ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2494-95.

Die astronomische Refraction als Function der meteorologischen Elemente.

Von Dr. Arthur Kerber.

In meiner Refractionstheorie (Wiedemann's Annalen, 15, 1882, p. 140) bin ich ausgegangen von einer ruhend gedachten Atmosphäre von gleichmässiger Dichtigkeitsabnahme, und vermittelte den Uebergang zu dem realen Zustande durch Unterscheidung mehrerer gleichmässig abgestufter Zonen (p. 325), deren Dichtigkeitsabnahme nach den Ergebnissen der Höhenmessung bei Ballonfahrten annähernd bestimmt werden kann. Indessen sah ich später, dass es bequemer und auch naturgemässer ist, von vornherein sich enger an die realen Verhältnisse der Atmosphäre anzuschliessen, und gebe nun im Folgenden die Theorie in dieser neuen, verbesserten Gestalt.

I. Die Dichtigkeitsabnahme der untersten Luftzone bis gegen 1000 m.

In der Nähe der Erdoberfläche nimmt erweislich die Wärme mit der Höhe nahezu gleichmässig ab, und zwar in Berglandschaften um 1°C. auf 111-222 m, in freier Atmosphäre bedeutend rascher (J. Hann, allgemeine Erdkunde, dritte Auflage, Prag 1881, pag. 81), um etwa 1°C. auf 100 bis 150 m. Beispielsweise fand Glaisher in der Zone bis 1000 m Höhe im Durchschnitt 111 m als Erhebung für 1° Temperaturabnahme; Welsh für dieselbe Zone auf seiner ersten Fahrt im Durchschnitt aus mehreren Beobachtungen 152 m, auf der zweiten 126 m, auf der vierten 148 m und auf der dritten bis 700 m Höhe durchschnittlich 119 m¹⁾.

Bezeichnet man durch h' die Erhebung für 1° Temperaturabnahme (in der untersten Luftzone), das Barometer und Thermometer an der Beobachtungsstation durch b_0 , t_0 und in der Höhe h durch b , t ; so ist bei gleichmässiger Wärmeabnahme:

$$(1) \quad t = t_0 - \frac{h}{h'}, \quad 1 + \gamma t = 1 + \gamma t_0 - \frac{\gamma}{h'} \cdot h.$$

Diesen Werth für $1 + \gamma t$ führe ich nun in das Differential der Höhenmessung ein. Dasselbe lautet, wenn $S/s = 10517$ das Verhältniss des spec. Gewichtes von Quecksilber und (trockener) Luft im Normalzustande vorstellt, und die Aenderungen der Schwere mit der geogr. Breite φ und der Höhe h in Betracht gezogen werden:

$$\left\{ \begin{aligned} dh &= -0.76(1 + \gamma t)(1 + \alpha \cos 2\varphi)(1 + \beta h) \frac{S}{s} \frac{\partial b}{\partial h} \\ &\text{für } \alpha = 0.0025935 \text{ und } \beta = 0.000000314 \end{aligned} \right.$$

und verwandelt sich durch jene Substitution in:

$$\frac{dh}{1 + \gamma t_0 - (\gamma/h' - \beta) \cdot h} = -0.76(1 + \alpha \cos 2\varphi) \frac{S}{s} \frac{\partial b}{\partial h}$$

Nach Integration in den Grenzen 0 bis h , b_0 bis b kommt:

$$(2) \quad \frac{b}{b_0} = \left(1 - \frac{\gamma - \beta h'}{1 + \gamma t_0} \cdot \frac{h}{h'} \right)^{\frac{(1 - \alpha \cos 2\varphi) h'}{0.76(\gamma - \beta h') S/s} \cdot 1}$$

Andererseits ist nach (1) sehr nahe:

$$(3) \quad \frac{1 + \gamma t}{1 + \gamma t_0} = 1 - \frac{\gamma - \beta h'}{1 + \gamma t_0} \cdot \frac{h}{h'}$$

¹⁾ Daraus ergibt sich,

$$\frac{1 + \gamma t_0}{\gamma - \beta h'} \cdot h' = H$$

gesetzt, die barometrische Höhenformel, nämlich:

$$h = \left[1 - \left(\frac{b}{b_0} \right)^{\frac{0.76(1 + \gamma t_0) S/s}{(1 - \alpha \cos 2\varphi) H}} \right] \cdot H,$$

worin b_0 , t_0 das Barometer und Thermometer an der ersten Station bezeichnet. Sie verwandelt sich für kleinere Höhen, indem man nach Potenzen von $b_0 - b = \Delta b$ entwickelt, in:

$$h = \frac{0.76(1 + \gamma t_0) S/s}{b_0} \cdot \Delta b.$$

Beim Flächennivellement, wo man ausserdem für b_0 , t_0 die Monatsmittel nehmen kann, ist also beispielsweise für Sachsen:

$$\text{im Januar: } h = \frac{0.76(1 - 4\gamma) \cdot 10517}{762} \cdot \Delta b = 10.3 \cdot \Delta b,$$

$$\text{im Juli: } h = \frac{0.76(1 + 17\gamma) \cdot 10517}{762} \cdot \Delta b = 11.1 \cdot \Delta b,$$

h (wegen 0.76) in met. und Δb in millim. zu verstehen. In der That fand P. Schreiber für Sachsen und den Sommer: $h = 11.1 \cdot \Delta b$. — Ebenso bewährt sich jene Formel, bei Berücksichtigung der täglichen Periode der barometrisch bestimmten Höhen, auch bei grösseren Höhen-differenzen; wie ich später zeigen werde.

¹⁾ Von da ab wurde sie bedeutend grösser, was offenbar mit einer Störung der normalen Wärmeabnahme zusammenhängt, denn in der Zone von 7-1600 m. differirte der Thermometerstand nur um 1°C.

Man dividire nun die Gleichung (2) durch (3), so ergibt sich:

$$\frac{b}{b_0} \frac{1+\gamma t_0}{1+\gamma t} = \left(1 - \frac{\gamma - \beta h'}{1+\gamma t_0} \frac{h'}{h}\right) \frac{(1-\alpha \cos 2\varphi) h'}{0.76 (\gamma - \beta h') S/s} - 1$$

Setzt man noch der Kürze wegen: $\frac{1+\gamma t_0}{\gamma - \beta h'} \cdot h' = H$, und in Anbetracht der aufsteigenden Bewegung der Luftmassen, $(1+\Delta) S/s$ statt $S/s = 10517^1$); so erhält man für die unterste Luftzone und trockene Luft als Gesetz der Dichtigkeitsabnahme:

$$\frac{b}{b_0} \frac{1+\gamma t_0}{1+\gamma t} = \left(\frac{H-h}{H}\right) \frac{(1-\Delta) (1-\alpha \cos 2\varphi) h'}{0.76 (\gamma - \beta h') S/s} - 1$$

$$(4) \quad \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(\frac{H-h}{H}\right) \frac{(1-k) (1-\alpha \cos 2\varphi) h'}{0.76 (\gamma - \beta h') S/s} - 1 = \left(\frac{H-h}{H}\right)^m,$$

wo k eine von Null wenig abweichende, empirisch zu bestimmende Constante ist.

Die Brechkraft einer Schicht in der untersten Luftzone (bis gegen 1000 m) ist also proportional der m ten Potenz ihres Abstandes von der Luftschicht H .

