

## 21.

## Mémoire sur la résolution de quelques équations indéterminées.

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

## I n t r o d u c t i o n.

Il existe un grand nombre d'équations indéterminées qui n'admettent qu'un petit nombre de solutions entières : mais quoique dans ce cas le problème devienne beaucoup moins compliqué, que lorsque le nombre des solutions est infini, les géomètres n'ont pas cherché à résoudre par une méthode spéciale le cas le plus simple, comme il paraissait naturel de le tenter. En généralisant une méthode que nous avons publiée pour la première fois en 1820, nous sommes parvenus à résoudre complètement un grand nombre d'équations indéterminées, algébriques ou transcendantes, de tous les degrés, contenant deux ou un plus grand nombre d'inconnues.

Lorsqu'on doit résoudre en nombres entiers une équation à plusieurs inconnues, si l'on peut trouver des fonctions de ces inconnues, telles que ces fonctions doivent toujours être comprises entre deux limites numériques données, quelle que soit la valeur que l'on attribue aux variables, il sera toujours possible de réduire l'équation proposée à une autre équation, dans laquelle le nombre des inconnues sera égal au nombre des inconnues de l'équation proposée, moins le nombre des fonctions dont on aura déterminé les limites. Ainsi lorsque le nombre de ces fonctions, augmenté de l'unité, sera égal au nombre des inconnues de l'équation proposée, on aura résolu complètement le problème.

Dans le mémoire publié en 1820, nous avons traité aussi des formes cubiques et de celles du quatrième degré, qui se reproduisent lorsqu'elles sont multipliées par des formes semblables. Maintenant nous reprenons la même matière en l'augmentant considérablement, et nous parvenons à démontrer qu'un nombre quelconque rationnel positif, est toujours la somme de quatre cubes positifs en nombres rationnels. Enfin nous résolvons dans ce mémoire, une classe assez étendue d'équations indéterminées de tous les degrés, dont Lagrange avait considéré les plus simples.

## A n a l y s e.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$\left\{ \begin{aligned} &Ab^n v^n \pm Aq^n y^n + F_{n-1}(v, y) + F_{n-2}(v, y) \dots + F_{n-m}(v, y) \dots \\ &\dots + F_2(v, y) + F_1(v, y) + T \end{aligned} \right\} = 0,$$

dans laquelle  $F_{n-m}(v, y)$  représente en général un polynome homogène en  $v$  et  $y$ , du degré  $n-m$ , à coefficients rationnels. On pourra d'abord supposer que tous les coefficients sont entiers, et que l'on cherche seulement les solutions entières et positives; car tous les autres cas se rapportent à celui-ci, en réduisant les fractions au même dénominateur, et en changeant les signes des variables lorsque cela est nécessaire. Puis on mettra l'équation proposée sous la forme

$$\left\{ \begin{aligned} &Ab^n v^n + Bv^{n-1} + v^{n-2}(a + by) + v^{n-3}(a_1 + b_1 y + c_1 y^2) \\ &\dots + v(a_m + b_m y + c_m y^2 \dots + p_m y^{n-2}) \\ &\pm Aq^n y + G y^{n-1} + H y^{n-2} \dots + S y + T = 0 \end{aligned} \right\} = 0;$$

et en multipliant tous les termes de cette équation par  $q^n b^n$ , et en faisant  $qy = z$ ,  $bv = x$ , on la transformera dans la suivante

$$\left\{ \begin{aligned} &Ab^n q^n x^n + Bq^n b x^{n-1} + b^2 x^{n-2}(a q^n + b q^{n-1} z) + b^3 x^{n-3}(a_1 q^n + b_1 q^{n-1} z + c_1 q^{n-2} z^2) \\ &\dots + b^{n-1} x(a_m q^n + b_m q^{n-1} z \dots + p_m q^2 z^{n-2}) \pm Ab^n q^n z^n + G q b^n z^{n-1} \dots + T q^n b^n \end{aligned} \right\} = 0,$$

dans laquelle les coefficients de  $x^n$  et de  $y^n$ , seront égaux: si à présent l'on suppose  $x > z$ , et que l'on fasse  $x = z + u$ , on aura, en développant,

$$44. \left\{ \begin{aligned} &Ab^n q^n ((z+u)^n \pm z^n) + Bq^n b (z+u)^{n-1} + b^2 (a q^n + b q^{n-1} z) (z+u)^{n-2} \\ &\dots + G q b^n z^{n-1} \dots + T q^n b^n \end{aligned} \right\} = 0.$$

Maintenant le premier terme de cette équation, est un polynome homogène du degré  $n$ , en  $z$  et  $u$ , ayant tous ses coefficients positifs; et tous les autres termes sont tels, que les mêmes puissances de  $z$ , qui dans le premier terme sont multipliées par des puissances données de  $u$ , seront multipliées dans les autres termes par des puissances moindres de  $u$ . De sorte que l'on pourra toujours trouver une valeur entière et positive de  $u = L$ , telle qu'en faisant  $u = L + \delta$ , ( $\delta$  étant un nombre quelconque positif) tous les coefficients de  $z$ , dans l'équation (44.), restent toujours positifs; et comme par supposition  $z$  ne peut avoir que des valeurs positives, l'équation (44.) dans laquelle on a fait  $u > L$ , ne saurait subsister. Par conséquent on devra faire

$$u = 0, \quad u = 1, \quad u = 2, \quad \dots \quad u = L;$$

et en substituant successivement ces valeurs dans l'équation (44.) on aura une série de  $L + 1$  équations à une seule inconnue, dont les facteurs rationnels, s'il en existe, fourniront toutes les valeurs positives de  $z$  qui résolvent l'équation (44.).

Nous avons supposé  $x > z$ , si l'on avait au contraire  $z > x$ , on ferait  $z = x + u_1$ , et l'on obtiendrait la limite de  $u_1$  de la même manière que l'on a trouvé la limite de  $u$ .

