mag:

VII. Ist die Function $f(x)$ integrirbar, so kann $f(x)$, im Allgemeinen, je nach den Einzelwerthen, welche man aus den Werthevorräthen $f(x)$ für die einzelnen Punkte x aussucht, unzählige Functionen bedeuten. Alle aber geben dieselbe Grenze:

$$\int f(\alpha) d\alpha.$$

Mit anderen Worten, man kann in einem Integral $\int f(\alpha) d\alpha$ einer integrirbaren Function an die Stelle von $f(x)$ theilweise oder durchweg irgendwelche andere ihren Werthevorräthen angehörige Werthe setzen, ohne den Werth des Integrals zu verändern.

II.

Ueber die Beziehungen zwischen den Differentialquotienten einer Function $F(x)$, und zwischen den Integralen dieser Differentialquotienten.

1.

Eine Function $F(x)$ sei *stetig* im Intervall $a \dots b$. Wir bezeichnen mit $f_h(x)$, $f_v(x)$, $f_m(x)$ den *hinteren*, den *vorderen*, einen *mittleren* Differentialquotienten, d. i., ε und ε_1 positiv gedacht, diese Grössen:

$$f_v(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon},$$

$$f_h(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x-\varepsilon) - F(x)}{-\varepsilon},$$

$$f_m(x) = \lim_{\varepsilon=0, \varepsilon_1=0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1},$$

bei welcher letzterer Grösse noch das Gesetz $\varphi(\varepsilon, \varepsilon_1) = 0$ gegeben sein muss, nach welchem ε und ε_1 gleichzeitig verschwinden. Nach einer Bemerkung des Herrn Thomä ist aber f_m durch f_h und f_v ausdrückbar, indem man setzt:

$$\frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon_1)}{\varepsilon + \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} \frac{F(x-\varepsilon_1) - F(x)}{-\varepsilon_1}.$$

Führt man weiter die Functionen ein:

$$\lim \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} = \lambda(x), \quad \lim \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} = \lambda_1(x),$$

so folgt:

$$f_m(x) = \lambda(x)f_v(x) + \lambda_1(x)f_h(x),$$

wo die Functionen $\lambda(x)$ und $\lambda_1(x)$ positiv sind, und der Gleichung

$$\lambda(x) + \lambda_1(x) = 1$$

genügen. Hieraus ergibt sich, dass $f_m(x)$ seinem geometrischen Werthe nach zwischen $f_v(x)$ und $f_h(x)$ liegt.*

2.

Es soll nun unter

$$F'(x) = \lambda(x)f_v(x) + \lambda_1(x)f_h(x), \quad \lambda(x) + \lambda_1(x) = 1,$$

verstanden werden der Differentialquotient von $F(x)$ im Allgemeinen, der auch $f_v(x)$ oder $f_h(x)$ sein kann für $\lambda(x) = 1$ oder $\lambda_1(x) = 1$. Von $\lambda(x)$ und $\lambda_1(x)$ nehmen wir noch an, dass sie integrirbare Functionen sind, die eben nur obigen Beschränkungen, positiv zu sein und die Summe Eins zu haben, unterliegen. Alsdann sollen folgende Sätze bewiesen werden:

- I. Falls im Intervall $a \dots b$ einer der Differentialquotienten $f_v(x)$, $f_h(x)$ integrirbar ist, so ist es der andere auch und somit sind es alle Differentialquotienten $F'(x)$.

*) Wenn eine Grösse zwischen zwei anderen liegt unter Berücksichtigung der Vorzeichen, so sage ich: sie ist *geometrisch* zwischen ihnen eingeschlossen. Wenn sie zwischen ihnen liegt ohne Berücksichtigung der Vorzeichen, so sage ich: sie ist *arithmetisch* oder *numerisch* zwischen ihnen enthalten.

II. *Alsdann ist für alle Differentialquotienten $F'(x)$:*

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Der gleichsam umgekehrte Satz, zu dessen Untersuchung I. aufordert, dass aus der Integrirbarkeit eines mittleren Differentialquotienten $f_m(x)$ die der äusseren folgt, scheint schwer zu beweisen. Es gelang mir oben nicht zu zeigen, dass in:

$$f_m(x) = \lambda(x)f_v(x) + \lambda_1(x)f_h(x)$$

$f_v(x)$ und $f_h(x)$ nicht zugleich in der geeigneten Weise nichtintegrirbar sein könnten, um in dem Ausdruck rechts ihre grössten Werthdifferenzen gegenseitig zu zerstören, so dass doch ein integrirbarer $f_m(x)$ herauskäme. Ich komme weiter unten auf diese Frage zurück.