Dabei ist für die Grenzwerte von h' in freier Atmosphäre (100 und 150 m):

$$(5) \quad H = \frac{1+\gamma t_0}{\gamma - \beta h'} \cdot h' = 27500 \text{ bis } 41400 \text{ m.}$$

Was ferner die Constante k betrifft, so hätte man

$$(7) \quad m = \frac{(1-k) (1-\alpha \cos 2\varphi) h'}{0.76 (\gamma - \beta h') S/s} - 1 = 2.4, \text{ bezügl. 4.2}^4).$$

II. Dichtigkeitsabnahme der für die astronomische Refraction massgebenden Luftzone (bis 10000 m).

Der Ansatz (4), den wir soeben aus dem Differential der Höhenmessung, unter der Voraussetzung gleichmässiger Wärmeabnahme, hergeleitet haben, entspricht der erfahrungs-

Hieraus ist endlich abzuleiten das Verhältniss der Brechkraft $(\mu - 1)$ der Schichten b, t und b_0, t_0 für feuchte Luft. Dasselbe, $\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1}$, wird von $\frac{b}{b_0} \frac{1+\gamma t_0}{1+\gamma t}$ nur wenig abweichen.²⁾ Ich setze:

$$\frac{b}{b_0} \frac{1+\gamma t_0}{1+\gamma t} = \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} \cdot \left(1 - \frac{\Delta'}{H} \cdot h\right) = \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} \cdot \left(\frac{H-h}{H}\right)^{\Delta'}$$

und erhalte dann nach Gleichsetzung der beiden Werthe von $\frac{b}{b_0} \frac{1+\gamma t_0}{1+\gamma t}$ einen Ausdruck von der Form:

dieselbe so zu bestimmen, dass die aus (4) berechnete Horizontalrefraction mit ihrem wirklichen Betrage zusammenfällt. Für die einzelnen h' ist diese aber unbekannt, so dass man auf Vermuthung angewiesen bleibt. Ich nehme an, dass die Horizontalrefraction von Bradley (33') für $h = 111$ m (Glaisher), und die von Bessel (ca. 35'), weil sie bedeutend grösser ist, ungefähr für den Maximalbetrag von h' (150 m) gilt. In beiden Fällen wird man geführt auf:

$$(6) \quad k = 0.00567^3).$$

Daraus ergibt sich endlich für $h' = 100$, bezüglich 150 m:

mässigen Constitution der untersten Luftzone, weil in dieser die Wärme notorisch gleichmässig abnimmt. Es kommt nun darauf an, denselben so umzuformen, dass er bis zu einer Höhe von 7 oder 10 km, soweit die Constitution der Atmosphäre auf die Strahlenbrechung überhaupt noch einwirkt, gültig bleibt.

¹⁾ Man erinnere sich, dass auch der Ausdehnungscoefficient für die freie Atmosphäre von 0.003665 abweicht.

²⁾ Die Brechkraft der feuchten Luft ist nach E. Ketteler etwa um $\frac{1}{200}$ des Betrages kleiner, als die von trockener Luft. Das Verhältniss der Brechkraft zweier Schichten wird also jedenfalls für trockene und feuchte Luft nahezu dasselbe sein, d. h.:

$$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} \text{ nahezu } = \frac{b}{b_0} \frac{1+\gamma t_0}{1+\gamma t}.$$

³⁾ Setzt man $k = 0$, so wird ρ_{90} um einige Secunden grösser; jedenfalls wird also k von Null nur wenig verschieden sein.

⁴⁾ Bauernfeind fand aus zahlreichen Beobachtungen für Gebirgslandschaften und höhere Luftzonen der freien Atmosphäre (bis gegen 3000 m), für welche h' im Durchschnitt 176 m ist, $m = 5$. In der That erhält man für $h' = 176$ m:

$$m = \frac{176}{0.76 (\gamma - 176\beta) \cdot 10517} - 1 = 5.092.$$

In den höheren Luftregionen nimmt die Wärme immer langsamer ab (in 7-9 km Höhe musste beispielsweise Glaisher 500 m steigen, um 1°C. weniger zu haben). Will man also für die ganze Atmosphäre das Gesetz der Dichtigkeitsabnahme mathematisch formulieren, so müsste man in (4) den Exponenten m (also h') mit der Höhe wachsen lassen, d. h. durch $m \cdot (1 + ah + \dots)$ ersetzen; es müsste ferner anstatt H die reale Atmosphärenhöhe $c \cdot H = 300000$ m (?) eingeführt werden, und die neue Formel müsste für die unterste Luftzone mit (4) zusammenfallen. Diese drei Bedingungen erfüllt der Ansatz:

$$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(1 - \frac{h}{c \cdot H}\right)^{c \cdot m (1 + ah + \dots)}$$

der für kleine Höhen wirklich in $(\mu - 1) : (\mu_0 - 1) = 1 - m h / H$, wie (4), übergeht.

Mit einem solchen $\mu - 1$ wäre aber eine Integration des Differentials der astronomischen Refraction, geschweige denn die Herleitung einer in der Praxis verwendbaren Refractionsformel, undurchführbar,¹⁾ und darin eben liegt für die Theorie die Nöthigung, eine Atmosphäre einzuführen, die in der unteren, für die Strahlenbrechung massgebenden Luftzone sich mit der realen Atmosphäre nahe deckt, in den höheren Luftschichten aber (deren Constitution bei der Kleinheit der Einfallswinkel für die astronomische Refraction gleichgültig ist) mehr oder weniger von derselben abweicht. Ich setze:

$$(8) \quad \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(1 - \frac{m}{n} \frac{h}{H}\right)^n.$$

Für kleine Höhen bleibt alsdann die Brechkraft

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(1 - \frac{m}{n} \frac{h}{H}\right)^n = \left(1 - \frac{h}{H'}\right)^n \\ \text{für } H' = \frac{n}{m} \cdot H = \frac{1.52 (1 + \gamma t_0) S/s}{(1 - k) (1 - \alpha \cos 2\varphi) - 0.76 (\gamma/h' - \beta) S/s} \end{cases}$$

Die Brechkraft einer Schicht innerhalb der massgebenden Luftzone (bis etwa 10000 m) ist somit genähert proportional dem Quadrate ihres Abstandes von der Schicht H' . Dabei ist, entsprechend den Grenzwerten von h' in freier

ungeändert, nämlich $(\mu - 1) : (\mu_0 - 1) = 1 - m h / H$, wie in (4); und bei passender Bestimmung der Constanten n wird auch in den mittleren Luftschichten der Ansatz der erfahrungsmässigen Dichtigkeitsabnahme Genüge leisten. Diese Bestimmung ergibt sich nun durch folgende Betrachtung.

Für grössere Höhen ist nach (8):

$$(9) \quad \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = 1 - \frac{m}{n} \frac{h}{H} + \frac{n-1}{n} \frac{m^2}{2} \frac{h^2}{H^2} - \dots,$$

und bei gleichmässiger Wärmeabnahme von der Erdoberfläche bis zur Höhe h wäre, zufolge (4):

$$(10) \quad \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = 1 - \frac{m}{n} \frac{h}{H} + \frac{m}{n} \frac{m-1}{2} \frac{h^2}{H^2} - \dots$$

Nun nimmt in höheren Regionen, wie bereits bemerkt, die Wärme langsamer ab, $1 + \gamma t$ wird grösser, $\mu - 1$ kleiner, als bei gleichmässiger Wärmeabnahme.²⁾ Die Constante n muss also so bestimmt werden, dass $\mu - 1$ in (9) kleiner wird, als in (10). Dies ist der Fall für:

$$\frac{n-1}{n} \cdot m^2 < m(m-1), \quad n < m.$$

Man hat sonach: $n < m$ (m war in freier Atmosphäre 2.4 bis 4.2) und zweitens $n > 1$, weil für $n = 1$ die Brechkraft mit der Höhe gleichmässig abnehmen würde. Da es nun bequem ist, ein ganzzahliges und möglichst kleines n zu haben, so setze ich in allen Fällen (vorbehaltlich einer Correctur des dadurch gemachten kleinen Fehlers): $n = 2$. Dadurch verwandelt sich der Ansatz (8) in:

Atmosphäre (100 und 150 m):

$$(12) \quad H' = 23500, \text{ bezügl. } 20700 \text{ m.}$$

Was nun endlich die oberen Luftzonen anlangt,

¹⁾ Dasselbe gilt z. B. von der Formel Mendelejeffs: $t = -36 + \frac{t_0 + 36}{b_0} \cdot b$.