De cette manière nous avons trouvé toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée; pour trouver les solutions entières et négatives, l'on n'aurait qu'à changer les signes des variables, comme nous l'avons déjà indiqué.

Soit proposée l'équation à deux inconnues

$$f(x, y) \cdot F(x, y) = F_1(x, y),$$

on pourra toujours en avoir toutes les solutions entières et positives, lorsque les trois fonctions

$$f(x, y), \quad F(x, y), \quad F_1(x, y),$$

étant rationnelles et entières, les signes des termes qui contiennent les plus grandes puissances de  $x$  et de  $y$  dans le polynome  $f(x, y)$  seront tous égaux, et que les exposans de ces puissances ne seront pas moindres que ceux des puissances les plus élevées contenues dans le polynome  $F_1(x, y)$ ; et on aura de même toutes les solutions entières et négatives, lorsqu'en changeant les signes des inconnues, les puissances les plus élevées de  $x$  et de  $y$ , comprises dans le polynome  $f(x, y)$ , seront toutes du même signe; ou du moins pourront se réduire, à l'aide de quelque artifice de calcul, à n'avoir que le même signe. En effet, en faisant

$$x = x_1 + u, \quad y = y_1 + t,$$

la fonction  $f(x, y)$ , se réduira aisément à avoir tous ses termes du même signe, et l'on déterminera les limites de  $u$  et de  $t$ , qui deviendront de cette manière des coefficients numériques: alors on pourra trouver un nombre entier et positif  $A$ , tel que l'on ait toujours, pour des valeurs entières et positives des inconnues, en prenant  $f(x_1, y_1)$  avec tous les termes positifs, l'inégalité

$$(A + r)f(x_1, y_1) > F_1(x_1, y_1);$$

( $r$  étant une quantité positive quelconque) et l'on pourra toujours déterminer un autre nombre entier  $B$  tel que l'on ait (pour des valeurs entières et positives des inconnues, et en prenant encore la fonction  $f(x_1, y_1)$ ) po-

sitivement) l'inégalité

$$(B-r)f(x_1, y_1) < F_1(x_1, y_1);$$

d'où il résulte que  $F_1(x_1, y_1)$ , ne pourra avoir qu'un nombre limité de valeurs comprises entre  $B$  et  $A$ ; de manière qu'en faisant successivement

$$F_1(x_1, y_1) = B, \quad F_1(x_1, y_1) = B + 1, \dots, F_1(x_1, y_1) = A,$$

on aura un nombre  $A - B + 1$  d'équations qui, étant combinées avec l'équation proposée, fourniront par l'élimination un nombre égal d'équations à une seule inconnue, d'où l'on tirera toutes les solutions de l'équation proposée.

Il est facile d'appliquer ce principe aux équations contenant plus de deux inconnues, de la forme

$f(x, y, z, \dots \text{etc.}) f_1(x, y, z, \dots \text{etc.}) \dots f_n(x, y, z, \dots \text{etc.}) = F(x, y, z, \dots \text{etc.})$ ,  
pourvu que le nombre des facteurs qui composent le premier membre soit égal au moins au nombre des inconnues; et l'on voit que la forme des fonctions

$$f, f_1, \dots, f_n, F,$$

peut être algébrique ou transcendante.

Soit proposé, par exemple, de trouver toutes les solutions entières et positives de l'équation transcendante

$$x^y(x^2 - y^2) = 2y^3,$$

que l'on pourra réduire à la forme suivante

$$(x - y^2) \left( 1 + y \log x + \frac{y^2}{1.2} (\log x)^2 + \frac{y^3}{1.2.3} (\log x)^3 \dots + \text{etc.} \right) = 2y^3;$$

il est évident que les deux inégalités

$$x > 2, \quad x^2 - y^2 > 11,$$

ne pourront pas subsister ensemble, parceque si elles pouvaient exister en même tems, le premier membre de cette équation serait toujours plus grand que le second, tant que les nombres  $x$  et  $y$  resteraient positifs. Alors il faudra que l'on ait l'une des équations

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2; \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 = 1,$$

$$x^2 - y^2 = 2, \quad x^2 - y^2 = 3, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad x^2 - y^2 = 5, \quad x^2 - y^2 = 6, \\ x^2 - y^2 = 7, \quad x^2 - y^2 = 8, \quad x^2 - y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 10, \quad x^2 - y^2 = 11.$$

Mais les équations

$$x^2 - y^2 = 2, \quad x^2 - y^2 = 6, \quad x^2 - y^2 = 10,$$

ne peuvent avoir aucune solution entière; et parmi les 12 équations qui restent, il n'y a que les deux équations  $x = 0, \quad x^2 - y^2 = 0$ , qui étant

combinées avec l'équation proposée servent à la résoudre: on déduit de là que l'équation

$$x^y (x^2 - y^2) = 2y^3,$$

ne peut se résoudre en nombres entiers et positifs, qu'en faisant  $x = 0$ ,  $y = 0$ . On pourrait, de la même manière trouver les solutions entières et négatives de l'équation proposée,

L'équation

$$Ab^n x^n - Aq^n y^n = F_{n-1}(x, y) + F_{n-2}(x, y) \dots + T,$$

qui est semblable à celle que nous avons déjà considérée, peut se résoudre assez facilement par la méthode que nous venons d'exposer; car cette équation peut se réduire à la forme

$$f(x, y) \cdot F(x, y) = F_1(x, y),$$

en faisant

$$F(x, y) = A(bx - qy); \quad f(x, y) = b^{n-1}x^{n-1} + b^{n-2}x^{n-2}qy \dots + q^{n-1}y^{n-1};$$

$$F_1(x, y) = F_{n-1}(x, y) + F_{n-2}(x, y) \dots + T;$$

et on pourra de cette manière trouver toutes les solutions entières et positives de l'équation proposée. Si l'on voulait résoudre l'équation

$$Ab^n x^n + Aq^n y^n = F_{n-1}(x, y) + F_{n-2}(x, y) \dots + T,$$

il faudrait multiplier tous ses termes par  $b^n x^n - q^n y^n$ , afin de rendre le premier membre décomposable dans les deux facteurs

$$A(bx - qy), \quad b^{2n-1}x^{2n-1} + b^{2n-2}x^{2n-2}qy \dots + q^{2n-1}y^{2n-1},$$

le second desquels a tous ses termes positifs. De de cette manière l'on trouve toutes les solutions entières et positives; les solutions entières et négatives, s'obtiennent en changeant les signes des variables.

