PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 55.

**1. Ueber einige Fälle achromatischer Interferenzen
von Walter König.**

Ueber achromatische Interferenzen ist in den letzten Jahren mancherlei geschrieben worden, von Lord Rayleigh Mascart, Macé de Lépinay u. A. Ich kann hinsichtlich der Literatur über den Gegenstand auf meine ausführlichen Berichte in den Beiblättern verweisen. Die Erörterung der sogenannten Talbot'schen Linien lenkte bei Gelegenheit von Vorträgen über die Interferenzerscheinungen meine Aufmerksamkeit auf solche Interferenzsysteme, deren Achromatisirung nur in einer Richtung möglich ist. Einige hierher gehörige Fälle sollen im folgenden behandelt werden. Die einfachste Art der Achromatisirung eines Interferenzsystemes besteht darin, dass man die Streifen durch ein Prisma betrachtet, ich will sie als die subjective Form der Achromatisirung bezeichnen. Diejenigen Interferenzerscheinungen aber, die nicht bei ausgedehnter Lichtquelle, sondern unter Anwendung eines Lichtspaltes oder -punktes erhalten werden, lassen noch eine andere Art der Achromatisirung zu, indem man den Lichtspalt oder -punkt spectral zerlegt und das so erhaltene Spectrum als Lichtquelle verwendet; ich will diese Art als objective Achromatisirung bezeichnen. Zu der letzteren Klasse von Interferenzerscheinungen gehören auch die Fresnel'schen und Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen. Von der objectiven Art der Achromatisirung soll im Folgenden ausschliesslich Gebrauch gemacht werden, weil sie die einschlägigen Verhältnisse leichter zu übersehen und bequemer zu formuliren gestattet.

**I. Achromatisirung der Beugungsstreifen am geraden Rande
eines Schirmes.**

Der beugende Schirm bilde den negativen Theil der XY -Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems; die Y -Axe

liege im Rande des Schirmes. Die Lichtquelle liege in der senkrechten Entfernung $z = a$ auf der einen, der Beobachtungspunkt in der senkrechten Entfernung $z = b$ auf der anderen Seite des Schirmes. Liegt die Lichtquelle genau in der ZY -Ebene, so bildet diese Ebene die geometrische Schattengrenze und in der Beobachtungsebene $z = b$ sind die Abstände der Maxima und Minima von der Schattengrenze gegeben durch die Gleichung:

$$x_0 = \sqrt{n - \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{b \cdot (a+b) \cdot \lambda}{a}},$$

wenn n eine beliebige ganze Zahl von 1 an und λ die Wellenlänge des Lichtes bedeuten; dabei entsprechen die Maxima den ungeraden, die Minima den geraden Werthen von n .¹⁾ Liegt die Lichtquelle in der Ebene $z = a$ nicht genau in der Z -Axe, sondern im Abstände x_1 von dieser, so trifft die Schattengrenze die Ebene $z = b$ in einem Abstände x'_0 von der Z -Axe, der mit x_1 durch die Gleichung:

$$x'_0 = -\frac{b}{a} x_1$$

zusammenhängt, und die x -Coordinationen der Maxima und Minima sind dann durch die Gleichung bestimmt:

$$x_0 = \sqrt{n - \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{b(a+b)\lambda}{a}} - \frac{b}{a} x_1,$$

vorausgesetzt, dass der Werth von x_1 klein genug gegen a ist, um die zweiten und höheren Potenzen von x_1/a vernachlässigen zu können. Ist die Lichtquelle ein weisser Lichtpunkt oder ein weisser der Y -Axe paralleler Lichtspalt — d. h. ist x_1 für alle Farben gleich —, so entsteht aus der Uebereinanderlagerung der Streifen für die verschiedenen Farben ein chromatischer Effect, ähnlich den Farben der Newton'schen Ringe. Ist die Lichtquelle dagegen ein Spectrum, also x_1 eine Function der Wellenlänge, so erfahren die Streifen für die verschiedenen Farben Verschiebungen entsprechend den Verschiebungen der Schattengrenze; der chromatische Effect wird dadurch verändert, und kann unter Umständen aufgehoben werden. Letzteres ist der Fall, wenn die Streifen für verschiedene Farben sich decken,

1) S. Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Optik. p. 127—128.

also die x_0 von λ unabhängig sind. Die Bedingung der Achromatisierung ist also:

$$\frac{dx_0}{d\lambda} = \sqrt{n - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{b(a+b)}{a}} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{b}{a} \frac{dx_1}{d\lambda} = 0.$$