²⁾ Nach (4) ist:

$h' : (\gamma - \beta h') = 0.76 (m+1) S/s$, also H oder $(1 + \gamma t_0) \cdot h' : (\gamma - \beta h') = 0.76 (1 + \gamma t_0) (m+1) S/s = (m+1) \cdot K$, und

$$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(1 - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{h}{K}\right)^m = 1 - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{h}{K} + \dots$$

Daraus ergibt sich, wenn man nach μ und m differenzirt:

$$-\frac{\partial \mu}{\mu_0 - 1} = \left(\frac{1}{m+1}\right)^2 \frac{h}{K} \cdot \partial m.$$

Wächst also in der Höhe h die Erhebung für 1° Temperaturabnahme (h') um $\partial h'$ und m um ∂m , so verkleinert sich $\mu - 1$ um $\partial \mu$ gegen denjenigen Betrag, welchen es bei gleichmässiger Temperaturabnahme ($\partial m = 0$) haben würde.

deren Dichtigkeitsabnahme unbekannt und übrigens auch, für die Strahlenbrechung, gleichgültig ist, so kann die Constitution der massgebenden Luftzone auf die ganze Atmosphäre übertragen werden. Ich setze also im Folgenden, bei Berechnung der astronomischen Refraction, allgemein:

$$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(\frac{H' - h}{H'} \right)^2,$$

betrachte H' als Grenze der Integration und nenne die durch diesen Ansatz characterisirte (aequivalente) Atmosphäre der Kürze halber Atmosphäre zweiten Grades von der Höhe H' .

III. Prüfung des Ansatzes.

Die Atmosphäre zweiten Grades führt in kleinen Höhen auf:

auf seiner ersten Fahrt:	$t_0 = 21.8^\circ \text{C.}$	$h' = 152 \text{ m}$	$H' = 21488.3 \text{ m,}$
› der zweiten ›	21.0	126	22547.4
› der dritten ›	14.8	119	22474.2
› der vierten ›	9.8	148	20746.7

Die Thermometerstände in der Höhe h und die logarithmischen Differenzen der Barometerstände finden sich bei Bauernfeind, p. 104. Daraus ergibt sich nun:

		$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(\frac{H' - h}{H'} \right)^2$	$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \frac{b}{b_0} \frac{1 + \gamma t_0}{1 + \gamma t}$	Differenz
Erste Fahrt	1) 3066 m	0.735	0.735	0.000
	4630	0.616	0.626	— 0.010
	5869	0.528	0.551	— 0.023
Zweite ›	2) 3072 m	0.746	0.734	+ 0.012
	4563	0.636	0.628	+ 0.008
	5785	0.553	0.551	+ 0.002
Dritte ›	3) 3085 m	0.744	0.723	+ 0.021
	3816	0.689	0.669	+ 0.020
Vierte ›	4) 3240 m	0.712	0.707	+ 0.005
	4682	0.600	0.600	0.000
	5761	0.522	0.534	— 0.012
	6864	0.448	0.470	— 0.022

In 3000 m Höhe ist die Differenz der $(\mu - 1) : (\mu_0 - 1)$ für die theoretisch vorausgesetzte und die reale Atmosphäre durchschnittlich +0.01, und in 6000 m Höhe —0.011; somit die Differenz der $\mu - 1$:

für $h = 3000 \text{ m}$	durchschnittlich	+0.01	$(\mu_0 - 1) = + 0.000 0028,$
$h = 6000 \text{ m}$	›	—0.011	$(\mu_0 - 1) = - 0.000 0031.$

¹⁾ Ich halte mich streng an das von Bauernfeind, barometr. Höhenmessung, München 1862, pag. 104 mitgetheilte Material. Für h' setze ich jedoch die durchschnittliche Erhebung für 1°C. Temperaturabnahme in der Luftzone bis etwa 1 km Höhe.

$$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = 1 - \frac{m}{H'} \cdot h, \text{ wie (4),}$$

d. h. auf gleichmässige Wärmeabnahme um 1°C. auf h' m. In höheren Luftzonen ist dagegen:

$$\frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(\frac{H' - h}{H'} \right)^2 < \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} = \left(\frac{H - h}{H} \right)^m$$

d. h. die $\mu - 1$ werden in der Atmosphäre zweiten Grades kleiner, die $(1 + \gamma t)$ und t grösser, als bei gleichmässiger Wärmeabnahme. Unser Ansatz leistet also den allgemeinen physikalischen Verhältnissen Genüge. Sehen wir nun zu, in welchem Grade dies der Fall ist.

Welsh fand in der geogr. Breite von $51^\circ 50' 1)$:

Die Atmosphäre zweiten Grades deckt sich also in der massgebenden Luftzone nur genähert mit der realen Atmosphäre, wie bei der ruhelosen Bewegung des Luftmeeres nicht anders zu erwarten. Es lässt sich aber leicht beweisen, dass trotzdem die astronomische Refraction der beiden Atmosphären, selbst am Horizonte, fast genau dieselbe ist.

Es sei in den Höhen $h_1 = 1000$ m und $h_2 = \text{ca. } 3000$ m die Brechkraft der Atmosphäre zweiten Grades $\mu_1 - 1$ und $\mu_2 - 1$, die der realen Atmosphäre (welche nur in der untersten Luftzone in Folge der gleichmässigen Wärmeabnahme mit jener zusammenfällt) $\mu_1 - 1$ und $\mu_2 - 1 + i\mu_2$. Ferner bezeichne man die Einfallswinkel an den Schichten h_1, h_2 mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ¹⁾ und die Theilrefractionen in den Intervallen 0 bis h_1, h_1 bis h_2, h_2 bis zur Grenze der Atmosphäre mit ρ_0, ρ_1, ρ_2 bezügl. r_0, r_1, r_2 . Dann ist:

$$\rho_0 = r_0.$$

Ferner kann man genähert setzen für die Atmosphäre zweiten Grades:

$$\rho_1 = (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{tg} \varepsilon_1, \quad \rho_2 = (\mu_2 - 1) \operatorname{tg} \varepsilon_2, \\ \text{nach Lambert,}$$

und mit demselben Grade der Annäherung für die reale Atmosphäre:

$$r_1 = (\mu_1 - \mu_2 - i\mu_2) \operatorname{tg} \varepsilon_1, \quad r_2 = (\mu_2 + i\mu_2 - 1) \operatorname{tg} \varepsilon_2.$$

Folglich ist:

$$(\rho_1 - r_1) + (\rho_2 - r_2) = + i\mu_2 (\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2).$$

Da $(\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2)$ und $\partial\mu_2$, bei passender Begrenzung der Intervalle, klein bleibt,²⁾ so ist genähert:

$$(\rho_1 - r_1) + (\rho_2 - r_2) = 0,$$

oder die Gesamtrefraction durch ρ bezügl. r bezeichnet:

$$\rho - r = 0, \quad \rho = r.$$

Die theoretisch vorausgesetzte Atmosphäre zweiten Grades führt somit auf einen Näherungswerth der astronomischen Refraction. Wie sich später zeigen wird, beträgt der Fehler der Horizontalrefraction, bei Zugrundelegung dieser Atmosphäre, nur wenige Secunden.

IV. Die Refraction der Atmosphäre zweiten Grades in kleineren Zenithdistanzen (bis 60°).

Das Differential der astronomischen Refraction lautet, wenn R den Erdradius, ζ die Zenithdistanz bezeichnet:

$$\partial\rho = \frac{\partial\mu}{\mu} \frac{\sin\zeta}{V\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 - \sin^2\zeta} = \frac{\partial\mu}{\mu} \frac{\sin\zeta}{V\cos^2\zeta + \frac{2h}{R} - 2(\mu_0 - \mu)}$$

Man setze nun statt μ seinen Mittelwerth $\frac{1}{2}(\mu_0 + 1)$, was bis in höhere Zenithdistanzen ohne Fehler geschehen kann.³⁾ Alsdann ergibt sich:

$$\text{wegen } \mu_0 - \mu = 2(\mu_0 - 1) \frac{h}{H'} - (\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'}\right)^2 \text{ zufolge (11):} \\ \partial\rho = \frac{2 \sin\zeta}{\mu_0 + 1} \cdot \frac{\partial\mu}{V\cos^2\zeta + 2\left(\frac{H'}{R} - 2\frac{\mu_0 - 1}{1}\right) \frac{h}{H'} + 2(\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'}\right)^2},$$

$$\text{Berechnet man darin für mittleren Luftzustand } (\mu_0 - 1 = \frac{0.76 \cdot 0.000294}{b} = \frac{0.75 \cdot 0.000294}{0.76 \cdot 1.107} = 0.000281):$$

$$\cos^2\zeta + 2\left(\frac{H'}{R} - 2\frac{\mu_0 - 1}{1}\right) \frac{h}{H'} = F(h) \text{ und } 2(\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'}\right)^2 = f(h);$$

¹⁾ Sie sind in beiden Atmosphären nahe gleich; denn $\sin \varepsilon = (1 + \mu_0 - \mu)(1 - h/R) \cdot \sin \varepsilon_1$, sodass die kleine Differenz $\partial\mu$ der realen Atmosphäre neben 1 vernachlässigt werden kann.