En général, étant proposé de résoudre en nombres entiers une équation à  $n$  inconnues, si l'on peut former, avec ces mêmes inconnues,  $m$  fonctions entières, chacune desquelles, pour des valeurs quelconques des inconnues, doive être moindre que  $L + 1$ , et plus grande que  $L_1$ , ( $L$  et  $L_1$  étant deux nombres entiers) en égalant successivement chacune de ces fonctions aux nombres

$$L_1 + 1, \quad L_1 + 2, \quad \dots \quad L,$$

on aura  $m(L - L_1)$  équations; et les solutions entières de l'équation proposée, devront se trouver parmi les racines entières de ces dernières équations; et si la nature des fonctions que l'on a trouvées est telle, qu'en combinant les divers systèmes d'équations qui en résultent avec l'équation proposée on puisse éliminer  $m$  inconnues, on obtiendra une équation plus

simple qui ne contiendra que  $n - m$  inconnues; et lorsque  $m = n - 1$ , l'équation proposée sera résolue complètement.

Soit proposé de résoudre en nombres entiers l'équation à coefficients rationnels

$$45. \quad a^2 x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = z^2;$$

on pourra toujours supposer que les coefficients de cette équation sont entiers, car s'ils ne l'étaient pas, ils deviendraient tels en les réduisant au même dénominateur, et en multipliant toute l'équation par le carré de ce dénominateur. De plus on supposera que les inconnues  $x$  et  $z$ , sont positives; car si elles sont négatives, on pourra changer leurs signes et les rendre positives; et l'on admettra que tous les coefficients du premier membre sont positifs; car s'il y en avait de négatifs, on les rendrait tous positifs en posant  $x = x_1 + h$ , et en déterminant  $h$  convenablement.

Maintenant si l'on multiplie par  $4a^2$  tous les termes de l'équation (45.), et que l'on fasse  $4a^2 z^2 = (2a^2 x^2 + b x + v)^2$ , on aura en développant:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a^4 x^4 + 4a^2 b x^3 + 4a^2 c x^2 + 4a^2 d x + 4a^2 e \\ - 4a^4 x^4 - 4a^2 b x^3 - (4a^2 v + b^2) x^2 - 2b v x - v^2 \end{array} \right\} = 0,$$

et partant

$$46. \quad (4a^2 v + b^2 - 4a^2 c) x^2 + (2b v - 4a^2 d) x + v^2 - 4a^2 e = 0.$$

Dans cette dernière équation  $v$  peut être positif ou négatif; si on le suppose positif, il ne pourra jamais surpasser un nombre  $L$  qui, substitué pour  $v$  dans l'équation (46.), rendrait tous ses termes positifs; alors on devra faire successivement

$$v = 0, 1, 2, 3, \dots, L-1,$$

et on obtiendra par l'élimination toutes les solutions entières et positives qui correspondent à l'hypothèse de  $v$  positif. Soit  $v$  négatif et égal à  $-t$ , et soit  $t < x$ ; en substituant cette valeur dans l'équation (46.), elle deviendra

$$47. \quad (b^2 - 4a^2 c - 4a^2 t) x^2 + (-2b t - 4a^2 d) x + (t^2 - 4a^2 e) = 0:$$

maintenant si l'on suppose que  $s$  soit la plus petite des valeurs entières de  $t$  qui satisfont à l'inégalité

$$4a^2(t + c) > b^2,$$

en substituant  $s + \omega$ , pour  $t$  dans l'équation (47.), ( $\omega$  étant un nombre positif quelconque) on en déduira une autre équation de la forme

$$Ax^2 + Bx + 4a^2 c = (s + \omega)^2,$$

qui a tous ses coefficients positifs, mais qui est absurde parce que l'on a par supposition

$$x^2 > t^2 = (s + \omega)^2.$$

S'il existe donc une valeur de  $v$ , négative et moindre que  $x$ , qui satisfasse à l'équation proposée, elle devra se trouver parmi les nombres

$$-1, -2, -3, \dots, -(s-1).$$

Si dans l'équation (46.), on a  $v = -u$  et  $u > x$ , en divisant  $u$  par  $x$ , on trouvera le quotient  $n$  et le reste  $r < x$ , et en posant

$$4a^2z^2 = (2a^2x^2 + bx - nx - r)^2 = (2a^2x^2 + (b-n)x - r)^2,$$

on obtiendra

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a^4x^4 + 4a^2bx^3 + 4a^2cx^2 + 4a^2dx + 4a^2e \\ -4a^4x^4 - 4a^2(b-n)x^3 + (4a^2r - (b-n)^2)x^2 + 2(b-n)rx - r^2 \end{array} \right\} = 4a^2nx^3 + (4a^2r + 4a^2c - (b-n)^2)x^2 + (2(b-n)r + 4a^2d)x + 4a^2e - r^2 = 0;$$

mais puisque  $4a^2z^2 > 4a^2x^4$ , on aura toujours  $b > n$ , et par conséquent on fera successivement

$$n = 1, 2, 3, \dots, b-1;$$

et en substituant toutes ces valeurs dans l'équation précédente, on déterminera, comme auparavant, la limite de  $r$ .