3.

Wir beginnen mit dem ersten Satze des vorigen Artikels, dass mit einem der äusseren Differentialquotienten auch alle übrigen integrirbar sind.

Es genügt zu zeigen, dass, wenn z. B. f_h nichtintegrirbar ist, auch f_v nichtintegrirbar sein muss.

Hierzu reicht es wiederum aus Folgendes zu beweisen:

Wenn in einem Intervall zwei Werthe von z. B. f_h um eine Grösse Δ verschieden sind, so kann man stets, wie klein das Intervall auch sei, das Vorhandensein zweier Werthe f_v darin nachweisen, die um eine beliebig wenig von Δ verschiedene Grösse auseinanderstehen.

Dies endlich wird bewiesen sein, wenn gezeigt ist, dass in jedem beliebig kleinen Intervall, welches einen Punkt x_1 einschliesst, für den der Differentialquotient f_h einen grössten oder kleinsten Werth annimmt, Punkte nachweisbar sind, für welche der Differentialquotient $f_v(x)$ jenen grössten oder kleinsten Werthen von f_h beliebig nahe kommt.

4.

Es seien σ und ϱ die obere und die untere Unbestimmtheitsgrenze des Limes

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x_1 - \varepsilon) - F(x_1)}{-\varepsilon}.$$

Wir können uns auf die Betrachtung von σ beschränken.

Von einer hinreichend kleinen Grösse $\varepsilon = \delta$ an wird

$$\frac{F(x_1 - \varepsilon) - F(x_1)}{-\varepsilon}$$

bei weiterer Verkleinerung von ε unbegrenzt oft Werthe erhalten, die von σ um weniger als eine Grösse γ sich unterscheiden, der durch Verkleinerung von δ jede beliebige Kleinheit ertheilt werden kann.

Nun seien ε' und $\varepsilon'' > \varepsilon'$ kleiner als δ , und ferner sei:

$$\frac{F(x_1 - \varepsilon') - F(x_1)}{-\varepsilon'} = \sigma + \gamma',$$

$$\frac{F(x_1 - \varepsilon'') - F(x_1)}{-\varepsilon''} = \sigma + \gamma''$$

wo γ' und γ'' beide numerisch $<$ als γ .

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{F(x_1 - \varepsilon'') - F(x_1 - \varepsilon')}{\varepsilon' - \varepsilon''} = \sigma + \gamma' + (\gamma' - \gamma'') \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' - \varepsilon''}.$$

Wir können ε'' genügend verkleinern, damit der an der rechten Seite zu σ addirte Theil numerisch kleiner als γ sei.

Wir schreiben $x_1 - \varepsilon'' = x''$, $x_1 - \varepsilon' = x'$, und haben also das Ergebniss, dass

$$\frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'}$$

von σ um nicht mehr als γ unterschieden ist, während x' und x'' dem Intervall $x_1 - \delta \dots x_1$ angehören.

5.

Die Function $F(x)$ ist stetig. Sie kann also die Gerade G , welche die Punkte

$$x', F(x') \quad \text{und} \quad x'', F(x'')$$

verbindet, entweder gar nicht, oder beliebig, ja unbegrenzt oft schneiden.

Falls $F(x)$ ganz oder theilweise oberhalb G verläuft, kann man nach Hülfsatz III im Intervall $x' \dots x''$ vier Punkte x finden, welche wie folgt liegen:

$$x' \leq x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4 \leq x''.$$

Zwischen x_1 und x_2 ist $F(x)$ oberhalb der Geraden G . Demnach ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x_1 + \varepsilon) - F(x_1)}{\varepsilon} \geq \frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'}.$$

Mithin kann der vordere Differentialquotient $f_+(x_1)$ nur um weniger als γ kleiner sein als σ .

Verläuft $F(x)$ ganz unterhalb G , so giebt es abermals vier Punkte x :

$$x' \leq x'_1 < x'_2 \leq x'_3 < x'_4 \leq x''$$

zwischen deren dritten und vierten, x'_3 und x'_4 die Function $F(x)$ oberhalb einer durch $F(x'_3)$ parallel zu G gezogenen Geraden G_u verläuft. Es wird also wieder sein:

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F(x'_3 + \varepsilon) - F(x'_3)}{\varepsilon} \geq \frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'},$$

und wieder wird $f_v(x'_3)$ nicht um γ kleiner als σ sein können.