Die Gleichung lehrt zunächst, dass die Achromatisierung überhaupt nur zu erreichen ist, wenn $dx_1/d\lambda$ positiv ist, da a, b und ebenso die Wurzelgrößen in der vorliegenden Rechnung positive Größen bedeuten; die Farben müssen also so geordnet sein, dass x_1 mit wachsender Wellenlänge zunimmt; d. h. die Achromatisierung ist nur möglich, wenn der beugende Schirm vom violettem Ende her vor das Spectrum geschoben wird. Die Gleichung lehrt ferner, dass eine vollständige Achromatisierung für alle Farben nicht zu erreichen ist; dazu müsste die Vertheilung der Farben das durch die Gleichung:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{A}{\sqrt{\lambda}}$$

ausgedrückte Gesetz befolgen, eine Bedingung, die weder bei einem Beugungs- noch bei einem prismatischen Spectrum erfüllt ist. Die Achromatisierungsgleichung kann also, streng genommen, immer nur für eine einzelne Farbe erfüllt sein; ist sie es für die hellste Strahlengattung des Spectrums (λ_0), so wird der Effect am stärksten sein. Die Gleichung lehrt drittens, dass die Achromatisierung nicht zugleich für das ganze Streifensystem erreichbar ist, sondern streng genommen nur für eine bestimmte Stelle; denn für ein gegebenes Spectrum und einen gegebenen Abstand a des Spectrums vom Schirme stellt die Achromatisierungsgleichung eine Beziehung zwischen n und b dar, so dass also für die Streifen verschiedener Ordnung die Achromatisierung in verschiedenen Abständen vom Schirme eintritt; und zwar rückt die achromatisirte Stelle mit wachsendem b auf höhere Ordnungen.

Die Beobachtung bestätigt diese Sätze unmittelbar. Nur in einem Punkte bedarf die Beschreibung der Thatsachen noch einer Ergänzung. Wenn man die Beugungsstreifen mit einer Lupe oder einem Mikroskop betrachtet, so nimmt man sie bekanntlich nicht bloss dann wahr, wenn der anvisirte Punkt in Richtung der Lichtstrahlen hinter dem Schirme liegt, sondern auch dann, wenn er zwischen Schirm und Lichtquelle liegt

(virtuelle Beugungsstreifen). Die Beobachtung lehrt, dass für diese Punkte zur Erzielung einer achromatisirenden Wirkung der Schirm von der rothen Seite her in das Gesichtsfeld eingeführt werden muss. Dieser Gegensatz gegen das Verhalten der reellen Beugungsstreifen erklärt sich aus der einfachen Ueberlegung, dass in diesen Fällen die zur Interferenz gelangenden Strahlen von Punkten herzukommen scheinen, für die b negativ ist, also x_0 im Vorzeichen mit x_1 übereinstimmt.

Um von dem Verlauf der Erscheinungen und den in Betracht kommenden Dimensionen eine Vorstellung zu geben, mögen einige Messungen mitgetheilt werden, die, obwohl sie ohne besonderen Aufwand ausgeführt wurden, doch für die durch die Achromatisirungsgleichung ausgedrückte Grössenbeziehung eine ausreichende Bestätigung ergaben.

Die Versuchsanordnung war folgende: Ein verticaler Spalt wurde von einem Argandbrenner beleuchtet; ein Prisma entwarf von dieser Lichtlinie ein (virtuelles) Spectrum, dessen Breite durch Aenderung der Entfernung des Prismas vom Spalte nach Belieben verändert werden konnte. Das vom Prisma kommende Licht fiel zunächst auf eine Metallschneide, dann auf ein Quincke'sches Kathetometermikroskop von schwacher Vergrösserung. Mit diesem wurden die Beugungsstreifen beobachtet. Es konnte horizontal in Richtung der Lichtstrahlen an einer Scala verschoben werden; indem diese Verschiebungen von derjenigen Lage aus gerechnet wurden, in der das Mikroskop auf die Schneide selbst eingestellt war, ergaben sie unmittelbar die Grösse b , den Abstand der Streifenebene von der Ebene der Schneide. Um a zu ermitteln, wurde ein Fernrohr in einer grösseren Entfernung vom Prisma so aufgestellt, dass man in ihm einerseits durch das Prisma hindurch das Spectrum, andererseits über das Prisma hinweg eine am scheinbaren Ort des Spectrums horizontal aufgestellte Scala beobachten konnte. Die Scala wurde so eingestellt, dass sie gleichzeitig mit dem Spectrum vollkommen scharf erschien, wobei, um ein scharfes Spaltbild wahrzunehmen, der Argandbrenner durch eine Natronflamme ersetzt wurde. Die Scala lag dann am scheinbaren Ort des Spectrums, und ihr Abstand von der Schneide ergab die Grösse a . Zugleich konnte im Fernrohr auf der Scala, die sich mit dem Spectrum zum Theil deckte,