²⁾ Für $h_2 = 3000$ m war, nach den Messungen von Welsh, $\partial\mu_2 = \text{ca. } 0.0000028$.

³⁾ Der dadurch gemachte Fehler in $\partial\rho$ ist kleiner, als $1/1000$ des Betrages; auch hat er in den unteren und oberen Luftschichten entgegengesetztes Zeichen.

so sieht man, dass in kleineren Zenithdistanzen (bis 60°) $f(h)$ neben $F(h)$ vernachlässigt werden kann.¹⁾ Man hat also:

$$\rho = \frac{2 \sin \zeta}{\mu_0 + 1} \int \frac{d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2 \left(\frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1} \right) \frac{h}{H'}}}$$

und entwickelt nun die Wurzel nach Potenzen von h/H' , setzt, zufolge (11), $h/H' = 1 - \sqrt{(\mu - 1)(\mu_0 - 1)}$ und integriert in den Grenzen $\mu - 1 = \mu_0 - 1$ und $\mu - 1 = 0$. Auf diese Weise ergibt sich leicht als Refraction der Atmosphäre zweiten Grades (bis 60° Z.):

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{2(\mu_0 - 1) \operatorname{tg} \zeta}{\mu_0 + 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a}{\cos^2 \zeta} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \frac{a^2}{\cos^4 \zeta} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{a^3}{\cos^6 \zeta} \dots \right) \\ \text{für } a = H'/R - 2(\mu_0 - 1), \end{array} \right.$$

und dies ist nach der Formel: $\operatorname{tg} \zeta - \partial \zeta / \cos^2 \zeta + \dots = \operatorname{tg}(\zeta - \partial \zeta)$ sehr nahe:

$$\rho = \frac{2(\mu_0 - 1)}{\mu_0 + 1} \operatorname{tg} \left(\zeta - \frac{a}{3} \operatorname{tg} \zeta \right) = \frac{2(\mu_0 - 1)}{\mu_0 + 1} \operatorname{tg} \left(\zeta - \frac{a}{3} \frac{\rho}{\mu_0 - 1} \right).$$

Setzt man ausserdem noch, in $\frac{a}{3} \frac{\rho}{\mu_0 - 1} = \frac{H'/R - 2(\mu_0 - 1)}{3} \cdot \frac{\rho}{\mu_0 - 1}$, für die Constanten ihre Mittelwerthe,²⁾ nämlich $H' = 22050$ m, zufolge (12), $R = 6366700$ m, $\mu_0 - 1 = 0.0002813$, so ergibt sich endlich:

$$(14) \quad \rho = \frac{2(\mu_0 - 1)}{\mu_0 + 1} \operatorname{tg}(\zeta - 3.45 \rho).$$

Die Refraction bis gegen 60° Zenithdistanz ist somit von der Erhebung für 1° Temperaturabnahme (h') unabhängig; sie ändert sich in derselben Zenithdistanz nur mit dem Luftzustande an der Erde. — Bei richtiger Bestimmung von $\mu_0 - 1$ ³⁾ muss daher die Refraction (NB. derselben Farbe) in kleineren Zenithdistanzen bei gleichem $\mu_0 - 1$ für alle Orte dieselbe sein.

Beispiel. Es sei $t_0 = 50^\circ F.$ ($9.3^\circ C.$), $b_0 = 29.6$ Z. engl. (0.7518 m), also $\mu_0 - 1 = 0.000281267$; ferner $S/s = 10517$, $k = 0.00567$, nach (6), $\varphi = 45^\circ$, $R = 6366700$ m; so erhält man aus (11) und (13):

für $h' =$	100 m	110 m	120 m	130 m	140 m	150 m
$H' =$	23500	22600	22000	21400	21000	20600
$\rho_{30} =$	33".44	—	—	—	—	33".45
$\rho_{60} =$	100.06	100".07	100".09	100".10	100".11	100.12

¹⁾ Noch in 70° Zenithdistanz ist beispielsweise für mittleren Luftzustand und $h' = 150$ m (d. i. $H' = 26000$ m):

in der Höhe von	1000 m	$\frac{f(h)}{F(h)} = 0.00001$
5000		0.00028
10000		0.00110
20000		0.00432

²⁾ Der dadurch gemachte Fehler ist in 60° Zenithdistanz höchstens $1/10$ Secunde.

³⁾ Denkt man sich die Atmosphäre in ihrer (theoretisch vorausgesetzten) Gleichgewichtslage, also in denselben Schichten den gleichen Luftdruck und die gleiche Wärme, so erhält man an der Erdoberfläche für $\mu_0 - 1$ einen Mittelwerth, welcher von den einzelnen $\mu_0 - 1$ (insbesondere dem Luftzustande an der Beobachtungsstation) mehr oder weniger abweichen kann. Daraus ersieht man, dass für $\mu_0 - 1$ der Durchschnitt aus den Luftzuständen in der ganzen vom Strahle durchlaufenen Luftsäule genommen werden muss. Ausserdem ist zu beachten, dass die Brechkraft für Luft im Normalzustande ($N - 1$) von 0.000294, um der Feuchtigkeit willen, abweichen kann (Wiedemann's Annalen 15, 1882, p. 152-154), sodass dem gleichen b_0 , t_0 nicht nothwendig auch gleiches $\mu_0 - 1 = \frac{b_0}{0.76} \frac{N - 1}{1 + \gamma t_0}$ entsprechen muss.

Diese Werthe sind ungefähr das Mittel aus den entsprechenden durch directe Messung gefundenen Refractionen:

	Bradley	Bessel	Delambre	Bürg
$\varrho_{30} =$	33".0	33".3	33".3	33".7
$\varrho_{60} =$	98.4	99.7	99.5	101.0

Die Verschiedenheit der letzteren erklärt sich daraus, dass bei demselben Barometer und Thermometer an der Beobachtungsstation der mittlere Luftzustand der ganzen

vom Strahle durchlaufenen Luftsäule verschieden sein kann, jenachdem der Ort im Centrum oder an der Grenze eines Gebietes hohen Luftdruckes liegt etc. Versteht man unter $\mu_0 - 1$ die Brechkraft der Atmosphäre, wie sie der vorausgesetzten Gleichgewichtslage entsprechen würde, d. h. den Durchschnitt aus den gleichzeitigen $\mu_0 - 1$, wie sie durch Localverhältnisse und durch die allgemeine Luftdruck- und Temperaturvertheilung bedingt sind; so würde sich für $\mu_0 - 1 = 0.000281267$ an allen Orten $\varrho_{30} = 33".4$, und $\varrho_{60} = 100".1$ ergeben.

