Ueber die Berechnung von Linsensystemen.

Von Dr. N. Herz.

Einer freundlichen Einladung des Herausgebers der Astronomischen Nachrichten Folge leistend, möchte ich im Folgenden einige vorläufige Resultate meiner Untersuchungen über den Gang der Lichtstrahlen in Linsensystemen mittheilen.

Jeder Strahl ist durch vier Constanten bestimmt, welche ganz allgemein mit m, n, p, q bezeichnet werden mögen; je nach der verschiedenen Wahl der Constanten werden die Formeln mehr oder weniger complicirt. Als Strahlencoordinaten können z. B. gewählt werden: zwei Coordinaten in einer Grundebene und zwei Winkel oder zwei Richtungs-cosinus, oder aber die rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte eines Strahles in zwei parallelen Ebenen u. s. w. Bei den bisher bekannten Untersuchungen kommt man sehr bald an eine Grenze, über welche hinaus man die analytischen Formeln nicht führen kann, ohne die Uebersichtlichkeit vollständig zu verlieren. Ein wesentlicher Fortschritt ist jedoch möglich, wenn man an Stelle zweier der vier Coordinaten zwei andere einführt, die für den ersten Blick allerdings scheinbar complicirt sind, und eine unmittelbare geometrische Bedeutung nicht haben.

Man findet nämlich nicht allzu schwer zwei Covarianten eines Strahles in Bezug auf eine brechende Fläche, welche ausser von den Coordinaten des Strahles auch noch von den Constanten der brechenden Fläche abhängen, dabei längs des ganzen Verlaufes des Strahles in demselben brechenden Medium constant bleiben, und sich beim Uebergange des Strahles in ein anderes Medium so ändern, dass der Werth für den gebrochenen Strahl sich in einfacher, linearer Form aus dem Werthe für den einfallenden Strahl darstellen lässt. Seien diese Covarianten P, Q , so erhält man eine bedeutende Vereinfachung in den Formeln, wenn man als Strahlencoordinaten m, n, P, Q einführt.

Seien m_0, n_0, P_0, Q_0 die Coordinaten in dem ersten Medium, m_1, n_1, P_1', Q_1' in dem zweiten Medium, bezogen auf die erste brechende Fläche, m_1, n_1, P_1'', Q_1'' dieselben im zweiten Medium, bezogen auf die zweite brechende Fläche, u. s. w., endlich m_i, n_i, P_i, Q_i die Coordinaten in dem $(+1)^{\text{ten}}$ brechenden Medium, bezogen auf die i^{te} brechende Fläche, so findet man ganz allgemein:*)

$$\left. \begin{aligned} m_i &= m_0 \mathfrak{A}_i + P_0 \mathfrak{B}_i \\ n_i &= n_0 \mathfrak{A}_i + Q_0 \mathfrak{B}_i \\ P_i &= m_0 \mathfrak{C}_i + P_0 \mathfrak{D}_i \\ Q_i &= n_0 \mathfrak{C}_i + Q_0 \mathfrak{D}_i \end{aligned} \right\} (1)$$

Die Coefficienten $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}_i, \mathfrak{D}_i$ lassen sich in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_i &= A_i + e_i \\ \mathfrak{B}_i &= B_i + f_i \\ \mathfrak{C}_i &= \Gamma_i + g_i \\ \mathfrak{D}_i &= \Delta_i + h_i \end{aligned} \right\} (2)$$

wobei die $A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i$ sich auf die axialen Centralstrahlen beziehen, und die Zusatzglieder e_i, f_i, g_i, h_i Correctionen für die Oeffnung der Linse und die Grösse des Bildwinkels bedeuten. Für die $A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i$ ergeben sich sehr einfache lineare Recursionsformeln, mit deren Hülfe man