die Breite des Spectrums gemessen werden. Als solche wurde stets der Abstand der beiden Stellen des Spectrums notirt, die etwa der *F*- und der *C*-Linie entsprachen; diese Grösse, in mm ausgedrückt, werde mit ϵ bezeichnet. Die in unserer Gleichung vorkommende Grösse $dx_1/d\lambda$ kann dann in erster Annäherung $= \epsilon/(\lambda_1 - \lambda_2)$ gesetzt werden, wenn λ_1 und λ_2 die Wellenlängen 0,000656 und 0,000486 der *C*- und der *F*-Linie bedeuten; als Wellenlänge λ_0 der hellsten Strahlengattung wird der Mittelwerth $(\lambda_1 + \lambda_2)/2 = 0,000571$ benutzt. Eine etwas grössere Annäherung erreicht man offenbar dadurch, dass man dem besonderen Character des prismatischen Spectrums Rechnung trägt. Die Farbenvertheilung in einem solchen Spectrum lässt sich — wieder in erster Annäherung — darstellen durch das Gesetz:

$$x_1 = A - \frac{B}{\lambda^2}.$$

Dann ist

$$\left[\frac{dx_1}{d\lambda} \right]_{\lambda_0} = + \frac{2B}{\lambda_0^3}$$

und B lässt sich unmittelbar aus ϵ nach der Gleichung:

$$B = \frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \cdot \epsilon = 0,5235 \times 10^{-6} \times \epsilon$$

berechnen. Die Gleichung, die die Ordnungszahl des achromatisirten Streifens angiebt, lautet in diesem Falle:

$$n = \frac{1}{4} + \frac{16 \cdot B^2}{a \cdot \lambda_0^5} \cdot \frac{b}{a + b}.$$

Es ist zu berücksichtigen, dass n die Zahl der Maxima und Minima angiebt; will man nur die Minima zählen, wie es für die Beobachtung am bequemsten ist, so hat man $n = 2p$ zu setzen; also

$$p = \frac{1}{8} + \frac{8B^2}{a\lambda_0^5} \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Aus dieser Gleichung kann man für gegebene Werthe von B und a entweder den zu einem bestimmten ganzzahligen Werthe von p gehörigen Werth von b , d. h. die Entfernung berechnen, in der die achromatisirende Wirkung gerade auf das p te Minimum fällt, oder man kann umgekehrt für gegebene Werthe von b den Ausdruck rechter Hand berechnen. Man erhält dann zwar im allgemeinen keinen ganzzahligen Werth; aber die nächstgelegenen ganzen Zahlen werden die Ordnungszahlen derjenigen Minima

bedeuten, an denen die achromatisirende Wirkung am stärksten hervortritt. In dieser Weise konnte die Theorie mit der Beobachtung verglichen werden. Die Thatsache der Achromatisirung wurde bei den Streifen niederer Ordnung unmittelbar an dem Mangel der Färbung erkannt; für die Streifen höherer Ordnung kam sie aber vor allem dadurch zur Erscheinung, dass sie hier die Streifen überhaupt erst sichtbar machte, die ohne Achromatisirung gar nicht wahrgenommen werden konnten. Natürlich erscheint dem Beobachter nicht bloss ein einzelner Streifen, sondern im allgemeinen eine ganze Streifengruppe achromatisch; die unteren und oberen Grenzen dieser Gruppen sind im Folgenden unter „beobachtet“ angegeben, darunter als „berechnet“ der aus der Gleichung sich ergebende Werth von p . Für die Vergleichung beider muss in Betracht gezogen werden, dass der berechnete Werth von p nicht gerade mit der Mitte der achromatischen Gruppe zusammenzufallen braucht. Das ist für die niedrigsten und für die höchsten Ordnungszahlen des achromatischen Streifens durch die nach beiden Seiten begrenzte Sichtbarkeit der Streifen überhaupt ausgeschlossen. Es dürfte aber auch für die mittleren Ordnungszahlen nicht streng der Fall sein. Aus der Unsymmetrie in der Anordnung der Interferenzstreifen wäre zu folgern, dass der chromatische Effect von der achromatisirten Stelle aus nach niederen Ordnungen hin stärker als nach höheren hin anwachsen müsste, dass also die Ordnungszahl für die Mitte der beobachteten Gruppe etwas höher ausfallen müsste als die für den achromatischen Streifen berechnete. Doch sind, wie die folgende Uebersicht lehrt, die Beobachtungen nicht genau genug, um auch diese Folgerung zu bestätigen.