De cette manière nous avons réduit l'équation proposée à dépendre d'un nombre donné d'équations à une seule inconnue, dont on sait trouver tous les facteurs rationnels.

Soit proposé, par exemple, de résoudre en nombres entiers et positifs l'équation à deux inconnues

$$x^4 + 4x^3 + 11 = z^2;$$

en faisant  $z = x^2 + 2x + r$ , on aura, après les réductions,

$$(4 + 2r)x^2 + 4rx + r^2 - 11 = 0;$$

si  $r$  est un nombre positif, on voit qu'on ne saurait avoir  $r > 3$ ; si  $r$  est égal à un nombre négatif  $-p$  et que l'on ait  $p < x$ , on obtiendra

$$(4 - 2p)x^2 - 4px + p^2 - 11 = 0;$$

et en faisant  $p = 3$ , ou  $p > 3$ , on trouvera une équation de la forme

$$ax^2 + bx + 11 = p^2,$$

qui est absurde parceque par supposition  $x^2 > p^2$ .

Lorsque  $r$  est un nombre négatif, et que l'on a  $-r > x$ , on fera  $r = -(x + t)$ ; en supposant  $-t < x$ , et on obtiendra

$$x^4 + 4x^3 + 11 = (x^2 + x - t)^2$$

et par suite

$$2x^3 + (2t-1)x^2 + 2tx + 11 = t^2,$$

et puisque  $x^2 > t^2$ , on ne pourra pas avoir  $t > 0$ .

Il serait absurde de supposer  $r = -(nx + t)$ , et  $n > 1$ , parceque l'on aurait alors l'équation

$$z^2 = (x^2 - A)^2 < x^4,$$

qui ne saurait jamais s'accorder avec l'autre

$$z^2 = x^4 + 4x^2 + 11 > x^4.$$

Par conséquent l'on obtiendra le système suivant d'équations

$$z = x^2 + 2x + 1, \quad z = x^2 + 2x + 2, \quad z = x^2 + 2x,$$

$$z = x^2 + 2x + 3, \quad z = x^2 + 2x - 1, \quad z = x^2 + x,$$

qui étant combinées avec l'équation proposée doivent servir à déterminer les valeurs des inconnues. Maintenant si l'on effectue les éliminations, on ne trouve que les valeurs  $x = 1, z = 4$ , qui résolvent l'équation proposée, et qui donnent

$$1^4 + 4 \times 1^2 + 11 = 4^2.$$

L'équation que nous venons de traiter sert à résoudre l'autre

$$48. \quad Ax^2 + (By^2 + Cy + D)x + Ey^3 + Fy^2 + Gy + H = 0,$$

lorsque  $B$  n'est point égal à zéro; en effet on trouve l'expression

$$x = \frac{-(By^2 + Cy + D) \pm \sqrt{[(By^2 + Cy + D)^2 - 4A(Ey^3 + Fy^2 + Gy + H)]}}{2A},$$

dans laquelle la quantité comprise sous le signe radical doit satisfaire à une équation de la forme

$$z^2 = a^2 y^4 + b y^3 + c y^2 + d y + e;$$

et lorsqu'on aura obtenu toutes les solutions de cette équation, on aura résolu complètement l'équation proposée.

Si dans l'équation (48.), l'on fait

$$y = x + t, \quad H = a, \quad G = e, \quad F = f, \quad E = g,$$

$$D + g = b, \quad F = c, \quad B + E = d, \quad E + 2F = h,$$

on la transformera, après les substitutions, dans la suivante

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + et + ft^2 + gt^3 + hxt + (d + 2g)xt^2 + (2d + g)x^2t,$$

qui est assez générale, et dont on pourra trouver toutes les solutions entières.

Si au lieu de l'équation (48.) on avait considéré la suivante

$$Ax^2 + (B + Cy + \dots + Dy^n + Ey^{n+1} + \dots + Fy^{n+p})x + Gy^{2n-1} + Hy^{2n-2} + \dots + I = 0,$$

on aurait pu la résoudre de la même manière, pourvu que tous les coefficients  $D, E, \dots, F$ , ne s'évanouissent pas à la fois; et l'on en aurait déduit de nouvelles transformées plus générales que celle que nous venons de trouver; car la méthode dont nous avons fait usage pour résoudre l'équation (45.), peut s'appliquer également à l'autre plus générale

$$Aa^n x^{mn} + bx^{m(n-1)} + cx^{m(n-2)} + \dots + px + q = Ac^n z^n.$$



On a déjà vu que par  $F_n(x, y)$ , nous désignons une fonction homogène, rationnelle et entière, du degré  $n$ , entre  $x$  et  $y$ ; en généralisant cette notation, nous représenterons dans la suite par  $F_n(x, y, z, \dots \text{etc.})$ , une fonction homogène, rationnelle et entière, du degré  $n$ , entre les inconnues  $x, y, z, \dots \text{etc.}$

Maintenant, étant donnée l'équation

$$F_2(x, y) + F_1(x, y) + f = 0,$$

si l'on peut trouver une solution rationnelle de celle-ci

$$F_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

la première sera résoluble aussi en nombres rationnels. En effet, si les valeurs  $x = m$ ,  $y = n$ , satisfont à l'équation  $F_2(x, y) = 0$ , en faisant

$$x = mp + q, \quad y = np + r,$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation

$$F_2(x, y) + F_1(x, y) + f = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

on aura

$$\left\{ (am^2 + bmr + cn^2)p^2 + (2amq + b(mr + nq) + 2c nr + dm + en)p + aq^2 + bqr + cr^2 + dq + er + f \right\} = 0;$$

et puisque par hypothèse on a  $am^2 + bmn + cn^2 = 0$ , on obtiendra l'équation

$$p = - \frac{aq^2 + bqr + cr^2 + dq + er + f}{2amq + bnq + bmr + 2c nr + dm + en},$$

dans laquelle les inconnues  $q, r$ , peuvent prendre des valeurs rationnelles quelconques, et en substituant cette valeur de  $p$ , dans les valeurs de  $x$  et de  $y$ , on obtiendra toutes les solutions rationnelles de l'équation proposée.

