II. Ueber ein Brechungsgesetz für den Eintritt des Lichtes in absorbirende Medien; von H. E. J. G. du Bois und H. Rubens.

(Hierzu Taf. II Fig. 2.)

§ 1. Wir sehen uns veranlasst, nochmals auf die Frage der Lichtbrechung an Metalloberflächen zurück zu kommen¹⁾, einmal durch die vorhergehende, im hiesigen Institute ausgeführte, Arbeit des Hrn. Shea; dann auch durch eine, inzwischen veröffentlichte, theoretische Untersuchung von Hrn. H. A. Lorentz²⁾, deren Manuscript der Verfasser uns bereits gütigst zur Verfügung gestellt hatte.

Wir haben früher versucht, aus unseren Beobachtungen eines Specialfalles, der Ablenkung des Lichtes durch Metallprismen, eine allgemeinere, zunächst empirische, Beziehung abzuleiten, welche den *Austritt* des Lichtes aus Metallen in Luft darstellen sollte; ähnlich wie man den Grenzübergang zwischen zwei durchsichtigen Medien nicht etwa durch eine Prismen- oder Linsenformel, sondern durch das Snellius'sche Gesetz am allgemeinsten darstellt. Wir drückten uns damals (a. a. O. § 8. p. 512) wie folgt aus:

„Daher ist es dieser letzte Grenzvorgang (Austritt aus Metall in Luft) und kein anderer, den wir durch unsere Versuche näher kennen lernen können. Durch ihn muss i eindeutig bestimmt sein, wenn i_m gegeben ist. Für unseren Zweck empfiehlt es sich jedoch eher i als unabhängige Variable zu betrachten, da letzterer Winkel der direct gemessene ist. Wir setzen daher $i_m = f(i)$, eine zwar vorläufig unbekannte, aber offenbar einwerthige ungerade Function.“

Zur Berechnung dieser Function wurde dann die Gleichung

$$(1) \quad f(i) = \int_0^i \frac{\beta \, d i}{\alpha + \beta}$$

abgeleitet; darin bedeuten i_m und i die Neigungen der Wellenfronten (Ebenen gleicher Phase) zur Grenzebene im Metall

1) du Bois und Rubens, Wied. Ann. **41**. p. 507. 1890.

2) H. A. Lorentz, Wied. Ann. **46**. p. 255. 1892.

bez. in Luft, α die Ablenkung, β den Prismenwinkel. Diese Integration benutzten wir dann, um Brechungscurven für Nickel, Cobalt und Eisen zu berechnen (a. a. O. Fig. 3, p. 517).

§ 2. Den allgemeinen Verlauf der Curven für Metalle mit geringem Brechungsindex ($n_0 < 1$) haben wir zwar vorhergesagt (a. a. O. § 16); Beobachtungen an solchen wurden aber erst auf unsere Veranlassung von Hrn. Shea unternommen und auf diese zunächst unser Integrationsverfahren angewandt. Dabei wurden aber bald für i_m Werthe erhalten, welche 90° überschritten, ein Fall, der an und für sich physikalisch nicht denkbar ist, da er auf das Eintreten der Totalreflexion in diesen Metallen hindeuten würde, welches in Wirklichkeit sicher nicht stattfindet (vgl. Shea a. a. O. § 10).

Wir waren zuerst geneigt, an der Richtigkeit der Beobachtungen zu zweifeln, da aber alle weiteren, mit neuen Prismen angestellten Versuche das Gleiche ergaben, lenkte sich unser Verdacht von den Messungen auf das Rechenverfahren. Der Zweifel an der Zulässigkeit des letzteren wurde durch die theoretischen Ausführungen von Hrn. Lorentz (a. a. O. §§ 16—19) noch erheblich verstärkt und in bestimmte Bahnen gelenkt. Unser ziemlich versteckter Fehlschluss lässt sich nun genau localisiren: in dem oben citirten Passus ist nämlich die auf den ersten Anblick gerechtfertigte Behauptung: „ i muss eindeutig bestimmt sein, wenn i_m gegeben ist“, unrichtig; die hierauf basirte, an sich richtige, elementare Deduction wird dadurch hinfällig.

Durch die Lorentz'schen Ausführungen erscheinen die Vorgänge in Metallprismen derart klagestellt, dass eine weitere Discussion überflüssig ist. Zugleich ergibt sich aber statt unserer im allgemeinen unzulässigen Integration ein anderes Verfahren, um zu dem Brechungsgesetz zu gelangen, welches sich dann aber auf den *Eintritt* paralleler Lichtbündel gleichförmiger Intensität¹⁾ in die Metalle bezieht.