Unter allen Umständen giebt es also im Intervall $x_1 - \delta \dots x_1$ einen vorderen Differentialquotienten, der nur um eine in unserem Belieben stehende Grösse kleiner als $\sigma + \gamma$ sein kann, und die Kleinheit steht gleichfalls in unserem Belieben.

Nun seien σ_h und σ_v die grössten Werthe von $f_h(x)$ und $f_v(x)$ in einem Intervall s . Sie brauchen nicht wirklich erreicht zu werden, allein man muss ihnen innerhalb des Intervalles s beliebig nahe kommen können. So wird man in dem Intervalle Werthe von $f_h(x)$ nachweisen können, die nicht kleiner sind als σ_v , und Werthe von $f_v(x)$, die nicht kleiner sind als σ_h . Wir erhalten somit den Satz:

In jedem Intervall sind die grössten und die kleinsten Werthe von $f_h(x)$ und $f_v(x)$ einander gleich.

6.

Bezeichnen wir mit $\Delta_p f$ den grössten numerischen Werthunterschied der Function $f(x)$ im Intervall s_p , so werden also

$$\lim_{p=n} \sum_{p=1} s_p \Delta_p f_h \quad \text{und} \quad \lim_{p=n} \sum_{p=1} s_p \Delta_p f_v$$

gleichzeitig Null oder > 0 sein müssen.

Sind nun, wie oben festgesetzt, in

$$f_m(x) = \lambda(x) f_v(x) + \lambda_1(x) f_h(x)$$

$\lambda(x)$ und $\lambda_1(x)$ positive integrirbare Functionen, und ist von den Grössen $f_v(x)$ und $f_h(x)$ eine und somit auch die andere integrirbar, so ist es, nach meinen Sätzen über Integrirbarkeit, auch $f_m(x)$. Wenn ferner ein Differentialquotient $f_m(x)$ nichtintegrirbar ist, so muss dies jedenfalls auch einer der Differentialquotienten $f_v(x)$, $f_h(x)$ sein, folglich beide, so dass die Nichtintegrirbarkeit eines mittleren Differentialquotienten die aller übrigen mittleren und äusseren nach sich zieht. Nur aus der Integrirbarkeit irgend eines mittleren Differentialquotienten vermag ich nicht die der äusseren mit Sicherheit zu folgern, da sie nicht integrirbar sein könnten, jedoch, wie oben angedeutet, so, dass die ihre Nichtintegrirbarkeit bedingenden Schwankungen sich gegenseitig aufheben. Zwar haben mannigfache Versuche, dieser Schwierigkeit Herr zu werden, mich mit Bedingungen für die Functionen λ bekannt gemacht, unter denen der umgekehrte Satz gilt, wie z. B. die, dass sie stetig seien. Doch sind meine Resultate nicht von erschöpfender Allgemeinheit.

Zu zeigen wäre, dass aus der Nichtintegrirbarkeit von $f_v(x)$ und $f_h(x)$ die jedes mittleren Differentialquotienten folgt. Es handelt sich also hier um einen jener *Divergenzbeweise*, über deren heikle Beschaffenheit ich schon einigemal Veranlassung hatte zu klagen. Uebrigens bin ich von der Richtigkeit des zu beweisenden Satzes nicht einmal völlig überzeugt.

7.

Aus dem Satz am Schluss des Art. 5. folgt sodann, dass die Integrale von $f_v(x)$ und $f_h(x)$ einander gleich sind.

Denn nach dem Integralbegriff ist z. B.

$$\int_a^b f_v(x) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^p \delta f_v^{(p)},$$

wo das Intervall $b - a$ eingetheilt ist in die Intervalle:

$$a \dots a + \delta, a + \delta \dots a + 2\delta, \text{ etc., } a + (n-1)\delta \dots a + n\delta,$$

und $f_v^{(p)}$ irgend einen dem Intervall

$$a + (p-1)\delta \dots a + p\delta$$

angehörigen Werth von $f_v(x)$ vorstellt.

Wenn wir also z. B. den kleinsten Werth von $f_v(x)$ und den kleinsten Werth von $f_h(x)$ in jedem solchen Intervalle unter die Summe nehmen, so sind die kleinsten Werthe nach dem Satz des Art. 5. einander gleich und die Integrale daher auch.

