selbstverständlich, bei der Berechnung alle möglichen aber unbekannten Ursachen, welche in der Wirklichkeit die Geschwindigkeit modificiren, als Reibung an der Erdoberfläche, localer Widerstand, Temperatur-Veränderung u. s. w. unberücksichtigt bleiben müssen.

IV. Ueber den hydraulischen Druck von Wasser, welches zwischen zwei Platten unter Wasser ausströmt; von Theodor Reishaus, stud. math.

Im Winter von 1857 zu 58 unternahm ich, angeregt durch den Hrn. Prof. Schönnemann und unterstützt durch Hrn. Prof. Knoblauch, der mir mit außerordentlicher Freundlichkeit Hilfsmittel jeglicher Art bot, folgende hydraulische Versuche.

Auf der Brücke *B* (Fig 1 Taf. IV) der Schönnemann'schen Brückenwaage war der Apparat festgeschraubt, den ich bei den Versuchen immer den „Abfänger“ genannt habe. Dieser Abfänger besteht zunächst in dem Gestell *G*, welches die Säule *a* trägt, an der sich der eiserne Querbalken *b* mittels der Hülse *c* auf und niederschieben kann. Die Hülse *c* wird vermöge einer Metallfeder, die sich in derselben befindet, an *a* angedrückt und kann nöthigenfalls durch die Schraube *d* festgeschraubt werden. Der eiserne Querbalken *b* trägt an dem anderen Ende eine zweite Hülse *e*, in der sich ein unten rechtwinklig gebogener Metallstab *k* auf- und niederschieben läßt. Dieser Stab wird ebenfalls durch eine Feder in *e* gehalten und kann durch die Schraube *l* befestigt werden. Der horizontale Arm desselben trägt eine verticale Schraube, auf welche die Messingplatte *m* geschraubt wird. Das Rohr *R*, welches außerhalb der Waage irgend wie festgemacht ist, trägt eine zweite Platte *n*. Beide Platten *m* und *n*, haben gleichen Durchmesser (in meinen Ver-

suchen 4 Zoll), befinden sich in dem mit Wasser gefüllten Gefäße *A* und können durch die Verschiebung des Messingstabes *k* einander beliebig nahe gebracht werden. Das Rohr *R* führt Wasser von constanter Druckhöhe zwischen die beiden Platten.

Jede Wirkung, welche auf die Platte *m* ausgeübt wurde, konnte ich auf diese Weise an der Scale der Waage ablesen und in Gewichten ausdrücken, und es war mir auf diese Weise möglich, den Druck des zwischen den beiden Platten ausfließenden Wassers zu bestimmen.

Mit dieser Vorrichtung beobachtete ich nun folgende Erscheinungen.

Im Anfange, als ich eine nur geringe Druckhöhe, von etwa 6 Zollen, anwandte, und die Oeffnung *o* (Fig 1 Taf. IV) der Platte *n* vertical war, bemerkte ich allerdings keine Anziehung der Platte *m*; allein der Stofs, welchen der aus *o* ausfließende Wasserstrahl, ohne Vorhandenseyn der Platte *n*, auf die Platte *m* ausübte, wurde durch die Anwesenheit der Platte *n* um ein Bedeutendes verringert. Ich fand nämlich bei einer kreisförmigen Ausflußöffnung *o*, deren Durchmesser $\frac{1}{8}$ Zoll war, ohne die Platte *n*, daß der Stofs des Wassers gegen die Platte *m* etwas über $\frac{1}{10}$ Loth betrug, während die Anwesenheit der Platte *n* denselben bei gehöriger Annäherung der Platten auf $\frac{1}{20}$ Loth verminderte.

Um nun den Stofs des Wassers gegen die Platte *m* zu vermeiden oder wenigstens zu verringern, brachte ich in der Oeffnung *o* einen kleinen Kegel an, wie aus (Fig. 2 Taf. IV) deutlich wird.