Il est clair que la même chose arriverait si l'on avait l'équation

$$49. \quad F_2(x, y, z, \dots \text{etc.}) + F_1(x, y, z, \dots \text{etc.}) + f = 0;$$

qui renferme un nombre quelconque d'inconnues. Et il faut observer qu'étant donnée une solution  $x = l$ ,  $y = m$ ,  $z = n$ ,  $\dots \text{etc.}$ , en nombres rationnels, de l'équation

$$F_2(x, y, z, \dots \text{etc.}) = 0,$$

on peut trouver toutes les solutions rationnelles de l'équation (49.) en faisant

$$x = lp + q, \quad y = mp + r, \quad z = np + s, \quad \dots \text{etc.},$$

(les quantités  $q, r, s, \dots \text{etc.}$ , étant des nombres rationnels quelconques) et l'on voit que ces solutions seront toujours en nombre infini.

Par exemple, on sait qu'un nombre entier quelconque  $A$  est toujours la somme de quatre carrés en nombres entiers, on aura par conséquent

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

mais si l'on voulait connaître toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$A = x^2 + u^2 + y^2 + z^2,$$

on ferait

$$Ap^2 = (ap+q)^2 + (bp+r)^2 + (cp+s)^2 + (dp+t)^2,$$

et l'on aurait

$$p = -\frac{q^2 + r^2 + s^2 + t^2}{2(aq + br + cs + dt)},$$

et la formule

$$A = \left(a + \frac{q}{p}\right)^2 + \left(b + \frac{r}{p}\right)^2 + \left(c + \frac{s}{p}\right)^2 + \left(d + \frac{t}{p}\right)^2,$$

(dans laquelle on peut donner à  $q, r, s, t$ , des valeurs rationnelles quelconques) exprimera toutes les manières de décomposer le nombre  $A$  en quatre carrés rationnels.

Il faut observer qu'étant donnée l'équation

50.  $ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 + gx + hy + iz + k = 0$ ,  
si l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0,$$

est satisfaite en faisant  $x = n, y = r, z = m$ ; on substituera dans l'équation proposée les valeurs

$$x = np + q, \quad y = rp + s, \quad z = mp + t,$$

et on aura

$$p = -\frac{aq^2 + bqs + cs^2 + dqt + est + ft^2 + gq + hs + it + k}{2(anq + crs + fnt) + b(sn + qr) + d(nt + qm) + e(rt + sm) + gn + hr + im},$$

où il faut observer que lorsqu'on pourra résoudre en nombres entiers l'équation

$(2an + br + dm)q + (2cr + bn + em)s \pm (2fm + dn + er)t + gn + hr + im = 1$ ,  
qui contient les trois inconnues  $q, s, t$ , on pourra résoudre aussi l'équation (50.) en nombres entiers, d'une infinité de manières.

Si l'équation proposée se réduisait à la forme

$$ax^2 + cy^2 + fz^2 + k = 0,$$

pour tâcher de la résoudre en nombres entiers il faudrait faire

$$anq + crs + fnt = \pm 1.$$

Cependant il y a des cas dans lesquels l'équation proposée ne saurait être résolue en nombres entiers, quoiqu'elle puisse avoir une infinité de solutions fractionnaires.

Lagrange a démontré que lorsqu'on multiplie ensemble les deux formules

$$\begin{aligned}x^2 - ay^2 - bz^2 + ab u^2 &= F, \\X^2 - aY^2 - bZ^2 + ab U^2 &= F_1,\end{aligned}$$

on aura toujours l'équation

$$FF_1 = A^2 - aB^2 - bC^2 + abD^2,$$

dans laquelle les quantités  $A, B, C, D$ , sont déterminées; maintenant si l'on fait

$$p = -\frac{x_1^2 - ay_1^2 - az_1^2 + abu_1^2}{2(Ax_1 - aBy_1 - bCz_1 + abDu_1)}$$

(les quantités  $x_1, y_1, z_1, u_1$ , étant des nombres rationnels quelconques) on aura

$$FF_1 = \left(A + \frac{x_1}{p}\right)^2 - a\left(B + \frac{y_1}{p}\right)^2 - b\left(C + \frac{z_1}{p}\right)^2 + ab\left(D + \frac{u_1}{p}\right)^2,$$

et cette formule comprendra toutes les manières dont on peut réduire le produit  $FF_1$  à la forme

$$n^2 - aq^2 - br^2 + abs^2.$$

Notre analyse fournit beaucoup de nouvelles formules semblables, car en faisant

$$F = F_2(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) + A,$$

$$F_1 = F_2(X, Y, Z, U, \dots \text{etc.}) + A,$$

on trouvera aisément que l'on a toujours

$$FF_1 = F_2(p, q, r, s, \dots \text{etc.}) + A,$$

(les quantités  $p, q, r, s, \dots \text{etc.}$ , étant des fonctions rationnelles des quantités  $A, x, X, y, Y, z, Z, \dots \text{etc.}$ ) pourvu que l'on puisse résoudre l'équation

$$F_2(x_1, y_1, z_1, u_1, \dots \text{etc.}) = 0,$$

en nombres rationnels. Ainsi, par exemple, si l'on fait

$$F = x^2 + 41y^2 - 113z^2 + at^4,$$

$$F_1 = X^2 + 41Y^2 - 113Z^2 + aT^4,$$

on aura

$$FF_1 = \begin{cases} as^2 + \left(\frac{19(FF_1 + 113r^2 - p^2 - 41q^2 - as^4)}{2(19p + 164q - 339r)} + p\right)^2 \\ + 41\left(\frac{4(FF_1 + 113r^2 - p^2 - 41q^2 - as^4)}{2(19p + 164q - 339r)} + q\right)^2 \\ + 113\left(\frac{3(FF_1 + 113r^2 - p^2 - 41q^2 - as^4)}{2(19p + 164q - 339r)} + r\right)^2 \end{cases}$$

les quantités  $p, q, r, s$ , étant des nombres rationnels quelconques.