Die Beobachtungen sind nach den Werthen von a in drei Abtheilungen gesondert, in denen wieder die Unterabtheilungen durch die von 0,45 bis 5,3 mm variirenden Werthe von ϵ characterisirt sind.

I. Abtheilung.

$$1. a = 1160 \text{ mm} \quad \epsilon = 0,45 \text{ mm.}$$

Nur für grössere b ist eine achromatische Wirkung zuerst an den beiden ersten (ungefähr für $b = 190 \text{ mm}$), weiterhin an den drei ersten Streifen bemerkbar. Die Berechnung ergibt:

$$\text{für } p = 1: b = 187 \text{ mm, } p = 2: b = 491 \text{ mm.}$$

2. $a = 1180 \quad \varepsilon = 0,7.$

Die ersten Streifen erscheinen schon für kleine b achromatisch. Für $b = 100—150$ sind die Streifen 1—5 achromatisch. Berechnet:

für $p = 1: b = 73, \quad p = 2: b = 169, \quad p = 3: b = 280.$

3. $a = 1270 \quad \varepsilon = 1,2.$

Anfangs erstreckt sich die Achromasie vom 1.—5. Streifen. Für die Stelle stärkster Achromasie ergeben sich weiterhin die Werthe:

für $b =$	60	80	100	120	140	160	180	200
beob.	1.—2.	2.—4.			3.—6.	4.—8.	4.—8.	4.—11.
ber. $p =$	2	2,5	3,1	3,7	4,2	4,7	5,2	5,7.

4. $a = 1213 \quad \varepsilon = 1,7.$

$b =$	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
beob.	1.—6.	1.—8.	1.—8.	2.—9.	3.—9.	4.—10.	5.—13.	5.—13.	7.—12.	8.—12.
ber. $p =$	1,5	2,9	4,2	5,4	6,7	7,9	9,0	10,1	11,3	12,3

5. $a = 1200 \quad \varepsilon = 2,0.$

$b =$	20	40	60	80	100	120	140	160	180
beob.	1.—7.	2.—9.	3.—10.	4.—11.	5.—13.	5.—13.	7.—13.	7.—15.	7.—18.
ber. $p =$	2,1	4,0	5,8	7,6	9,3	11,1	12,7	14,3	15,8.

6. $a = 1200 \quad \varepsilon = 2,5$

$b =$	20	40	60	80	100
beob.	1.—7.	2.—9.	3.—10.	5.—15.	6.—16.
ber. $p =$	3,2	6,2	9,1	11,9	14,6.

7. $a = 1165 \quad \varepsilon = 3,0$

$b =$	20	40	60
beob.	2.—8.	4.—12.	5.—14.
ber. $p =$	4,8	9,4	13,8.

8. $a = 1200 \quad \varepsilon = 3,5.$

$b =$	10	20	30	40	50
beob.	1.—9.	3.—13.	3.—14.	5.—18.	10.—15.
ber. $p =$	3,2	6,2	9,1	12,0	15,9.

9. $a = 1200 \quad \varepsilon = 4,0.$

$b =$	5	10	15	20
beob.	1.—8.	2.—9.	3.—13.	4.—14.
ber. $p =$	2,1	4,1	6,1	8,0.

10. $a = 1200 \quad \varepsilon = 5,3.$

$b =$	5	10	15
beob.	1.—8.	2.—10.	3.—15.
ber. $p =$	3,6	7,1	10,5.

II. Abtheilung.

11. $a = 815 \quad \varepsilon = 0,7$.

b	=	20	40	60	80	100	120	140	160	180
beob.		1.—4.	1.—4.	1.—4.	1.—5.	2.—5.	2.—5.	2.—6.	3.—6.	3. u. 4.
ber. p	=	0,6	1,1	1,6	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	4,0.