Bei dieser Einrichtung fand ich, daß wenn die Platten um $\frac{1}{8}$ Zoll von einander abstanden, eine Anziehung derselben von etwa $\frac{1}{10}$ Loth stattfand; entfernte ich die Platten mehr und mehr, so wurde die Anziehung immer geringer und ward Null bei einer Entfernung der Platten um $\frac{1}{2}$ Zoll.

Um dem Wasser eine größere Geschwindigkeit zu geben, bediente ich mich ferner einer Druckhöhe von 28 Zollen. Bei dieser Druckhöhe war es unnöthig, die Platte mit dem Kegel (Fig. 2 Taf. IV) anzuwenden; denn die Platte

mit verticalem Ausflufs (Fig. 2 Taf. IV) gab selbst in ziemlich grofser Entfernung beider Platten eine bedeutende Anziehung.

Ich fand nämlich, indem die Platte n 15 Zoll unter dem Niveau des Wassers im Gefäfse A (Fig 1 Taf. IV) sich befand, und m von n um $\frac{1}{5}$ Zoll abstand, eine Anziehung von etwas über 0,5 Loth;

bei einem Abstände beider Platten um $\frac{2}{3}$ Zoll: 0,35 "

" " " " " " $\frac{3}{8}$ " 0,23 "

" " " " " " $\frac{4}{8}$ " 0,16 "

" " " " " " $\frac{9}{16}$ " 0,07 "

" " " " " " $\frac{5}{8}$ " 0, 0 "

Ging ich über diese Entfernung hinaus, so erhielt ich keine Anziehung mehr, sondern einen Stofs, der immer gröfser wurde, je weiter ich die Platten von einander entfernte. Erst in einer Entfernung um $\frac{5}{4}$ Zoll war der Stofs auf die Platte m eben so grofs, wie wenn die obere Platte n gar nicht vorhanden gewesen wäre.

Zu diesen Auseinandersetzungen habe ich noch hinzuzufügen, dafs beim Beginn eines jeden Experiments, d. h. also, wenn das Wasser im Rohre R sich eben in Bewegung gesetzt hatte, ein Steigen der Zunge der Waage bemerkbar wurde, welches anzeigt, dafs die Platte m herunterging, sich also von n entfernte; erst nach Verlauf einer kurzen Zeit traten die oben angegebenen Erscheinungen ein, die aber dann während eines jeden Versuches constant waren.

Ich bin nun freilich nicht im Stande, eine erschöpfende Erklärung der genannten Erscheinungen zu geben, da der hier stattfindende Vorgang ein sehr zusammengesetzter ist und noch manche Dunkelheiten enthält, deren Aufklärung uns manche wichtige Eigenschaft des Flüssigen kennen lehren würde. Indessen liegen einige Gedanken, die zu der Erklärung der merkwürdigen Erscheinungen führen, ziemlich nahe.

Wir wollen zu dem Ende voraussetzen, das Wasser erführe keine Reibung an den Wänden des Rohres R , noch irgend ein anderes Hindernifs, bis es zwischen die Platten

gelangt. Diese Voraussetzung dürfen wir machen; denn die Hindernisse würden gerade dieselbe Wirkung haben, als eine Verringerung der Druckhöhe. Wir wollen uns ferner vor der Hand den Stofs des aus der Oeffnung o (Fig. 2 Taf. IV) mit bedeutender senkrechter Geschwindigkeit ausfliessenden Wassers gegen die Platte m wegdenken, und wollen endlich, wozu wir vielleicht am wenigsten berechtigt sind, annehmen, dafs die Bewegung des Wassers zwischen den beiden Platten der Hypothese vom Parallelismus der Schichten genüge, d. h., dafs eine Wasserschicht, welche in einem bestimmten Augenblicke einen mit dem Rande concentrischen Cylinderring bildet, nach einiger Zeit einen weiteren aber immer noch mit dem Rande concentrischen Cylinderring bilde, so dafs wir also in allen Theilen eines und desselben Cylinderringes eine und dieselbe Geschwindigkeit setzen können. Unter diesen Voraussetzungen dürfte eine Erklärung der Erscheinung der Anziehung leicht zu geben seyn.