Betrachten wir jetzt den mittleren Differentialquotienten

$$f_m(x) = \lambda(x)f_v(x) + \lambda_1(x) \cdot f_h(x).$$

Wir können schreiben:

$$f_m(x) = f_v(x) + \lambda_1(x) \{f_h(x) - f_v(x)\}$$

und

$$f_m(x) = f_h(x) + \lambda(x) \{f_v(x) - f_h(x)\}.$$

Beide Formeln wollen wir zu einer vereinigen, und zwar so, dass die obere gemeint ist in den Punkten x , in denen $f_h(x) - f_v(x)$ positiv oder Null ist, die untere in den Punkten x , in denen $f_v(x) - f_h(x)$ positiv ist.

Diese combinirte Formel laute:

$$f_m(x) = f_{vh}(x) + \lambda_{10}(x) \{f_{hv}(x) - f_{vh}(x)\},$$

wo rechts immer nur durchweg der erste oder durchweg der zweite Index zu denken ist, und zwar eben so, dass die Klammer $\{ \}$ stets positiv ist. $\lambda_0(x)$ bedeutet $\lambda(x)$. Bildet man das Integral:

$$\int f_m(x) dx = \int f_{v,h}(x) dx + \lambda_{10}(\xi) \left\{ \int f_{h,v}(x) dx - \int f_{v,h}(x) dx \right\}$$

so ist offenbar:

$$\int f_{v,h}(x) dx = \int f_v(x) dx = \int f_h(x) dx = \int f_{h,v}(x) dx.$$

Denn betrachten wir z. B. ein Element des Integrals $\int f_{v,h}(x) dx$. Es sei in $\delta f_{v,h}^{(p)}$ die Grösse $f_{v,h}^{(p)}$ irgend ein Werth, der zum Intervall

$$a + (p-1)\delta \cdots a + p\delta$$

gehört. Die den Punkten dieses Intervalls zugeordneten Functionswerthe gehören promiscue den Functionen $f_v(x)$ und $f_h(x)$ an, liegen also zwischen den gleichen kleinsten und grössten Werthen der Functionen f_v und f_h , also etc. Somit ergibt sich in der That, dass alle Differentialquotienten $F'(x)$, wenn sie sämmtlich integrirbar sind, das nämliche Integral haben.

III.

Darstellung des gemeinsamen Werthes der Integrale der Differentialquotienten $F'(x)$.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichheit:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

zu beweisen, oder, wie wir jetzt sagen können, den gemeinsamen Werth

$F(b) - F(a)$ des Integrals $\int_a^b F'(x) dx$ aller Differentialquotienten $F'(x)$

einer als gegeben angenommenen Function $F(x)$ darzustellen. Zugleich gewinnen wir das Ergebniss, dass, die nur integrirbare Function $F'(x)$ als gegeben gedacht, alle Functionen, aus denen sie durch Ableitung entstehen kann, nur um Unveränderliches von einander abweichen. Denn es seien $F_1(x)$ und $F_2(x)$ zwei solche Functionen, so hat man $F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a)$, woraus dies folgt. Also:

Functionen, welche den nämlichen integrirbaren Differentialquotienten haben, sind nur um Constanten verschieden.)*

*) Noch allgemeiner: Wenn der Unterschied der irgendwie genommenen integrirbar vorausgesetzten Differentialquotienten zweier Functionen, zwischen beliebigen Grenzen innerhalb eines Intervalls integrirt, Null ist, so können die Functionen in diesem Intervall nur um eine Constante verschieden sein.

Wie Eingangs angeführt, giebt es in der Integralrechnung zwei Wege um die Gleichheit

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

zu beweisen. Man benutzt entweder den Satz, dass Functionen mit demselben Differentialquotienten nur um eine Constante sich unterscheiden können, oder man wendet den Hauptsatz der Differentialgleichung an, der die Differenz zweier Functionswerthe durch die Differentialquotienten der Function mit Hülfe eines Mittelwerths ausdrückt.

Beide Beweisarten lassen sich auf den allgemeinen Fall ausdehnen. Am leichtesten die zweite. Was die erste anlangt, so muss der Dif-

ferentialquotient von $\int_a^x F'(x) dx - F(x) + F(a)$ pantachisch Punkte

besitzen, in denen er Null ist,*) kann aber auch in pantachisch vertheilten Punkten von Null verschieden sein. Daher ist der Beweis in der gewöhnlichen Form nicht zu führen, sondern man muss denselben Kunstgriff anwenden, durch den es gelingt die volle Allgemeinheit der Fourier'schen Coefficientendarstellung festzustellen: Man muss die Gleichung noch einmal integrieren.

Ich unterlasse es, diesen Beweis hier wiederzugeben, da er sich nur durch Naheliegendes und Unwesentliches von dem l. c. mitgetheilten Beweise unterscheidet.