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_i^{(0)} + A_i' + A_i'' + \dots \\ B_i &= B_i^{(0)} + B_i' + B_i'' + \dots \\ \Gamma_i &= \Gamma_i^{(0)} + \Gamma_i' + \Gamma_i'' + \dots \\ \Delta_i &= \Delta_i^{(0)} + \Delta_i' + \Delta_i'' + \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

erhält, wobei $A_i^{(0)}, B_i^{(0)}, \Gamma_i^{(0)}, \Delta_i^{(0)}$ die Ausdrücke von der nullten Ordnung der Linsendicken (mit Vernachlässigung der Linsendicken), $A_i^{(1)}, B_i^{(1)}, \Gamma_i^{(1)}, \Delta_i^{(1)}$ die Ausdrücke von der 1^{ten} Ordnung der Linsendicken sind, und die Ausdrücke für die i^{te} Ordnung sich in linearer Weise aus denjenigen $(i-1)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellen lassen. Zu bemerken ist noch, dass sich $A_i^{(0)}, B_i^{(0)}, \Gamma_i^{(0)}, \Delta_i^{(0)}$ in linearer Weise aus einer einzigen Function $\mathfrak{F}_i$ der Constanten des Linsensystems zusammensetzen, und dass

$$A_i \Delta_i - B_i \Gamma_i = 1 \quad (4)$$

ist. Schwieriger gestaltet sich naturgemäss die Berechnung der e_i, f_i, g_i, h_i . Auch für diese erhält man leicht Recursionsformeln, die aber nicht mehr linear werden, und sich nur unter Beibehaltung der Grössen von der zweiten Ordnung der Linsenöffnung und des Bildwinkels verhältnissmässig reduciren. Die Resultate sind dabei in Folge der erwähnten Eigenschaften der $A_i, B_i, \Gamma_i, \Delta_i$ relativ einfach, der Weg, auf welchem dieselben erhalten werden, ist jedoch ziemlich umständlich, und ich habe noch keine Vereinfachung in dieser Richtung finden können.

Bemerkenswerth sind nun aber die Resultate, von denen ich die wichtigsten hier anführe.

Seien bei dem Durchgange von Lichtstrahlen durch i brechende Medien von verschiedenen Brechungsindices die

*) Auf die Abtrennung gewisser constanter Factoren ist bei dieser Zusammenfassung Kürze halber nicht Rücksicht genommen.

in den Formeln (1) bis (4) mit dem Index 0 bezeichneten Grössen auf den einfallenden Strahl, die mit dem Index i bezeichneten auf den austretenden Strahl bezogen und seien

$$X_0 = \frac{1 - \mathfrak{A}_i}{\mu_0 \mathfrak{B}_i} \quad \text{und} \quad X_i = \frac{1 - \mathfrak{D}_i - k_i}{\mu_i \mathfrak{B}_i} \quad \left. \vphantom{\frac{1 - \mathfrak{A}_i}{\mu_0 \mathfrak{B}_i}} \right\} (5)$$

wobei $k_i = (B_i g_i - A_i h_i) + (F_i f_i - A_i e_i) + (f_i g_i - e_i h_i)$

ist, die Entfernungen der Knotenpunkte von dem Mittelpunkt der ersten, bzw. letzten brechenden Fläche, und

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{\mu_0 \mathfrak{B}_i} \\ \Phi_i &= \frac{1 - k_i}{\mu_i \mathfrak{B}_i} \end{aligned} \right\} (6)$$

die Entfernungen der Brennebenen von den Knotenpunkten für die parallel austretenden bzw. parallel einfallenden Strahlen.

Sind W_0 , W_i die Entfernungen von Gegenstand und Bild von den Knotenpunkten, so ist

$$\frac{\Phi_i}{W_i} + \frac{\Phi_0}{W_0} = 1 \quad (7)$$

Da die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$, $\mathfrak{D}_i$ und k_i von der Linsenöffnung und dem Bildwinkel abhängig sind, überdiess aber auch von den Brechungsexponenten der verschiedenen Medien, so wird die Lage der Knotenpunkte und Brennebenen verschieden für die Randstrahlen und Centralstrahlen, verschieden je nach der Lage des Objectes in oder ausserhalb der Axe und verschieden für verschiedenfarbiges Licht. Man sieht aber sofort, dass, wenn man zunächst A_i , B_i , A_i so bestimmt, dass es für verschiedene Strahlengattungen denselben Werth erlangt, Knotenpunkte und Brennebenen für die Centralstrahlen für verschiedene Farben identisch werden, daher die chromatische Abweichung und Verschiedenheit der Farbenvergrößerung weggeschafft sind. Macht man dann weiter $e_i = f_i = g_i = h_i = 0$, so ist die sphärische Abweichung in und ausser der Axe, d. h. sphärische Aberration, Astigmatismus, Coma und Bildkrümmung weggeschafft. Mit Rücksicht auf die zweiten Potenzen von Linsenöffnung und Bildwinkel wird nun die sphärische Aberration in der Axe für die ganze Linsenöffnung,