Befindet sich nämlich in einem Gefäfse Wasser in Bewegung, indem durch eine Oeffnung Wasser abfliefst, und nehmen wir an, dafs das Niveau immer in gleicher Höhe erhalten werde, so dafs wir an der Oberfläche die Geschwindigkeit 0 setzen können, so ist der Druck, den ein Wassertheilchen, das sich in der Tiefe h unter dem Niveau befindet und mit der Geschwindigkeit v behaftet ist, auszuhalten hat, dem einer Wassersäule von der Höhe

$$h - \frac{v^2}{M}$$

entsprechend, wo M eine Constante ist, welche in den Lehrbüchern als $2g$ angegeben wird, welche ich aber lieber mit jenem allgemeinen Zeichen bezeichnen werde. Die hydraulische Druckhöhe ist also gleich der statischen, verringert um die Gröfse $\frac{v^2}{M}$. Das Wasser, welches aus der Oeffnung ausfliefst, steht unter dem Druck des dasselbe umgebenden Mittels. Ist diefs die atmosphärische Luft, so steht das ausfliessende Wasser unter demselben Druck, wie das Niveau; mithin mufs, wenn H die Tiefe der Oeff-

nung unter dem Niveau und V die Ausflufsgeschwindigkeit bezeichnet,

$$H - \frac{V^2}{M} = 0$$

seyn. Ueßt dagegen das Mittel, in welches das Wasser durch die Oeffnung ausfließt, einen Druck aus, welcher, um den Druck einer Wassersäule von der Höhe H' größer ist als am Niveau, so muß

$$H - \frac{V^2}{M} = H'$$

seyn. Der Ausdruck $h - \frac{v^2}{M}$ wird negativ, wenn v einen solchen Werth hat, daß $\frac{v^2}{M}$ größer wird, als h ; d. h. in diesem Falle würde das betrachtete Wassertheilchen unter einem geringeren als dem atmosphärischen Drucke stehen.

Weißbach hat nun gefunden, daß bei dem von ihm in seiner Hydraulik, S. 171 (Fig. 96) beschriebenen Gefäße, welches aus zwei größeren Wasserbehältern A und B (Fig. 4 Taf. IV) besteht, die durch ein enges Rohr c mit einander verbunden sind, an dieser Verbindungsstelle ein negativer Druck stattfindet, wenn das Wasser durch die Oeffnung F ausfließt. Er brachte nämlich die Stelle c durch ein nach unten gebogenes Rohr s mit einem Wassergefäße G in Verbindung und fand, daß das Wasser aus letzterem in dem Rohre s in die Höhe stieg. Diese Erscheinung erklärt sich aus der obigen Formel sofort, indem man bedenkt, daß wenn c zum Beispiel dieselbe Weite wie F hat, auch die Geschwindigkeit v bei c der Ausflufsgeschwindigkeit V gleich seyn muß, daß der Abstand h der Stelle c vom Niveau kleiner ist als die Tiefe H der Ausflufsöffnung, mithin, da $H - \frac{V^2}{M} = 0$ ist, $h - \frac{v^2}{M}$ negativ seyn muß; daher wird die in dem Rohre s zunächst vorhandene und unter atmosphärischem Drucke stehende Luft in c hineingedrückt, worauf denn das Wasser aus G nachfolgt.