Der andere Beweis ist so zu führen. Man hat:

$$F(a + p\delta) - F(a + (p-1)\delta) = \delta F'_v(a + (p - \Theta_p)\delta),$$

nach Satz V. der Hülfsätze. Hierin bedeutet $F'_v(a + (p - \Theta_p)\delta)$ eine Grösse, die dem Werthevorrath $F'_v(x)$ im Intervall

$$a + (p-1)\delta \cdots a + p\delta$$

*) Pantachisch heisst eine Punktvertheilung, bei der in jedem beliebig kleinen Intervall Punkte einer in Rede stehenden Art vorkommen. Der Differential-

quotient von $\int_a^x F'(x) dx - F(x) + F(a)$ muss in jedem Intervall einmal verschwinden, weil jede integrirbare Function pantachisch Stetigkeitspunkte besitzt. In seiner Abhandlung Sulle Serie $\sum A_n X_n \cdots$, welche im Wesentlichen die Uebertragung der Methoden meiner pag. 117, Anm., citirten Abhandlung auf die Reihe $\sum A_n X_n$ enthält, sagt Herr Ascoli neben einigen wohl nicht minder grundlosen Ausstellungen, man könne nicht behaupten, dass eine integrirbare Function

(VI Hülfsätze) angehört. Summirt man diese Gleichung von $p = 1$ bis $p = n$, und setzt $n\delta = b - a$, so folgt:

$$F(b) - F(a) = \sum_{p=1}^{p=n} \delta F'_p(a + (p - \Theta_p)\delta).$$

Lässt man nun $\delta = 0$, $n = \infty$ werden, so geht die rechte Seite, wegen Hülfsatz VII., in

$$\int_a^b F'_p(x) dx$$

über.

pantachisch Stetigkeitspunkte habe. Ich hatte nur von Functionen geredet, die durchweg gegeben sind mit bestimmten oder unbestimmten Werthen. Nimmt man die Functionen z. B. pantachisch nicht gegeben an, so könnte man allerdings gerade die Stetigkeitspunkte als nicht gegeben sich denken. Da übrigens Herr Ascoli diese Ausstellung jetzt zurückgenommen hat, (Istituto Lombardo . . . 1. Mai 1879) so bemerke ich nur, dass die fragliche Eigenschaft der integrirbaren Functionen sogleich einleuchtet, wenn man bedenkt, dass jedes Intervall ein kleineres Intervall einschliessen muss, in welchem die Schwankungen der Function ein beliebig Kleines nicht übersteigen; von Intervall zu Intervall führt diese Einschachtelung zu einem Stetigkeitspunkt als Grenze. So ungefähr hat auch Herr Ascoli die Sache sich zurechtgelegt.

Der umgekehrte Satz, dass eine Function mit pantachischen Stetigkeitspunkten integrirbar sein müsse, findet nicht statt, aber sogar das Dirichlet'sche Criterium der Integrirbarkeit (Crelle's Journal IV, p. 169) ist nicht ausreichend. Dort steht: Il est nécessaire que la fonction $\varphi(x)$ soit telle, que si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ (die Integrationsgrenzen), on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées, pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s . Hiergegen ist heute einzuwenden, dass man auch *Intervalle* pantachisch vertheilen kann. D. i. ich kann ein gegebenes Intervall $D < 2\pi$ so eintheilen, dass, wenn ich mit seinen Theilstrecken das Intervall $-\pi \dots +\pi$ an den geeigneten Stellen bedecke, in jedem noch so kleinen Ausschnitt des Intervalls $-\pi \dots +\pi$ zusammenhängende Theilstrecken von D vorkommen. Sei nun eine Function $\varphi(x)$ in diesen Null und sei Eins in jenen nicht bedeckten Theilen von $-\pi \dots +\pi$, so ist sie nicht integrirbar, obschon jedes noch so kleine Intervall innerhalb $-\pi \dots +\pi$ Strecken enthält, in denen sie stetig, nämlich Null ist.

Auf diese Art der Intervallvertheilung, zu der ich verschiedene Beispiele bei der Hand habe, wird man geführt, wenn man die Verdichtungspunkte der Ordnung ∞ aufsucht, deren Vorhandensein ich vor Jahren Herrn Cantor in Halle brieflich anzeigte. Auf diese Vertheilung, ferner auf die Verdichtungspunkte endlicher und unendlicher Ordnung von immer kleiner werdenden *Strecken*, endlich auf meine Wahl des Ausdrucks „pantachisch“ verglichen mit dem später von Herrn Cantor angenommenen überalldicht gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit einzugehen.