12. $a = 700 \quad \varepsilon = 1,2$.

b	=	20	40	60	80	100	120	140	160	180
beob.		1.—7.	2.—8.	2.—10.	3.—10.	4.—12.	5.—12.	6.—12.	6.—?	7.—? ¹⁾
ber. p	=	2,2	4,1	6,0	7,7	9,4	11,0	12,5	14,0	15,3

13. $a = 700 \quad \varepsilon = 1,4$.

b	=	20	40	60	80	100
beob.		1.—6.	2.—9.	4.—10.	6.—12.	²⁾
ber. p	=	2,9	5,6	8,1	10,5	12,8

14. $a = 700 \quad \varepsilon = 2,0$.

b	=	20	40	60	80
beob.		2.—9.	5.—13.	7.—16.	7.—16.
ber. p	=	6,0	11,5	16,8	21,8.

15. $a = 750 \quad \varepsilon = 2,5$.

b	=	5,4	14,0	18,0
beob.		2.—5.	2.—6.	4.—7.
ber. p	=	2,3	5,6	7,2.

16. $a = 700 \quad \varepsilon = 3,0$.

b	=	5	10	15
beob.		1.—6.	3.—6.	4.—11.
ber. p	=	3,4	6,7	9,9.

III. Abtheilung.

17. $a = 500 \quad \varepsilon = 1,5$.

b	=	13,9	18,6	25,3	29,2
beob.		1.—3.	3.—6.	4.—7.	5.—10.
ber. p	=	4,5	6,0	8,0	9,1.

Um die achromatisirende Wirkung richtig beurtheilen zu können, muss noch bemerkt werden, dass mit demselben Spalt und demselben Argandbrenner *ohne* spectrale Zerlegung für $a = 1200$ nicht mehr als als fünf stark chromatische Streifen zu sehen waren. Aber auch die Anwendung einer homogenen Lichtquelle vermehrte die Zahl der wahrnehmbaren Streifen nur auf acht; allerdings war die benutzte Na-Flamme wesentlich

1) Die äusseren Streifen sehr schwach, aber achromatisch.

2) Die äussersten Streifen schwach, aber achromatisch.

lichtschwächer als der Argandbrenner. Mit Hülfe der Achromatisirung war es möglich, wie die obigen Angaben zeigen, unter gewissen günstigen Verhältnissen 18 Minima wahrzunehmen, die Erscheinung also bis $n = 37$ zu verfolgen. Dass dies nicht immer, sondern nur in einigen Fällen zu erreichen war, das hängt mit dem Umstande zusammen, dass auch bei homogener Beleuchtung die Streifen am vollständigsten für mittlere Werthe von b zu sehen sind; für kleinere b verschwinden, den grösseren Werthen des Beugungswinkels entsprechend, die Streifen höherer Ordnung allmählich, und für grössere b wird die ganze Erscheinung verwaschen. Daher leistet die Achromatisirung dann am meisten, wenn der achromatisirte Streifen für mittlere Werthe von b auf die höheren Ordnungen fällt. Man könnte fragen, ob bei diesem Verfahren noch höhere Ordnungen nur deswegen unsichtbar blieben, weil der Intensitätsunterschied zwischen den hellen und dunklen Streifen für diese zu gering wird. Die Theorie ergiebt für diesen Intensitätsunterschied einen leicht zu berechnenden Werth. In der Bezeichnungsweise Kirchhoff's¹⁾ ist die Intensität für einen beliebigen Punkt hinter dem Schirme proportional dem Ausdruck.

$$J = M^2(u) + N^2(u);$$

M und N sind gewisse Functionen der Grösse u , und u wiederum ist durch die Gleichung bestimmt:

$$u = -x_0 \sqrt{\frac{\pi a}{\lambda b(a+b)}}.$$

Für die Maxima und Minima ausserhalb des geometrischen Schattens ist $M(u) = 0$, $u = -\sqrt{(n - \frac{1}{4})\pi}$; ferner ist für negative u $N(u)$ zu ersetzen durch den Ausdruck

$$N(u) = \sqrt{\pi} \cos\left(u^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(-u)$$

also für die Maxima und Minima durch

$$N(u) = (-1)^n \sqrt{\pi} - N\left(\sqrt{n - \frac{1}{4}}\pi\right).$$

Endlich kann für grössere Werthe von u $N(u)$ durch das

1) Kirchhoff, Vorlesungen über mathem. Optik. p. 127.