Die von mir beobachtete Erscheinung scheint mir bis zu einer bestimmten Gränze hin nichts anderes zu seyn, als

eine Modification der Weifsbach'schen. Man wird nämlich bis zu einem bestimmten Abstände der beiden Platten m und n den von demselben eingeschlossenen Raum als ein Gefäß ansehen dürfen, und den von ihren Rändern begränzten Cylindermantel als eine rings um das Gefäß angebrachte Oeffnung. Bedeutet nun F die Gröfse dieser Oeffnung und a den Abstand beider Platten, $2R$ den Durchmesser derselben, so ist:

$$F = 2R\pi \cdot a.$$

Die Ausflufsgeschwindigkeit V wird bei den oben gemachten Voraussetzungen bestimmt durch die Gleichung

$$H - \frac{V^2}{M} = H'$$

wo in unserem speciellen Falle H die Tiefe der Platten unter dem Niveau des durch R fließenden Wassers und H' die Tiefe derselben unter dem Niveau des Wassers im Gefäße A (siehe Fig. I Taf. IV) bedeutet.

Betrachten wir nun einen mit dem Rande concentrischen Cylindermantel, dessen Basis den Radius r hat, und ist v die Geschwindigkeit an der betrachteten Stelle, so ist die hydraulische Druckhöhe an dieser Stelle gleich $H - \frac{v^2}{M}$. Der Inhalt f des betrachteten Cylindermantels ist $2r\pi \cdot a$. Die Wassermenge, die in der Zeiteinheit durch f strömt, muß dieselbe seyn, wie die durch F ausströmende, also muß $f \cdot v = F \cdot V$ seyn, also

$$v = \frac{F}{f} \cdot V = \frac{R}{r} \cdot V;$$

also ist v größer als V ; mithin geht die Formel $H - \frac{v^2}{M}$ über in $H - \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{V^2}{M}$, eine Gröfse, welche offenbar kleiner als H' ist. Demnach ist an der betrachteten Stelle der hydraulische Druck geringer, als der von außen wirkende statische Druck, welcher der Höhe H' entspricht; dasselbe gilt aber von jeder Stelle zwischen den beiden Platten. So lange wir also den Raum zwischen den beiden Platten als ein zusammenhängendes Gefäß betrachten können, dessen Flüssigkeitstheilchen gleichmäfsig an der Bewegung theilnehmen,

so lange ist der hydraulische Druck, unter welchem das Wasser zwischen den beiden Platten steht, geringer als der von außen auf die Platten wirkende Druck, und zwar nimmt jener nach dem Rande hin zu; denn je mehr $r = R$ wird, um so mehr wird $H - \frac{R^2}{r^2} \frac{V^2}{M} = H'$.

Indessen wäre es falsch zu behaupten, daß der hydraulische Druck gerade in der Mitte der Platte am geringsten ist. Denn in der Mitte wirkt der Stofs des aus dem Rohre R mit senkrechter Geschwindigkeit herausströmenden Wassers gegen die Platte m . Diese senkrechte Geschwindigkeit muß das Wasser erst vollständig verlieren, um dann die waagerechte anzunehmen. Durch dieß fortwährende Strömen des Wassers gegen die Platte m übt dasselbe einen constanten Druck auf die Platte aus. Die Gröfse dieses Druckes ist die Trägheitskraft, welche das Wasser bei dem Verluste an Geschwindigkeit entwickelt, und wird demnach, wie leicht zu sehen, ausgedrückt durch

$$\frac{\delta \cdot q \cdot u^2}{g},$$

wo q die Gröfse der Oeffnung 0 (Fig. 2 Taf. IV), u die Geschwindigkeit des bei 0 austretenden Wassers und δ das Gewicht der Volumeneinheit Wasser bezeichnet.

In Folge dieses Stofses bemerkt man auch beim Beginn eines jeden Experimentes ein Steigen der Zunge der Waage, was ein Herabgehen der Platte m anzeigt; im weiteren Verlaufe des Experimentes wird die Wirkung des Stofses durch den nunmehr eintretenden geringeren Druck des Wassers zwischen den Platten aufgehoben.

Die Wirkung dieses Stofses auf die Platte m ist es auch, welche die bei den weiteren Abständen beobachteten Erscheinungen hervorruft.