V. Die Refraction der Atmosphäre zweiten Grades bis 80 Grad Zenithdistanz.

Im vierten Abschnitt hatten wir als Particularrefraction gefunden:

$$\varrho = \frac{2 \sin \zeta}{\mu_0 + 1} \frac{d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2 \left(\frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1} \right) \frac{h}{H'} + 2 (\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'} \right)^2}}$$

Entwickelt man die Wurzel nach Potenzen von $2(\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'} \right)^2$, so ist sehr nahe:

$$\varrho = \frac{2 \sin \zeta}{\mu_0 + 1} \int \frac{d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2 \left(\frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1} \right) \frac{h}{H'}}} - (\mu_0 - 1) \sin \zeta \int \frac{\left(\frac{h}{H'} \right)^2 d\mu}{\left(\cos^2 \zeta + \frac{2h}{R} \right)^{3/2}},$$

und wenn man ausserdem im zweiten Integrale (für 80° Zenithdistanz $\frac{1}{8}$ Secunde) im Radicanden $\cos^2 \zeta$ statt $\cos^2 \zeta + 2h/R$ und im Zähler aus (11) $\frac{h}{H'} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 - 1}$ einführt:

$$\varrho = \frac{2 \sin \zeta}{\mu_0 + 1} \int \frac{d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2 \left(\frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1} \right) \frac{h}{H'}}} - \frac{1}{4} \frac{\sin \zeta}{(\mu_0 - 1)^2 \cos^3 \zeta} \int (\mu_0 - \mu)^2 d\mu.$$

Nach Integration erhält man ähnlich, wie im vierten Abschnitt, für ϱ_0 bis ϱ_{80} :

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho = \frac{2(\mu_0 - 1) \operatorname{tg} \zeta}{\mu_0 + 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a}{\cos^2 \zeta} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \frac{a^2}{\cos^4 \zeta} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{a^3}{\cos^6 \zeta} + \dots \right) - \frac{(\mu_0 - 1)^2 \operatorname{tg} \zeta}{12 \cos^2 \zeta} \\ \text{für } a = H'/R - 2(\mu_0 - 1). \end{cases}$$

Beispiel. Es sei wieder $t_0 = 50^\circ F.$ ($9.3^\circ C.$), $b_0 = 29.6$ Z. engl. (0.7518 m), also $\mu_0 - 1 = 0.000281267$, ferner $S/s = 10517$, $k' = 0.00567$, nach (6), $\varphi = 45^\circ$, $R = 6366700$ m; so kommt nach (11) und (15):

für h'	100 m	110 m	120 m	130 m	140 m	150 m
H'	23499	22641	21972	21436	20997	20631
ϱ_{70}	157".95	158".01	158".05	158".09	158".12	158".15
ϱ_{80}	318.15	318.58	318.91	319.18	319.40	319.58.

Auch diese Werthe liegen innerhalb der Grenzen, welche durch directe Messung gefunden sind (ϱ_{80} ist nach, Bradley 315".1, nach Bessel 316".5, nach Bürg 322".8). Wenn die bezüglichen Refractionen von Bürg und Bradley beträchtlich grösser resp. kleiner sind, als die Tafelwerthe, so liegt dies, nach den Bemerkungen zum vierten Abschnitt, darin, dass bei demselben Barometer und Thermometer an der Beobachtungsstation das der Ruhelage der Atmosphäre entsprechende $\mu_0 - 1$ von 0.000281267 bedeutend abweichen kann.

VI. Die Refraction der Atmosphäre zweiten Grades von μ_0 bis μ_∞

Setzt man im Differential der astronomischen Refraction Abschnitt IV, Anfang:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 - (\mu_0 - \mu)} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0^2}$$

so wird:

$$(16) \quad \varrho = \frac{\sin \zeta}{\mu_0} \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{2h}{R} - 2(\mu_0 - \mu)}} + \frac{\sin \zeta}{\mu_0^2} \int_1^{\mu_0} \frac{(\mu_0 - \mu) d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{2h}{R} - 2(\mu_0 - \mu)}}$$

Im zweiten Integrale, welches durch $\mathcal{F}_2$ bezeichnet sei, (für den horizontal gebrochenen Strahl = $1/5$ Secunde) kann man genähert setzen:

$$h = \frac{H'}{2} \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0 - 1}, \text{ zufolge (11),}$$

sodass:

$$\mathcal{F}_2 = \sin \zeta \int_1^{\mu_0} \frac{(\mu_0 - \mu) d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \left(\frac{H'}{R} - 2 \right) (\mu_0 - \mu)}}$$

Dies giebt, in bekannter Weise integrirt:

$$\mathcal{F}_2 = \frac{2 \sin \zeta}{3} \left[\frac{\mu_0 - 1}{H'/R - 2 (\mu_0 - 1)} \right]^2 \left[2 \cos^2 \zeta + \left(\frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1} - 2 \cos^2 \zeta \right) \sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1}} \right]$$

Bei dem geringen Betrage des Integrals kann sodann für $\mu_0 - 1$ neben H'/R sein Mittelwerth (0.0002813) genommen werden; $\mathcal{F}_2$ ist also für gleiches ζ und H' dem Quadrate von $\mu_0 - 1$ direct proportional, d. h.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_2 = c \cdot (\mu_0 - 1)^2 \\ \text{für } c = \frac{2 \sin \zeta}{3} \frac{2 \cos^2 \zeta + (H'/R - 0.00056 - 2 \cos^2 \zeta) \sqrt{\cos^2 \zeta + H'/R - 0.00056}}{(H'/R - 0.00056)^2} \end{array} \right.$$

Berechnet man nun c für die verschiedenen Zenithdistanzen und die Grenzwerte von h' (100 und 150 m), d. i. $H' = 23500$ und 20600 m, so findet man:

für $h' = 100$ m	$h' = 150$ m	für $h' = 100$ m	$h' = 150$ m
$c_{70} = 1.5$	$c_{70} = 1.5$	$c_{87} = 7.3$	$c_{87} = 7.5$
$c_{80} = 2.7$	$c_{80} = 2.8$	$c_{88} = 8.9$	$c_{88} = 9.3$
$c_{85} = 5.1$	$c_{85} = 5.2$	$c_{89} = 10.8$	$c_{89} = 11.5$
$c_{86} = 6.0$	$c_{86} = 6.1$	$c_{90} = 11.9$	$c_{90} = 12.9^1)$

Dadurch ist das Integral $\mathcal{F}_2$ bestimmt, und Gleichung (16) verwandelt sich in:

$$\varrho = \frac{\sin \zeta}{\mu_0} \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{2h}{R} - 2(\mu_0 - \mu)}} + c \cdot (\mu_0 - 1)$$

Nun ist:

¹⁾ In Zenithdistanzen unter 70° ist $\mathcal{F}_2$ kleiner, als $c \cdot (\mu_0 - 1)^2$ $1/10$ Secunde und kann daher vernachlässigt werden.

$$d\mu = -2(\mu_0 - 1) \left(1 - \frac{h}{H'}\right) \frac{dh}{H'}, \text{ zufolge (11),}$$

$$\mu_0 - \mu = 2(\mu_0 - 1) \frac{h}{H'} - (\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'}\right)^2, \text{ also:}$$

$$\varrho = -2 \sin \zeta \frac{\mu_0 - 1}{\mu_0} \int_{H'}^0 \frac{\left(1 - \frac{h}{H'}\right) \frac{dh}{H'}}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2 \left(\frac{H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1}\right) \frac{h}{H'} + 2(\mu_0 - 1) \left(\frac{h}{H'}\right)^2}} + c(\mu_0 - 1)^2.$$

Setzt man noch:

$$1 - \frac{h}{H'} = x,$$

so wird:

$$\varrho = 2 \sin \zeta \frac{\mu_0 - 1}{\mu_0} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{2(\mu_0 - 1) \cdot x^2 - \frac{2H'}{R} \cdot x + \left(\cos^2 \zeta + \frac{2H'}{R} - 2 \frac{\mu_0 - 1}{1}\right)}} + c(\mu_0 - 1)^2.$$

Daraus ergibt sich nach bekannten Reductionsformeln, als genauester und allgemeinsten Werth der astronomischen Refraction (der Atmosphäre zweiten Grades):

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \frac{\sin \zeta}{\mu_0} \left[\frac{H'/R}{\sqrt{2(\mu_0 - 1)}} \cdot \log. \text{nat.} \frac{H'/R - 2(\mu_0 - 1) - \cos \zeta \sqrt{2(\mu_0 - 1)}}{H'/R - \sqrt{2(\mu_0 - 1)} \cdot q} + \cos \zeta - \sqrt{q} \right] + c(\mu_0 - 1)^2, \\ \text{für } q &= \cos^2 \zeta + \frac{2H'}{R} - 2(\mu_0 - 1). \end{aligned} \right.$$