Ce que nous venons de dire par rapport aux formules du second degré, peut s'appliquer aux équations indéterminées du troisième degré, et si l'équation à deux inconnues

$$F_3(x, y) = 0,$$

est résoluble en nombres rationnels, l'autre

$$F_3(x, y) + F_2(x, y) + F_1(x, y) + k = 0,$$

sera résoluble aussi: en effet étant proposée l'équation

51.  $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + iy + k = 0$ ,  
si l'on peut trouver deux nombres entiers  $m, n$ , tels que l'on ait

$$am^3 + bm^2n + cmn^2 + dn^3 = 0,$$

on pourra faire  $x = mp + q$ ,  $y = np + r$ , et en substituant ces valeurs dans l'équation (51.), on aura une équation de la forme

$$52. Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = 0,$$

dans laquelle

$$A = am^3 + bm^2n + cmn^2 + dn^3 = 0;$$

et si l'on fait  $B = 0$ , on pourra résoudre l'équation (52.) et l'on aura  $p = -\frac{D}{C}$ ; et en éliminant  $q$  entre les équations

$$B = 0, \quad p = -\frac{D}{C},$$

on obtiendra une équation de la forme

$$p = -F(r),$$

(dans laquelle  $F(r)$  exprime une fonction rationnelle quelconque de  $r$ ) qui fournira une infinité de solutions de l'équation proposée lorsqu'on donnera à  $r$  des valeurs rationnelles quelconques.

Il est clair que l'on parviendrait à un résultat semblable, si l'équation proposée contenait un plus grand nombre d'inconnues; car si l'équation

$$F_3(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) = 0,$$

peut être résolue en nombres rationnels, l'autre équation

$F_3(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) + F_2(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) + F_1(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) + f = 0$ ,  
aura un nombre infini de solutions rationnelles. Maintenant si dans l'équation précédente on fait

$$f = -m, \quad F_3(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) = x^3 + y^3 - z^3 - u^3,$$

$$F_2(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) = F_1(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) = 0,$$

( $m$  étant un nombre rationnel quelconque) puisque l'équation

$$x^3 + y^3 - z^3 - u^3 = 0,$$

peut se résoudre en faisant  $x = y = z = u$ ; on pourra résoudre aussi l'équation

$$x^3 + y^3 - z^3 - u^3 = m,$$

et l'on aura l'identité

$$52. \quad m = \left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3 + \left(\frac{m-6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3,$$

dans laquelle  $q$  est un nombre quelconque rationnel. De cette manière l'on a décomposé le nombre rationnel  $m$  en quatre cubes rationnels, dont deux seront positifs et deux négatifs. Mais on peut, lorsque  $m$  est un nombre positif, réduire le second nombre de cette équation à ne contenir que des cubes positifs, et c'est ce que nous allons prouver à présent.

Supposons  $q$  positif et tel que l'on ait  $6q^3 < m$ ; il est clair qu'alors les deux premiers cubes du second nombre de l'équation (52.) seront positifs, tandis que les deux autres seront négatifs. De plus dans l'identité

$$53. \quad a^3 - b^3 = a^3 \left( \frac{a^3 - 2b^3}{a^3 + b^3} \right)^3 + b^3 \left( \frac{2a^3 - b^3}{a^3 + b^3} \right)^3,$$

le second membre est la somme de deux cubes positifs lorsqu'on a  $a^3 > 2b^3$ , car à plus forte raison on aura  $2a^3 > b^3$ ; si l'on fait donc

$$a = \frac{m + 6q^3}{6q^2}, \quad b = \frac{m}{6q^2},$$

l'équation (53.) se transformera dans la suivante:

$$54. \quad \left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 - \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3 = \left\{ \left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 \right. \\ \left. + \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{2(m + 6q^3)^3 - m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 \right\}$$

dans laquelle les deux cubes qui composent le second membre seront positifs l'orsqu'on aura

$$(m + 6q^3)^3 > 2m^3.$$

Supposons maintenant que cette inégalité soit satisfaite, et reprenons l'identité (53.) en y faisant

$$a = \left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right) \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right), \quad b = \frac{m}{6q^2},$$

il est clair que nous aurons l'équation

$$55. \quad \left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 - \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3 = \\ \left\{ \left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 - 2 \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3 \right\} \\ \left\{ \frac{\left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 + \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3}{\left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 + \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3} \right\} \\ + \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3 \left\{ \frac{2 \left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 - \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3}{\left( \frac{m + 6q^3}{6q^2} \right)^3 \left( \frac{(m + 6q^3)^3 - 2m^3}{(m + 6q^3)^3 + m^3} \right)^3 + \left( \frac{m}{6q^2} \right)^3} \right\}$$

dans laquelle le premier cube du second membre pourra s'écrire de cette manière

$$\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3 \left(\frac{(m+6q^3)^2-2m^3}{(m+6q^3)^3+m^3}\right)^3 \left(\frac{(m+6q^3)^3((m+6q^3)^3-2m^3)^2-2m^3((m+6q^3)^3+m^3)^3}{(m+6q^3)^3((m+6q^3)^3-2m^3)^3+m^3((m+6q^3)^3+m^3)^3}\right)^3$$