μ_0 und μ_i die Brechungsindices des der ersten brechenden Fläche vorangehenden, bzw. des der letzten brechenden Fläche folgenden Mediums, so sind

d. h. für Strahlen in jeder beliebigen Entfernung von der Axe gleichzeitig beseitigt, eine durch die numerischen Rechnungen schon lange bekannte Thatsache: die Beseitigung der sphärischen Aberration für die Randstrahlen beseitigt genähert auch die sphärische Aberration für die übrigen Strahlen. Nicht dasselbe gilt aber (nicht nur bei den höheren, sondern schon mit Rücksicht auf die zweiten Potenzen von Oeffnungs- und Bildwinkel) für die Strahlen ausser der Axe, d. h. Astigmatismus, Coma und Bildkrümmung können nicht in demselben Maasse weggeschafft werden.

Die Zahl der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen für gegebene Vorschriften ergeben sich hieraus leicht: für die Elimination der chromatischen Aberration und Verschiedenheit der Farbenvergrößerung ergeben sich für zwei Farben drei Bedingungen, für jede weitere Farbe wieder drei Bedingungen; Wegschaffung der sphärischen Abweichung, der Coma und der Bildkrümmung für jede Farbe, jeden Oeffnungs- und jeden Bildwinkel je vier Bedingungen. Also z. B. für die Vereinigung zweier Farben in der Axe und Berücksichtigung eines einzigen Oeffnungs- und eines einzigen Bildwinkels sieben Bedingungen, wozu noch die gegebene Brennweite als achte Bedingung tritt.*) Hieraus ist ersichtlich, dass die grosse Mehrzahl der jetzt construirten Linsensysteme das angestrebte Ziel mit einem ganz bedeutenden und unnöthigen Aufwand von brechenden Flächen erreicht, und dieses bei der Construction zukünftiger Linsensysteme sowohl im Interesse der Einfachheit als der Preise der Linsensysteme zu berücksichtigen sein wird. Allerdings wächst die Zahl der Bedingungsgleichungen ausserordentlich rasch, sobald die Anforderungen erhöht werden. Soll z. B. das System für drei Farben, zwei verschiedene Oeffnungen und zwei Bildwinkel fehlerfrei sein, so wird die Zahl der Bedingungsgleichungen 50. Für gegebene Linsensysteme wird man daher eine Reihe von Bedingungsgleichungen auszuwählen haben, welche dem angestrebten Zwecke am besten entsprechen.

Heidelberg 1898 Juli 13.

N. Herz.

*) Dass überdiess das Verhältniss zwischen Oeffnung, Krümmung und Linsendicke kein unmögliches sein darf, braucht nicht erst besonders hervorgehoben zu werden.

Beobachtung der Mondfinsterniss 1898 Juli 3

auf der Universitäts-Sternwarte zu Charkow.

Während der fast totalen Mondfinsterniss gelang hier die Beobachtung der Verfinsterung einer Anzahl von Kratern. Der verfinsterte Theil des Mondes erschien ziemlich dunkel, doch konnten im 6 zölligen Refractor die grössten Krater auch innerhalb des Schattens noch erkannt werden; in den kleineren Fernrohren gelang das nicht. Während der zweiten Hälfte der Finsterniss zogen beständig Wolken vorüber, die

die Beobachtung der Austritte aus dem Schatten sehr erschwerten. Dazu kam ein aussergewöhnlich starker Thaufall, der die Objective der transportablen Instrumente, die im Freien auf Steinpfeilern aufgestellt waren, so mit Feuchtigkeit bedeckte, dass sie häufig abgewischt werden mussten, da sonst nichts zu sehen war.

Herr Privatdocent *Fewdokimow*, der am Fraunhofer-