Beispiel. Setzt man bei mittlerem Luftzustande, $(\mu_0 - 1 = 0.000281267)$, $S/s = 10517$, $h = 0.00567$, zufolge (6), $\varphi = 45^\circ$, $R = 6366700$ m; so ist:

für $h' =$	100 m	110 m	120 m	130 m	140 m	150 m
$H' =$	23498.87	22640.65	21971.94	21436.20	20997.36	20631.31
$\varrho_{85} =$	9' 50".0	9' 52".3	9' 54".2	9' 55".8	9' 57".0	9' 58".1
$\varrho_{86} =$	11 42.0	11 45.7	11 48.7	11 51.2	11 53.3	11 55.0
$\varrho_{87} =$	14 17.4	14 23.9	14 29.0	14 33.2	14 36.7	14 39.7
$\varrho_{88} =$	18 1.9	18 13.3	18 22.6	18 30.2	18 36.6	18 42.1
$\varrho_{89} =$	23 38.1	23 59.7	24 17.3	24 32.0	24 44.3	24 54.9
$\varrho_{90} =$	32 18.4	33 0.8	33 35.9	34 5.3	34 30.4	34 52.1

Diese Werthe liegen innerhalb der Grenzen, die man durch Beobachtung gefunden hat. Beispielsweise ist:

nach Groombridge, tab. I.	$\varrho_{90} = 31' 27''.9$
Bradley	33 0.0
Groombridge, tab. II.	34 28.1
Bessel	34 54.1

Wenn die kleinsten bei mittlerem Luftzustande direct gefundenen Refractionen (z. B. in 90° Z. $\varrho = 31' 28''$) mehrfach ausserhalb des Rahmens der Tafel liegen (nach dieser ist z. B. $\varrho_{90} > 32' 18''$); so kommt dies daher, weil bei mittlerem Barometer und Thermometer an der Beobachtungsstation der durchschnittliche Luftzustand, wie er sich bei

Herstellung der Gleichgewichtslage der Atmosphäre ergeben würde, von dem vorausgesetzten $\mu_0 - 1 = 0.000281267$ abweichen kann.

VII. Die Refraction der realen Atmosphäre.

Die Atmosphäre eines Ortes wird von der theoretisch vorausgesetzten Atmosphäre zweiten Grades schon in der massgebenden Luftzone mehr oder weniger abweichen.¹⁾

¹⁾ Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Abweichung für verschiedene Orte je nach den klimatischen Verhältnissen, dem Feuchtigkeitsgehalte der Atmosphäre u. s. w. verschieden ist. Vergl. Bruhns, die astronomische Strahlenbrechung, Leipzig 1861, pag. 181.

Die oben aufgestellte Refraktionsformel bedarf daher noch einer Correction.

Es sei in den Höhen $h_1, h_2, h_3 \dots$ die Brechkraft der Atmosphäre zweiten Grades $\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \mu_3 - 1 \dots$, die der realen Atmosphäre $\mu_1 - 1$ (weil beide Atmosphären in der Nähe der Erdoberfläche, in Folge der gleichmässigen Wärmeabnahme, zusammenfallen), $\mu_2 - 1 + \partial\mu_2, \mu_3 - 1 + \partial\mu_3 \dots$. Die Einfallswinkel, in beiden Atmosphären nahezu dieselben,¹⁾ seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$; endlich die Theilrefractionen in den Intervallen 0 bis h_1, h_1 bis h_2, h_2 bis $h_3 \dots$ in der Atmosphäre zweiten Grades $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots$, in der realen Atmosphäre $r_0, r_1, r_2 \dots$. Alsdann ist:

$$r_0 = \varrho_0,$$

weil die beiden Atmosphären in der untersten Luftzone bis

Mithin:

$$(r_1 - \varrho_1) + (r_2 - \varrho_2) + (r_3 - \varrho_3) + \dots = -\partial\mu_2 \cdot \text{tg } \varepsilon_1 + (\partial\mu_2 - \partial\mu_3) \text{tg } \varepsilon_2 + (\partial\mu_3 - \partial\mu_4) \text{tg } \varepsilon_3 + \dots + \partial\mu_n \cdot \text{tg } \varepsilon_n,$$

oder, die Gesamttrefraction der beiden Atmosphären durch r und ϱ bezeichnet:

$$r - \varrho = -\partial\mu_2 (\text{tg } \varepsilon_1 - \text{tg } \varepsilon_2) - \partial\mu_3 (\text{tg } \varepsilon_2 - \text{tg } \varepsilon_3) - \partial\mu_4 (\text{tg } \varepsilon_3 - \text{tg } \varepsilon_4) - \dots$$

Daraus ergibt sich endlich als Refraction der realen Atmosphäre:

$$(18) \quad r = \varrho - \partial\mu_2 (\text{tg } \varepsilon_1 - \text{tg } \varepsilon_2) - \partial\mu_3 (\text{tg } \varepsilon_2 - \text{tg } \varepsilon_3) - \dots$$

Hierin ist ϱ gegeben durch die Formeln im Abschnitt IV-VI, und $\text{tg } \varepsilon$, zufolge der Entwicklung des Differentials der astronomischen Refraction, bestimmt durch:

$$\text{tg } \varepsilon_n = \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\cos^2 \zeta + \frac{2h_n}{R} - 2(\mu_0 - \mu_n)}} = \frac{\sin \zeta}{\sqrt{\cos^2 \zeta + 2\left(\frac{H'}{R} - 2\frac{\mu_0 - 1}{1}\right)\frac{h_n}{H'}}}.$$

Beispiel. Es soll die Horizontalrefraction für eine Constitution der Atmosphäre, wie sie Welsh auf seiner vierten Luftfahrt ($\varphi = 51^\circ 50'$, $R = 6366700$ m) gefunden hat, berechnet werden. Hier hat man, nach den Angaben im Abschnitt III:

$$t_0 = 9.8^\circ \text{C.}, \quad b_0 = 0.76 \text{ m}, \quad \mu_0 - 1 = \frac{b_0}{0.76} \frac{0.000294}{1 + \gamma t_0} = 0.000283793, \quad h' = 148 \text{ m}, \quad H' = 20746.7 \text{ m},$$

$$h_1 = 1000 \text{ m (die Höhe, bis zu welcher beide Atmosphären sich decken),}$$

$$h_2 = 3240 \text{ m}, \quad \partial\mu_2 = -0.005 \cdot (\mu_0 - 1) = -0.000001419,$$

$$h_3 = 4682 \text{ m}, \quad \partial\mu_3 = 0,$$

$$h_4 = 5761 \text{ m}, \quad \partial\mu_4 = +0.012 \cdot (\mu_0 - 1) = +0.000003406,$$

$$h_5 = 6864 \text{ m}, \quad \partial\mu_5 = +0.022 \cdot (\mu_0 - 1) = +0.000006243;$$

ferner ist nach der letzten Formel:

$$\text{tg } \varepsilon_1 = 62.072, \quad \text{tg } \varepsilon_2 = 34.484, \quad \text{tg } \varepsilon_3 = 28.687, \quad \text{tg } \varepsilon_4 = 25.861, \quad \text{tg } \varepsilon_5 = 23.692.$$

Daraus folgt nach (18):

$$r_{90} = 35' 5''.2 + 3''.3 = 35' 8''.5.$$

¹⁾ Man vergleiche Abschnitt III, Anmerkung.