et afin que ce cube soit positif il suffira que l'inégalité

56.  $(m+6q^3)^3((m+6q^3)^3-2m^3)^3 > 2m^3((m+6q^3)^3+m^3)^3$ ,  
soit satisfaite; et l'on voit que cette inégalité renferme l'autre

$$(m+6q^3)^3 > 2m^3,$$

(puisque les deux nombres  $m$  et  $q$ , sont positifs par supposition) et que lorsque l'inégalité (56.) sera satisfaite, le second cube du second membre de l'équation (55.) sera positif aussi, puisque si l'inégalité (56.) est satisfaite l'autre

$$2(m+6q^3)^3((m+6q^3)^3-2m^3)^3 > m^3((m+6q^3)^3+m^3)^3,$$

sera satisfaite aussi. Il suffira donc de satisfaire à l'inégalité (56.) pour que les deux cubes du second membre de l'équation (54.), et les deux cubes du second membre de l'équation (55.) soient positifs.

Soit, pour abréger,  $6q^3 = z$ , l'inégalité (56.) deviendra, en extrayant la racine cubique,

$$(z+m)((z+m)^3-2m^3)-m((z+m)^3+m^3)\sqrt[3]{2} > 0,$$

d'où l'on déduira, en ordonnant le premier membre par les puissances de  $z$ ,

$$57. \quad z^4 + m(4-\sqrt[3]{2})z^3 + m^2(6-3\sqrt[3]{2})z^2 + m^3(2-3\sqrt[3]{2})z - m^4(1+2\sqrt[3]{2}) > 0.$$

On a supposé  $m > 6q^3$ , ou bien  $m > z$ ; en faisant donc  $m = Az$ , on aura  $A > 1$ , et en substituant cette valeur de  $m$  dans l'inégalité (57.), on aura, après avoir divisé par  $z^4$ , l'autre inégalité

$$1 + (4-\sqrt[3]{2})A + (6-3\sqrt[3]{2})A^2 + (2-3\sqrt[3]{2})A^3 - (1+2\sqrt[3]{2})A^4 > 0,$$

et celle-ci, en y faisant  $A = 1+x$ , se transformera dans la suivante

$$58. \quad 12-9\sqrt[3]{2} + (18-24\sqrt[3]{2})x + (6-24\sqrt[3]{2})x^2 - (2+11\sqrt[3]{2})x^3 - (1+2\sqrt[3]{2})x^4 > 0,$$

dans laquelle il sera toujours possible de trouver pour  $x$  un nombre rationnel positif qui lui satisfasse; en effet puisque l'on a  $126 > 100\sqrt[3]{2}$ , on aura aussi

$$12-9\sqrt[3]{2} > \frac{3}{11},$$

et  $x$  devra être un nombre tel que la somme de tous les termes qu'il multiplie dans l'inégalité (58.) soit moindre que  $\frac{3}{11}$ . On fera à cet effet

$100\sqrt[3]{2} = 126$ , car tous les termes qui sont multipliés par  $x$  dans l'inégalité (58.) étant négatifs, on ne devra craindre aucune erreur en prenant pour  $\sqrt[3]{2}$  un nombre un peu plus grand que la valeur exacte de ce radical. Par cette substitution l'inégalité (58.) se transformera dans la suivante

$$33 - 622x - 1212x^2 - 793x^3 - 226x^4 > 0;$$

d'où l'on déduira, en faisant  $x = \frac{1}{y}$ ,

$$y^4 - \frac{612}{33}y^3 - \frac{1212}{33}y^2 - \frac{792}{33}y - \frac{226}{33} > 0;$$

et comme  $-\frac{1212}{33}$  est le plus grand coefficient négatif de cette inégalité, elle sera toujours satisfaite en faisant

$$y = \frac{1212}{33} + 1 = \frac{415}{11},$$

et à plus forte raison en faisant

$$y = \frac{415}{11} + u,$$

( $u$  étant une quantité positive quelconque) d'où il résulte que la valeur de

$$x = \frac{11}{415 + 11u} < \frac{11}{415},$$

satisfera à l'inégalité (58.).

Maintenant l'on a

$$m = Az = (1 + x)z = \left(1 + \frac{11}{415 + 11u}\right)z = 6 \left(\frac{426 + 11u}{415 + 11u}\right)q^3,$$

et partant

$$q^3 = \left(\frac{415 + 11u}{426 + 11u}\right)\frac{m}{6};$$

mais comme par hypothèse  $q^3 < \frac{m}{6}$ , il faudra trouver un nombre rationnel positif  $q$ , tel que  $q^3$  soit compris entre

$$\frac{m}{6} \text{ et } \frac{415m}{426 \times 6};$$

et il est clair qu'on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de  $q^3$  comprises entre ces limites, valeurs qui satisferont à toutes les *inégalités de condition* que nous venons de trouver.

Maintenant puisque le binôme

$$\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3;$$

ce réduit à la somme de deux cubes positifs, à l'aide de l'identité (54.), et que d'après l'analyse précédente on peut réduire l'autre binôme

$$\left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{(m+6q^3)^3 - 2m^3}{(m+6q^3)^3 + m^3}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3,$$

à la somme de deux cubes positifs à l'aide de l'équation (55.), il est clair que l'on pourra réduire le second membre de l'équation

$$m = \left(\frac{m+6q^3}{6q^2}\right)^3 + \left(\frac{m-6q^3}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3 - \left(\frac{m}{6q^2}\right)^3$$

à la somme de quatre cubes positifs; et partant on aura pour résultat, qu'un nombre quelconque rationnel positif peut toujours se décomposer, d'une infinité de manières, en quatre cubes positifs, en nombres rationnels.