erste Glied einer nach negativen Potenzen von u fortschreitenden Reihe ersetzt werden:

$$N(u) = \frac{1}{2u} - \dots$$

Also ist allgemein für ein Maximum oder Minimum die Intensität proportional mit

$$J = \left((-1)^n \sqrt{\pi} - \frac{1}{2\sqrt{(n-\frac{1}{2})\pi}} \right)^2$$

Berechnet man nun die Intensitäten für die Maxima $n = 2p - 1$ und $n = 2p + 1$, und für das Minimum $n = 2p$ so ist der Ausdruck

$$\Delta J = (J_{2p-1} + J_{2p+1})/2 - J_{2p}$$

proportional mit $4/\sqrt{8p-1}$ bis auf Grössen, die zu vernachlässigen sind. Ohne beugenden Schirm würde an derselben Stelle die Intensität proportional mit $J_0 = \pi$ sein. Also ist der relative Intensitätsunterschied zwischen Maximum und Minimum für das p te Minimum gegeben durch den Ausdruck:

$$\Delta J/J_0 = 4/\pi \sqrt{8p-1} = 4/\pi \sqrt{4n-1}$$

Daraus berechnen sich folgende Werthe für das Minimum:

$p =$	5	10	15	20	25	30	35
$\Delta J/J_0 =$	0,20	0,14	0,12	0,10	0,09	0,08	0,076.

Nach Rayleigh¹⁾ ist bei Beobachtung von Interferenzstreifen die Unterschiedsschwelle 0,04—0,05, nach Dobrowolsky²⁾ ist sie für die mittleren Theile des Spectrums noch erheblich niedriger. Darnach hätten also die Interferenzen noch auf weit höhere Ordnungen sichtbar sein müssen, als es thatsächlich der Fall war. Man könnte einwenden, dass die theoretische Rechnung für die hohen Ordnungen nicht mehr zutrifft, weil die ganze Theorie auf der Voraussetzung sehr kleiner Beugungswinkel beruht. Allein die Beugungswinkel, die den höchsten wahrgenommenen Ordnungen entsprachen, waren keineswegs die grössten, die bei den Beobachtungen überhaupt vorkamen. Berechnet man die Beugungswinkel nach der Formel

$$\operatorname{tg} \varphi = x_0/b,$$

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 27. p. 484. 1889.

2) Dobrowolsky, Graefe's Archiv f. Ophthalm. 18. I. p. 74—92. 1892.

so ergibt sich z. B. in der Beobachtungsreihe 8 für das 18. Minimum bei $b = 40 \text{ mm}$ $\varphi = 1^\circ 19'$, dagegen in der 10. Beobachtungsreihe für das 8. Minimum bei $b = 5 \text{ mm}$ $\varphi = 2^\circ 26'$ (die Winkelöffnung der spectralen Lichtquelle betrug nur ca. $10' - 15'$). Es hätten also auch nach diesen Ueberlegungen in den Beobachtungsreihen 6—8 noch höhere Ordnungen sehr wohl sichtbar sein können. Dass sie es nicht waren, dürfte demnach wohl einer geringeren Empfindlichkeit meines Auges zuzuschreiben sein, eine Annahme, die insofern nicht unwahrscheinlich ist, als sich das Auge bei den Beobachtungen nicht in einem vollkommen dunklen Raume befand und ausserdem das Gesichtsfeld nicht gleichmässig erhellt, sondern auf der einen Seite von den stärkeren Interferenzstreifen niederer Ordnung durchzogen war.

II. Achromatisirung eines normalen, durch ein verzögerndes Blättchen verschobenen Streifensystemes.

Die Eigenthümlichkeit der im Vorstehenden besprochenen Erscheinung, die Achromatisirung nur in einer Richtung zuzulassen, rührt von der Unsymmetrie des zu achromatisirenden Streifensystemes her. Der gleichen Beschränkung unterliegt das in ganz ähnlicher Weise unsymmetrisch gestaltete System der Lloyd'schen Streifen, deren Achromatisirung Lord Rayleigh¹⁾ behandelt hat; auch bei diesem muss das Beleuchtungsspectrum so liegen, dass die Wellenlängen nach derselben Richtung hin wachsen, nach der die Ordnungszahl der Interferenzen zunimmt. Das Gleiche gilt, wenn man sich aus einem gewöhnlichen, symmetrischen Streifensysteme ein unsymmetrisches dadurch herstellt, dass man die eine Hälfte des Systems oder mehr als die Hälfte verdeckt. Denselben Zweck kann man auch dadurch erreichen, dass man einem normalen, symmetrischen Streifensystem durch Einschaltung eines verzögernden Blättchens in das eine der interferirenden Strahlenbündel eine Verschiebung zu Theil werden lässt. Ist die Sichtbarkeit des Interferenzsystems auf einen engen Bereich beschränkt, wie es bei den Streifen der Fresnel'schen Spiegel, bei den Beugungsstreifen im Schatten eines streifenförmigen Schirmes u. a. der Fall ist, so treten durch die Verschiebung

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 28. p. 79—91. 1889.