²⁾ Da es sich um die Vergleichung zweier Atmosphären und um die Ermittlung von Correctionen, also Grössen zweiter Ordnung, handelt, so ist diese Annäherung vollkommen ausreichend.

gegen 1000 m Höhe, so lange h' unverändert bleibt, sich decken. Ferner ist, nach Lambert, für die reale Atmosphäre genähert:

$$\begin{aligned} r_1 &= (\mu_1 - \mu_2 - \partial\mu_2) \text{tg } \varepsilon_1, \\ r_2 &= (\mu_2 - \mu_3 + \partial\mu_2 - \partial\mu_3) \text{tg } \varepsilon_2, \\ r_3 &= (\mu_3 - \mu_4 + \partial\mu_3 - \partial\mu_4) \text{tg } \varepsilon_3 \dots, \\ r_n &= (\mu_n - 1 + \partial\mu_n) \text{tg } \varepsilon_n, \end{aligned}$$

und mit demselben Grade der Annäherung für die Atmosphäre zweiten Grades:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= (\mu_1 - \mu_2) \text{tg } \varepsilon_1, \\ \varrho_2 &= (\mu_2 - \mu_3) \text{tg } \varepsilon_2, \\ \varrho_3 &= (\mu_3 - \mu_4) \text{tg } \varepsilon_3, \\ \varrho_n &= (\mu_n - 1) \text{tg } \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Die Horizontalrefraction der Atmosphäre zweiten Grades ($35' 5'' 2$) ist somit bei der vorausgesetzten Constitution der Atmosphäre nicht fehlerhaft um 4 Secunden.

VIII. Bestimmung einiger meteorologischer Elemente aus der astronomischen Refraction.

Aus der Formel $\varrho = (\mu_0 - 1) \operatorname{tg}(\zeta - 3.45 \varrho)$ — giltig bis gegen 60° Zenithdistanz — ergibt sich:

$$\mu_0 - 1 = \frac{1}{m} \sum \frac{\varrho}{\operatorname{tg}(\zeta - 3.45 \varrho)},$$

wo m die Anzahl der Refractionsbestimmungen bedeutet und unter $\mu_0 - 1$ die Brechkraft der ruhend gedachten Atmosphäre, d. h. der Durchschnitt aus den gleichzeitigen $\mu_0 - 1$ der ganzen vom Strahle durchlaufenen Luftsäule verstanden wird. Daraus folgt weiter als Brechkraft der Luft im Normalzustande:

$$1. \quad N - 1 = \frac{0.76}{b_0} (1 + \gamma t_0) (\mu_0 - 1) = \frac{0.76}{m} \sum \frac{1 + \gamma t_0}{b_0} \frac{\varrho}{\operatorname{tg}(\zeta - 3.45 \varrho)}.$$

Darin ist b_0 , t_0 das mittlere, der Gleichgewichtslage der Atmosphäre entsprechende Barometer und Thermometer.

Die Brechkraft der Luft im Normalzustande — und indirect der Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre, da erstere sich mit diesem etwas ändert — ist somit bestimmt durch die astronomische Refraction und die jeweilige Luftdruck- und Temperaturvertheilung in der Nähe der Beobachtungsstation.

Ferner sei:

$$H' = H + \partial H,$$

also H ein Näherungswerth für die Höhe der Atmosphäre zweiten Grades, welcher aus der Grösse der Strahlenbrechung am Horizonte leicht erkannt wird (Abschnitt VI). Substituirt man diesen Werth in die Refractionsformel (18) und entwickelt nach Potenzen von ∂H mit Vernachlässigung von $(\partial H)^2$ etc., so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$r = u + w \cdot \partial H - (\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2) \partial \mu_2 - (\operatorname{tg} \varepsilon_2 - \operatorname{tg} \varepsilon_3) \partial \mu_3 - \dots,$$

wobei man successive zu berechnen hat:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = \cos^2 \zeta + 2H/R - 2(\mu_0 - 1), & b = H/R - \sqrt{2(\mu_0 - 1)a}, \\ c = 1 - \sqrt{2(\mu_0 - 1)/a}, & d = H/R - 2(\mu_0 - 1) - \cos \zeta \sqrt{2(\mu_0 - 1)}, \\ e = \frac{1}{b} \cdot \left(1 - \frac{cd}{b}\right), & f = \sqrt{\frac{1}{2(\mu_0 - 1)}} \cdot \left(\frac{H}{R} \frac{be}{d} + \frac{d}{b}\right), \\ u = \frac{\sin \zeta}{\mu_0} \left(\frac{H/R}{\sqrt{2(\mu_0 - 1)}} \cdot \frac{d}{b} + \cos \zeta - \sqrt{a} \right) + k(\mu_0 - 1)^2, \\ w = \frac{\sin \zeta}{\mu_0} \left(f - \sqrt{\frac{1}{a}} \right) \cdot R. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung löst man nun, in Anbetracht der ruhelosen Bewegung des Luftmeeres, nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate, mit Zugrundelegung einer ganzen Reihe von gleichzeitigen Refractionsbestimmungen am Horizonte (r). Es ergibt sich dann, bei Beschränkung auf ein $\partial \mu$ in passend gewählter Höhe ($\partial \mu_2$), d. h. bei Beschränkung auf Zenithdistanzen von etwa 83° bis 88° , in welchen die $\partial \mu$ der mittleren und oberen Luftschichten auf die Strahlenbrechung ohne Einfluss sind:

$$2. \quad \partial H = \frac{\sum \frac{r-u}{w} \sum \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2}{w} \right)^2 - \sum \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2}{w} \sum \frac{r-u}{w} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2}{w}}{m \sum \left(\frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2}{w} \right)^2 - \left(\sum \frac{\operatorname{tg} \varepsilon_1 - \operatorname{tg} \varepsilon_2}{w} \right)^2},$$

$$3. \quad \partial\mu_2 = \frac{\sum \frac{r-u}{w} \sum \frac{\lg \varepsilon_1 - \lg \varepsilon_2}{w} - m \sum \frac{r-u}{w} \frac{\lg \varepsilon_1 - \lg \varepsilon_2}{w}}{m \sum \left(\frac{\lg \varepsilon_1 - \lg \varepsilon_2}{w} \right)^2 - \left(\sum \frac{\lg \varepsilon_1 - \lg \varepsilon_2}{w} \right)^2} \quad ^1)$$

Dadurch ist bestimmt:

$$4. \quad \mu_2 - 1 + \partial\mu_2 = \left(\frac{H' - h_2}{H'} \right)^2 + \partial\mu_2,$$

$$5. \quad H' = H + \partial H,$$

und wegen

$$H' = \frac{1.52 (1 + \gamma t_0) S/s}{(1 - k) (1 - \alpha \cos 2\varphi) - 0.76 (\gamma/h' - \beta) S/s},$$

$$6. \quad 1 - k = \frac{0.76 (\gamma/h' - \beta) + 1.52 (1 + \gamma t_0) / H'}{(1 - \alpha \cos 2\varphi) S/S},$$

$$7. \quad \frac{1}{h'} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{(1 - k) (1 - \alpha \cos 2\varphi) H' - 1.52 (1 + \gamma t_0) S/s}{0.76 H' \cdot S/s} + \beta \right].$$

Durch 4. ist gegeben die jeweilige Brechkraft und somit der Gang des Luftdruckes in der Höhe h_2 ; ²⁾

durch 6., vorausgesetzt, dass h' durch directe Messung ermittelt ist, die durch den Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre bedingte Aenderung der Dichtigkeitsabnahme der untersten Luftzone (Abschnitt I);

durch 7. die jeweilige Erhebung für 1° Temperaturabnahme (in der Nähe der Erdoberfläche), wobei für k ein Näherungswert genommen werden muss.

IX. Bestimmung der astronomischen Refraction aus den meteorologischen Elementen.

Wird k und $\partial\mu$ als bekannt betrachtet, so kann man umgekehrt die astronomische Refraction in jedem Falle nach Formel (18) mit möglichster Genauigkeit berechnen. Dabei ist vorausgesetzt, dass man die Brechkraft der Luft an der Erdoberfläche ($\mu_0 - 1$) und die Erhebung für 1° Temperaturabnahme (h') durch directe Messung genau ermittelt hat. Hierüber mögen nun zum Schlusse noch einige Bemerkungen gestattet sein.