Lagrange en cherchant les formes cubiques qui se reproduisent, lorsqu'elles sont multipliées entre elles, trouva la formule

$$59. \left\{ \begin{aligned} &x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz \\ &+ (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3 \end{aligned} \right\},$$

qui étant multipliée par une formule semblable donne un produit de la même forme. D'après les principes que nous venons d'exposer on peut trouver un grand nombre d'expressions nouvelles, de la même espèce que la formule (59.), et qui ne sont pas comprises dans celle-ci. En effet étant données les deux équations,

$$F = F_3(x, y, z, u, \dots \text{etc.}) + A,$$

$$F_1 = F_3(x_1, y_1, z_1, u_1, \dots \text{etc.}) + A,$$

on pourra toujours faire

$$FF_1 = F_3(r, s, t, v, \dots \text{etc.}) + A,$$

(les quantités  $r, s, t, v, \dots \text{etc.}$ , étant des fonctions rationnelles des quantités  $A, x, x_1, y, y_1, z, z_1, \dots \text{etc.}$ ) pourvu que l'équation

$$F_3(X, Y, Z, U, \dots \text{etc.}) = 0,$$

puisse être résolue en nombres rationnels. Ainsi par exemple en faisant

$$F = x^3 + y^3 + z^3 + u^3, \quad F_1 = X^3 + Y^3 + Z^3 + U^3,$$

on aura l'identité

$$FF_1 = \left\{ \begin{aligned} &\left( \frac{FF_1 + (r+s+t)^3 - r^3 - s^3 - t^3}{3((r+s+t)^2 + r^2 - s^2 - t^2)} - r - s - t \right)^3 + \left( \frac{FF_1 + (r+s+t)^3 - r^3 - s^3 - t^3}{3((r+s+t)^2 + r^2 - s^2 - t^2)} + r \right)^3 \\ &+ \left( s - \frac{FF_1 + (r+s+t)^3 - r^3 - s^3 - t^3}{3((r+s+t)^2 + r^2 - s^2 - t^2)} \right)^3 + \left( t - \frac{FF_1 + (r+s+t)^3 - r^3 - s^3 - t^3}{3((r+s+t)^2 + r^2 - s^2 - t^2)} \right)^3 \end{aligned} \right\}$$

dans laquelle  $r, s, t$ , sont des quantités indéterminées.

Euler a démontré pour la première fois, qu'un nombre quelconque rationnel positif est toujours égal à la somme de quatre carrés en nombres rationnels; il a démontré aussi, que le produit d'une somme de quatre carrés, par une somme de quatre carrés, est semblablement la somme de quatre carrés: l'analyse précédente montre que l'on peut généraliser ces deux théorèmes, et les étendre aux troisièmes puissances.

La méthode que nous avons exposée n'est plus générale, lorsque les formules que l'on considère passent le troisième degré; et c'est à ce degré qu'Euler et Lagrange se sont arrêtés dans leurs recherches. Cependant on peut trouver des formules de tous les degrés qui se reproduisent lorsqu'elles sont multipliées par des formules semblables. Ainsi, par exemple, pour le quatrième degré on a les deux formules

$$3x^4 + y^4 - z^4 - 3u^4, \quad 30x^4 + 2y^4 - 20z^4 - 12u^4,$$





**X, Y, Z, . . . . etc.,**

$X_1, Y_1, Z_1, \dots$  etc.,

• • • • •

$$X_r, Y_r, Z_r, \dots \text{ etc.,}$$

expriment des nombres entiers quelconques,

**Maintenant pour déterminer la valeur de  $u$ , l'on fera**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b} F_n((bX)^{\frac{a}{n}}, (bY)^{\frac{a}{n}}, (bZ)^{\frac{a}{n}}, \dots \text{etc.}) \\ + \frac{1}{b} F_m((bX_1)^{\frac{a}{m}}, (bY_1)^{\frac{a}{m}}, (bZ_1)^{\frac{a}{m}}, \dots \text{etc.}) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + \frac{1}{b} F_p((bX_r)^{\frac{a}{p}}, (bY_r)^{\frac{a}{p}}, (bZ_r)^{\frac{a}{p}}, \dots \text{etc.}) \end{array} \right\} = u,$$

et il est clair que  $u$  sera un nombre entier. A présent si l'on multiplie tous les termes de cette équation par  $u^{at}$ , ( $t$  étant l'un des nombres entiers et positifs qui résolvent l'équation à deux inconnues  $at + 1 = qv$ ) et que dans l'équation (60.) l'on fasse

$$x = (bXu^t)^{\frac{a}{n}}, \quad y = (bYu^t)^{\frac{a}{n}}, \quad z = (bZu^t)^{\frac{a}{n}}, \quad \dots \text{ etc.,}$$

$$x_i = (b X_i u^i)^{\frac{a}{m}}, \quad y_i = (b Y_i u^i)^{\frac{a}{m}}, \quad z_i = (b Z_i u^i)^{\frac{a}{m}}, \quad \dots \text{ etc.},$$

• • • • •

$$x_r = (b X_r u^t)^{\frac{a}{p}}, \quad y_r = (b Y_r u^t)^{\frac{a}{p}}, \quad z_r = (b Z_r u^t)^{\frac{a}{p}}, \quad \dots, \text{ etc.,}$$

on aura résolu l'équation proposée d'une infinité de manières, et l'on obtiendra l'identité

[illegible]

Il serait facile de généraliser cette méthode, et de l'appliquer à beaucoup d'autres équations composées de polynômes qui seraient toujours homogènes, mais qui pourraient être fractionnaires et même transcendans; néanmoins comme ces recherches ne présentent aucune difficulté, nous croyons ne pas devoir nous y arrêter plus long tems.

Ce mémoire faisait partie d'un travail sur la théorie des nombres présenté en 1823 à l'Académie Royale des Sciences de Paris.