Interferenzen höherer Ordnung in das Gesichtsfeld, die im weissen Lichte nicht mehr sichtbar sind. Man kann sie wieder sichtbar machen durch Achromatisirung, indem man die weisse Lichtquelle durch ein Spectrum von passender Länge und Orientirung ersetzt. Für die genauere Betrachtung ist der Fall insofern etwas complicirter, als die Verschiebung der Streifen durch das Blättchen in Folge der Dispersion des letzteren nicht für alle Farben die gleiche ist. Die Formeln mögen für den Fall der Interferenzstreifen, die im Schatten eines streifenförmigen Beugungsschirmes auftreten, entwickelt werden; dieser Fall gestattet die experimentelle Prüfung in sehr einfacher Weise.

Die Ebene des Schirmes bilde wieder die XY -Ebene. Seine Ränder seien der Y -Axe parallel und in den Abständen $+e/2$ und $-e/2$ zu beiden Seiten der Y -Axe gelegen. Die Lichtquelle werde zunächst in der Z -Axe liegend gedacht, in der Entfernung a vom Schirme auf dessen einer Seite. Die Streifen werden beobachtet in der Ebene $z = b$ auf der anderen Seite des Schirmes. Die Abstände der Minima von der Z -Axe sind dann in dieser Ebene bestimmt durch die Gleichung:

$$x = \frac{2p-1}{2} \frac{b \cdot \lambda}{e}.$$

Liegt die Lichtquelle nicht genau in der Z -Axe, sondern in einem gegen a kleinen Abstände x_1 von ihr, so ist, entsprechend den oben bereits angestellten Ueberlegungen:

$$x_0 = \frac{2p-1}{2} \frac{b \cdot \lambda}{e} - \frac{b}{a} x_1.$$

Ist die Lichtquelle ein Spectrum, so ist x_1 eine Function der Wellenlänge. Endlich sei die negative Seite der XY -Ebene bedeckt mit einem durchsichtigen, planparallelen Plättchen von der Dicke D und dem Brechungsexponenten N . Dadurch wird den Strahlen, die die negative Seite der xy -Ebene durchsetzen, eine Schwächung und eine Verzögerung ertheilt gegenüber den Strahlen, die an der positiven Seite des beugenden Schirmes vorübergehen. Von der Schwächung des Lichtes soll im Folgenden abgesehen werden; die Verzögerung entspricht einer scheinbaren Verschiebung der Strahlen gegeneinander um die Strecke $(N-1)D$, und bewirkt demgemäss eine Verschiebung der

Minima in der Ebene $z = b$ nach der negativen Seite um die Strecke $(N-1)D \cdot \frac{b}{e}$. Die Formel für den Abstand der Minima von der Z -Axe lautet nun also:

$$x_0 = \frac{2p-1}{2} \frac{b\lambda}{e} - (N-1) \frac{bD}{e} - \frac{b}{a} x_1.$$

Die Bedingung der Achromasie ist wieder $dx_0/d\lambda = 0$, also:

$$\frac{2p-1}{2} \frac{b}{e} - \frac{bD}{e} \frac{dN}{d\lambda} - \frac{b}{a} \frac{dx_1}{d\lambda} = 0.$$

Aus dieser Gleichung fällt b als gemeinschaftlicher Factor heraus. Die Ordnungszahl des achromatischen Streifens ist also unabhängig von b . Für einen gegebenen Beugungsschirm, ein gegebenes Spectrum und eine gegebene Platte hängt die Ordnungszahl des achromatischen Streifens nur von der Wellenlänge und dem Abstände a des Schirmes vom Spectrum ab, ist aber für bestimmte Werthe von a und λ in dem ganzen Raume hinter dem Beugungsschirm, für jede Entfernung der Beobachtungsebene von dem Schirme die gleiche. Die obige Gleichung entspricht aber im allgemeinen keiner physikalischen Realität; denn die Streifen entstehen überhaupt nur im Schatten des beugenden Schirmes. Sollen die Streifen durch die achromatisirende Wirkung des Spectrums sichtbar gemacht werden, so ist es erforderlich, dass die Ordnungszahl des achromatischen Streifens mit der Ordnungszahl desjenigen Streifens übereinstimmt — oder wenigstens ihr sehr nahe liegt — der mitten in den geometrischen Schatten hineinfällt. Für eine bestimmte Farbe, d. h. einen bestimmten Werth von x_1 , hat die Mitte des geometrischen Schattens in der Ebene $z = b$ die Abscisse $x_0 = -b/a \cdot x_1$. Dies in die vorletzte Gleichung eingesetzt, ergiebt für die Ordnungszahl des in die Schattenmitte fallenden Streifens den Werth:

$$\frac{2p-1}{2} = \frac{(N-1)D}{\lambda}.$$

Diese Ordnungszahl ist ausschliesslich durch die Gangdifferenz des verzögernden Blättchens bestimmt, wie es natürlich ist, da ohne das Blättchen an derselben Stelle die Gangdifferenz gleich Null sein würde. Setzt man endlich diesen