§ 3. Hr. Lorentz schreibt (a. a. O. § 18, p. 257) mit Bezug auf jenen Vorgang

1) Unter einem Lichtbündel gleichförmiger Intensität verstehen wir ein solches, dessen Amplitude in der Wellenfront constant ist, wie es ja stillschweigend fast immer vorausgesetzt wird. Hr. Lorentz hat a. a. O. gezeigt, wie sich Lichtbündel von ungleichförmiger Intensität in mancher Beziehung anders verhalten.

$$(2) \quad i_m = \arcsin \left(\frac{\sin i}{\chi(i)} \right),$$

worin $\chi(i)$ das variable Brechungsverhältniss n' bedeutet, für welches die Theorie die Gleichung

$$(3) \quad n'^2 = \frac{1}{2} \{ n_0^2 - g^2 + \sin^2 i + \sqrt{4g^2 n_0^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2} \}$$

vorschreibt. Hr. Shea hat diese Function ebenfalls eingeführt und die theoretische Gleichung mit der Erfahrung völlig übereinstimmend gefunden (a. a. O. §§ 17, 26).

Durch Substitution von (3) in (2) und weitere vereinfachende Transformation, ergibt die Theorie als Brechungsgesetz für den Uebergang aus durchsichtigen in absorbirende Medien

$$(A) \quad i_m = \arccot \sqrt{L + \sqrt{L^2 + g^2 n_0^2 \operatorname{cosec}^4 i}}$$

Darin ist der Kürze halber $L = \frac{1}{2} \{ (n_0^2 - g^2) \operatorname{cosec}^2 i - 1 \}$ gesetzt; g und n_0 bedeuten den Extinctionsindex bez. den Brechungsindex bei senkrechter Incidenz (vgl. Shea a. a. O. § 16).

Lässt man nun den Extinctionsindex unbegrenzt abnehmen, so sieht man ohne weiteres, wie (A) für unmerklich absorbirende Medien übergeht in

$$(B) \quad i_m = \arccsc(n_0 \operatorname{cosec} i),$$

bekanntlich die ursprüngliche Gestalt, welche Snellius seinem Gesetze gab¹⁾; letzteres erscheint somit auch hier gewissermaassen als Specialfall einer allgemeineren Beziehung, indem es den Grenzübergang zwischen zwei Medien von verschwindend geringer Absorption beherrscht.

§ 4. Die Eigenschaften der Function (A) haben wir durch die ausgezogenen Brechungscurven (Taf. II Fig. 2) für die Metalle Co, Fe, Ni, Pt, Cu, Ag, Au näher dargestellt.²⁾ Dabei sind die von Hrn. Shea benutzten Werthe von n_0 und g (für rothes Licht) zu Grunde gelegt worden. Die Bildebene wird durch die Diagonale OQ in zwei Gebiete getheilt; links oben befindet sich die Region der geringeren Brechungsverhältnisse ($n' < 1$), rechts unten diejenige der grösseren ($n' > 1$); die Diagonale

1) Die Sinusform wurde dann von Descartes gewählt; vgl. Poggen-
dorff, Geschichte der Physik, p. 311.

2) Die Cobalt- und Nickelcurven sind von der Hilfsabscissenaxe
 $O'R'$ aus aufgetragen, weil sie sonst mit der Eisen- bez. Platincurve fast
genau zusammenfallen würden.

selbst entspricht dem Falle $n' = 1$ und daher $i_m = i$, und bei Prismen $\alpha = 0$. Der Uebertritt einer Curve aus einem Gebiet in das andere durch Schneiden der Diagonale bedeutet daher für Prismen ein Verschwinden der Ablenkung unter Wechsel ihres Vorzeichens. Die Abscissen jener Schnittpunkte sind bestimmt durch die Gleichung

$$(4) \quad i = \arcsin \sqrt{1 + \frac{g^2 n_0^2}{2M}},$$

worin M abgekürzt $= \frac{1}{2}(n_0^2 - g^2 - 1)$ gesetzt ist. Für Metalle, deren Brechungsindex kleiner als Eins ist, gibt es daher zwei Incidenzen, bei denen das Licht ungebrochen eintritt: erstens die senkrechte, zweitens die durch Gleichung (4) bestimmte. Folgende Werthe sind aus dieser Gleichung berechnet:

(Roths Licht)

Kupfer	$i_m = i = 62,9^\circ$
Silber	$= 71,9^\circ$
Gold	$= 76,2^\circ$

Ein Blick auf Fig. 2 zeigt die Uebereinstimmung. Der Wechsel des Vorzeichens der Ablenkung bei Kupferprismen ist von Hrn. Shea (a. a. O. § 25) thatsächlich in der Nähe der vorgeschriebenen Incidenz $i = 63^\circ$ beobachtet worden; bei Silber und Gold würde dieselbe Erscheinung zweifellos eintreten, falls es praktisch durchführbar wäre, bei so beträchtlichen Incidenzen ($i > 70^\circ$) noch Beobachtungen anzustellen.