Die Geschwindigkeit V des Wassers beim Austritt aus dem Plattenraume ist unabhängig von dem Abstände der Platten; denn sie wird, wie wir gesehen haben, bestimmt durch die Gleichung

$$H - \frac{V^2}{M} = H';$$

ebenso ist die Geschwindigkeit an irgend einer Stelle zwischen den beiden Platten unabhängig vom Abstände derselben; denn sie wird ausgedrückt durch die Formel

$$v = \frac{R}{r} \cdot V;$$

mithin ist der hydraulische Druck, so lange wir die Flüssigkeit zwischen den beiden Platten als eine zusammenhängende betrachten dürfen, für jeden Abstand derselbe, also auch die Differenz desselben und des von außen auf die Platten wirkenden statischen Druckes constant. Da aber durch φ in der Zeiteinheit das Wasservolumen $\varphi \cdot u$, durch F das Volumen $F \cdot V$ fließt, so ist

$$\varphi \cdot u = F \cdot V, \text{ also } u = \frac{F \cdot V}{\varphi} = \frac{2R\pi \cdot V}{\varphi} \cdot a.$$

Die Geschwindigkeit u ändert sich also in demselben Maasse wie a ; also wächst der Stofs $\frac{\delta \varphi u^2}{g}$ wie das Quadrat von a , ist also bei doppeltem Abstände bereits vier Mal so groß. Folglich muß die von jener Differenz der Drucke innen und außen hervorgerufene Anziehung der Platte m bei einem bestimmten a aufgehoben und bei noch größerem a in eine Abstofsung verwandelt werden.

Es bliebe nun noch die Frage zu erörtern, bis zu welchem Abstände hin man die Flüssigkeit zwischen den beiden Platten als eine zusammenhängende, an der Bewegung gleichmäßig theilnehmende zu betrachten hat; denn dafs hier eine Gränze stattfindet, sehen wir schon an der beobachteten Thatsache, dafs wenn der Abstand die Gröfse von $\frac{5}{4}$ Zollen überschritten hat, die Erscheinungen dieselben sind, ob die obere Platte vorhanden ist, oder nicht. Allein um hierüber etwas feststellen zu können, fehlen mir die Experimente, und in meiner Stellung als Student ist es mir leider nicht vergönnt, zu denselben Mittel und Mafse herbeizuschaffen. Ich hege aber die Hoffnung, dafs die bezeichneten Untersuchungen zu wichtigen Resultaten führen würden über die bis jetzt noch völlig unbekannte *Viscosität* oder *Zähigkeit* oder, wie es Weifsbach nennt, *Klebrigkeit* des

Wassers. Denn das, glaube ich, leuchtet wohl ein, daß das Wasser zwischen den Platten nur in Folge dieser Eigenschaft als eine zusammenhängende Masse betrachtet werden kann.

Erst, wenn diese Frage gehörig beantwortet ist, ist es möglich, die gefundenen Resultate der Rechnung zu unterwerfen.

Sollte daher nicht vorher ein Anderer die genannten Untersuchungen übernehmen, so sehe ich mich genöthigt, diese Arbeit erst in einer späteren Zeit zu vervollständigen.

In derselben Weise ließen sich auch die ähnlichen Erscheinungen bei Luft, die in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts viel Aufsehen erregten, besser als es von Clément und Hachette geschehen ist, untersuchen, und es dürfte deshalb die durch ihre an allen Theilen der Brücke gleiche Empfindlichkeit ausgezeichnete Schönmann'sche Brückenwaage in Verbindung mit dem Abfänger, der als eine willkürlich bewegliche Verlängerung der Brücke anzusehen ist, noch einen wesentlichen Apparat für hydraulische Versuche bilden.

Schließlich benutze ich die Gelegenheit, sowohl dem Hrn. Prof. Schönmann, als Hrn. Prof. Knoblauch öffentlich meinen Dank auszusprechen.

Berlin den 6. Juli 1858.