Was $\mu_0 - 1$ betrifft, so wird die Strahlenbrechung, wie schon früher angedeutet, ausser von dem Luftzustande der Beobachtungsstation in A , auch von den Luftzuständen an den Orten $B, C, D \dots$, die der Strahl auf seinem Wege nach A passirt, beeinflusst werden: sie wird verschieden sein, wenn A im Centrum oder an der Grenze eines Gebietes hohen Luftdruckes liegt etc. Man muss daher für $\mu_0 - 1$ einen Mittelwerth der $\mu_0 - 1$ in $A, B, C \dots$ in die Formel einführen. Hierbei darf nun aber nicht das arithmetische Mittel genommen werden; man wird vielmehr die einzelnen $\mu_0 - 1$ mit den Theilrefractionen der

Lichtcurvenzweige über $AB, BC, CD \dots$ als Gewichten zu versehen, oder (was bequemer ist) die Entfernungen $AB, BC, CD \dots$ so zu wählen haben, dass die betreffenden Lichtcurvenzweige gleiche Theilrefraction besitzen und nun das arithmetische Mittel aus den einzelnen $\mu_0 - 1$ genommen werden darf. ³⁾ — Dass der mittlere Luftzustand von demjenigen in A bedeutend abweichen kann, zeigt ein Blick auf die Isothermen- und Isobarenkarten.

Um die Erhebung für 1° Temperaturabnahme direct zu finden, muss auf isolirten Bergkegeln, die von der freien Atmosphäre rings umflossen sind, beobachtet werden, oder mittels Luftballons, in welchen man zu mässiger Höhe aufzusteigen hätte. Biot's Vorschlag, durch aufsteigende und wiederzuerlangende Ballons, welche zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Höhen durch selbstregistrirende Instrumente die Höhe des Barometers und Thermometers angaben, die Constitution der Atmosphäre kennen zu lernen, ist noch nicht ausgeführt, ausserdem würden manche Hindernisse sich der Ausführung in den Weg setzen (Bruhns). Auf jeden Fall ist es unmöglich, ohne vorgängige Ermittelung von h' , die astronomische Refraction am Horizonte auch nur genähert zu berechnen.

¹⁾ Die Rechnung kann durch Tafeln sehr erleichtert werden.

²⁾ Da die Wärmeschwankung in der Höhe h_2 in derselben Jahreszeit sehr gering ist, so können Luftdruck und Brechkraft in dieser Höhe als proportional genommen werden.

³⁾ Eine Tafel der Entfernungen $AB, BC \dots$ in den einzelnen Zenithdistanzen gedenke ich später mitzutheilen.

Die im Obigen entwickelten, verhältnissmässig einfachen Formeln lassen eine weitere, sehr wesentliche Vereinfachung zu (auch die im Abschnitt VIII), indem man für die Atmosphäre zweiten Grades eine solche von gleichmässiger Dichtigkeitsabnahme oder von constanter Dichtigkeit substituirt, deren Höhe selbstverständlich, auf Grund der strengen Formeln, so bestimmt werden müsste, dass jene der realen Atmosphäre in Betreff der astronomischen Refraction gleichwerthig wird. Ueber diesen Punkt behalte ich mir eine Mittheilung für später vor.

Canig bei Guben 1882 im December.

Arthur Kerber.

Positionen des grossen September-Cometen 1882 II.

III. A b t h e i l u n g.

1883	M. Z. Athen	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Vergl.	α app.	δ app.	Red. in l. app.	*	
Jan.	2	10 ^h 9 ^m 58 ^s	+0 ^m 33 ^s 69	—14' 48".4	4	7 ^h 9 ^m 26 ^s 91	—29° 13' 59".3	+4 ^s 36 —14".4	y
	2	10 26 43	—0 54.67	—27 54.5	4	7 9 25.09	—29 13 44.6	+4.64 —14.5	z
	3	10 2 42	+0 44.45	+ 5 50 :	3	7 6 41.24	—29 3 49 :	+4.63 —14.6	a'
	4	9 44 9	—0 16.40	— 3 8.0	9	7 3 59.16	—28 53 16.1	+2.28 — 9.2	b'
	4	10 2 56	—0 0.45	—27 8.3	2	7 3 58.09:	—28 53 0.2:	+2.28 — 9.2	c'
	5	9 21 54	+0 25.40	+11 54.0	5	7 1 20.61	—28 41 50.3	+2.29 — 9.6	d'
	7	9 29 0	—0 0.10	+ 1 34.2	6	6 56 7.10	—28 18 2.9	+2.29 —10.3	e'
	7	9 48 10	—1 2.69	—31 43.6	4	6 56 3.11	—28 17 58.5	+2.28 —10.3	f'
	7	10 10 39	+1 56.59	+31 3.6	4	6 56 0.69	—28 17 57.1	+2.29 —10.4	g'
	10	9 23 30	+0 44.04	— 1 54.7	4	6 48 40.98:	—27 40 5.5:	+2.28 —11.4	h'
	11	9 40 0	+0 48.58	—14 31.4	6	6 46 16.12	—27 26 41.4	+2.28 —11.7	i'
	12	9 20 2	+0 3.29	+ 2 36.6	4	6 43 59.86	—27 12 37.8	+2.28 —12.0	k'
	12	9 31 41	—1 30.19	— 0 27.1	4	6 43 57.35	—27 12 37.5	+2.28 —12.0	i'
	17	9 20 29	—0 19.03	+ 2 3.6	5	6 33 16.93	—25 59 15.7	+2.24 —13.4	l'
	17	9 32 22	+0 53.71	— 3 54.4	5	6 33 15.65	—25 59 16.3	+2.24 —13.4	m'
	25	8 41 42	+1 30.16	—21 21.2	4	6 19 4.56	—23 53 38.9	+2.15 —15.2	n'
	26	8 32 54	+1 47.72	— 2 23.7	6	6 17 33.84	—23 37 41.4	+2.13 —15.4	o'
	28	6 43 20	—0 59.46	+29 30.9	4	6 14 46.62	—23 5 47.2	+2.12 —15.8	o'
	28	9 23 0	—0 37.88	— 1 0.0	4	6 14 36.55	—23 4 35.1	+2.12 —15.8	q'
	29	7 14 41	+1 10.98	—10 6.5	4	6 13 20.61:	—22 50 7.3:	+2.09 —16.1	r'
	29	7 23 43	—1 33.60	—12 25.8	2	6 13 19.11:	—22 50 16.8:	+2.10 —16.1	s'
	30	6 50 2	—0 12.37	—13 50.2	8	6 12 2.04	—22 33 59.6	+2.09 —16.0	t'
	30	9 16 37	—0 15.42	+ 8 12.5	5	6 11 54.20	—22 31 48.3	+2.09 —16.1	r'
	31	7 2 6	—1 28.25	+ 2 52.6	4	6 10 46.14	—22 17 17.0	+2.08 —16.2	t'
	31	9 33 8	—1 35.14	+24 46.9	6	6 10 36.57	—22 15 43.1	+2.08 —16.3	v'
	31	10 0 28	+0 55.42	— 4 20.3	4	6 10 34.76	—22 15 14.1:	+2.06 —16.2	u'
Febr.	3	6 46 42	—0 22.42	— 0 40.6	4	6 7 13.58	—21 29 8.0	+2.03 —16.6	w'
	3	8 55 4	+0 27.43	— 0 40.0	4	6 7 7.26	—21 27 40.7	+2.02 —16.6	x'
	4	6 53 34	—0 35.58	+ 0 1.9	4	6 6 6.29	—21 12 58.8	+2.01 —16.7	y'
	4	7 57 24	—0 33.99	+14 57.9	6	6 6 5.83	—21 12 3.0	+2.01 —16.8	x'
	4	8 6 45	—0 36.69	+ 0 55.4	4	6 6 5.18	—21 12 5.4	+2.01 —16.7	y'
	5	7 12 23	+0 40.28	— 2 14.4	6	6 5 3	—20 56	+2 —16	z'
	5	7 34 58	—1 39.77	+16 51.4	4	6 5 2.09	—20 56 9.6	+2.00 —16.9	y'
	6	6 59 6	—0 41.72	—11 43.8	4	6 4 5.48	—20 40 57.7	+1.98 —16.9	A
	7	9 18 42	+1 9.16	— 2 48.6	4	6 3 1.25	—20 23 52.7	+1.95 —16.9	B
	8	7 12 50	+0 20.72	—13 38.0	6	6 2 12.80	—20 9 30.2	+1.94 —17.1	B