Schliesslich treffen die Curven senkrecht auf die Gerade $\overline{QR}$; die Schnittpunkte findet man aus der Gleichung

$$(5) \quad i_m = \arccot \sqrt{M + \sqrt{M^2 + g^2 n_0^2}}$$

worin M dieselbe Bedeutung hat wie in (4).

Da die Gerade $\overline{PQ}$ ($i_m = 90^\circ$) nirgends von den Curven geschnitten wird, tritt auch keine Totalreflexion ein, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

§ 5. Aehnlich wie bei unserer früheren Darstellung (a. a. O. Fig. 3) haben wir auch in der vorliegenden Fig. 2 für Kupfer, Gold und Silber hypothetische (punktirte) Curven gegeben, welche unter Voraussetzung der Gültigkeit des Snellius'schen Sinusgesetzes construirt sind. Die bei diesen Metallen mit geringem Brechungsindex ausserordentlich starke Wirkung der Absorption tritt daraus hervor; während nämlich im Ur-

sprunge die Brechungscurven die Snellins'schen noch tangiren, werden sie bei höheren Incidenzen mehr und mehr nach rechts verschoben. Bei den übrigen Metallen Cobalt, Eisen, Nickel, Platin würden die Snellius'schen Curven auch ein wenig links über den thatsächlichen liegen, indessen ist der Unterschied hier so gering, dass wir die hypothetischen Curven im Interesse der Deutlichkeit in diesen Fällen nicht eingezeichnet haben. Der Einfluss der Absorption ist hier, wenn auch weit geringer, so doch qualitativ derselbe, wie für Metalle mit geringem Brechungsindex. Die Erscheinung ist somit allgemein für alle absorbirende Medien charakteristisch.

Schliesslich möchten wir noch bemerken, dass die Anwendung des früher von uns benutzten, streng genommen unzulässigen, Integrationsverfahrens unsere damaligen Resultate für Eisen, Kobalt und Nickel, wegen des hohen Brechungsindex dieser Metalle, doch kaum merklich beeinflusst hat (vgl. a. a. O. §§ 13, 15). Wir halten daher folgende, damals ausgesprochene, Behauptungen qualitativ aufrecht und können sie ebenso gut auf den uns jetzt beschäftigenden Fall des *Eintritts* gleichförmig intensiver Lichtbündel in absorbirende Medien anwenden.

III. „Von den durch diesen Brechungsindex (definiert als $\lim i = 0 (\sin i / \sin i_m)$) charakterisirten idealen durchsichtigen Substanzen weichen die Metalle bei zunehmender Incidenz mehr und mehr in dem Sinne ab, dass einem gegebenen i_m ein *grösseres* i , resp. einem gegebenen i ein *kleineres* i_m entspricht (a. a. O. § 13, p. 518).“

Die Werthe der Abweichungen sind aus Fig. 2 zu ersehen; sie nehmen für die (bei rothem Lichte) untersuchten 7 Metalle in der Reihenfolge Au, Ag, Cu, Pt, Ni, Co, Fe ab.

„Indessen lässt sich der Verlauf der beiden Silber- und Goldcurven vorhersagen. Zunächst tangiren sie die gezeichneten Curven im Ursprung, biegen sich aber immer mehr concav der Abscissenaxe zu und schneiden unter keinen Umständen die Gerade $\overline{PQ}$, da dies totale Reflexion bedeuten würde; endlich müssen sie senkrecht zu $\overline{QR}$ auftreffen. Ihr Charakter ist also wesentlich derselbe, als der unserer für Nickel u. s. w. gefundenen Curven“ (a. a. O. § 16).

Berlin, Physik. Inst. der Univ., 25. Juli 1892.

Fig. 3.

Fig. 1.

Fig. 1a.

Fig. 2.

Taf. II.

Shea Fig. 1-1a. H.E.J. G. du Bois u. Rubens Fig. 2. Ebert Fig. 3.