Werth in die Gleichung der Achromasie ein, so erhält man diejenige Bedingung, von der die Sichtbarkeit der achromatischen Streifen in dem behandelten Falle endgültig abhängt. Sie lautet nach zweckmässiger Umgestaltung:

$$-D\lambda \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{N-1}{\lambda} \right) = \frac{e}{a} \cdot \frac{dx_1}{d\lambda}.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst, dass die beiden Differentialquotienten entgegengesetzte Vorzeichen haben müssen. Da $(N-1)/\lambda$ mit abnehmender Wellenlänge wächst, muss x_1 mit abnehmender Wellenlänge abnehmen. Das blaue Ende des Spectrums muss also nach der negativen Seite, das rothe nach der positiven Seite der Abscissenaxe sich erstrecken, damit die achromatisirende Wirkung bei der angenommenen Lage des Plättchens eintritt; mit anderen Worten, das Plättchen muss auf der Seite der kürzeren Wellenlängen liegen. Unter dieser Bedingung treten die Streifen bei gegebenen Werthen des Plättchens, des Spectrums und der Schirmbreite e für jede Wellenlänge bei einem bestimmten Abstände a des Schirmes vom Spectrum auf und sind bei diesem Abstände in jeder beliebigen Entfernung hinter dem Schirme sichtbar. Sie bleiben auch sichtbar, wenn man die Entfernung a des Spectrums und zugleich seine Breite so ändert, dass der vom Schirme aus gesehene Winkelabstand der einzelnen Farben, also der Ausdruck $d\alpha/d\lambda$, wenn $\alpha = x_1/a$ gesetzt wird, constant bleibt. Schreibt man die Gleichung in der Form:

$$-D \cdot \lambda \cdot \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{N-1}{\lambda} \right) = e \frac{d\alpha}{d\lambda},$$

so ist sie vollkommen identisch mit derjenigen Gleichung, die Kirchhoff in seiner Optik, p. 115, als Bedingung für die beste Sichtbarkeit der sogenannten Talbot'schen Linien aufstellt. Dort wird die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung zweier Oeffnungen behandelt, wenn die eine Oeffnung mit einem Plättchen bedeckt ist und als Lichtquelle ein Spectrum benutzt wird. In der That ist die im Obigen behandelte Erscheinung nichts anderes, als dieselbe Modification an einer Fresnel'schen Beugungserscheinung, die man an einer Fraunhofer'schen zur Erzeugung der Talbot'schen Linien anbringt. Nur

ist zu beachten, dass in der Kirchhoff'schen Formel e nicht die Breite des Steges zwischen den beiden Oeffnungen, sondern den Abstand entsprechender Punkte der beiden Oeffnungen bedeutet. Das steht aber mit der Bedeutung von e in unserem Falle insofern durchaus in Uebereinstimmung, als die Beugungserscheinung im Schatten eines streifenförmigen Schirmes bekanntlich so beschaffen ist, als ob das interferirende Licht ausschliesslich von den Rändern des Schirmes ausginge. Man kann also sagen, dass die behandelte Erscheinung „reelle Talbot'sche Linien“ darstellt, im Gegensatz zu der virtuellen Form, in der man sie sonst zu beobachten pflegt.

Einige Versuche in sehr einfacher Ausführung bestätigten die entwickelte Theorie. Das Beleuchtungsspectrum wurde dieses Mal mit Hülfe eines Spectralapparates hergestellt, aus dessen Beobachtungsfernrohr, nach sorgfältiger Einstellung aller Theile, Ocular und Collectivlinse entfernt wurden. Der leere, ausziehbare Tubus wurde so eingestellt, dass in der Ebene seiner freien Oeffnung die Spectrallinien deutlich und vollkommen scharf erschienen, was an einer auf den Rand des Tubus aufgelegten matten Glasscheibe controllirt werden konnte. Die Entfernung der Ebene dieses Randes von dem beugenden Schirm, der in der Verlängerung der Axe des Beobachtungsfernrohres aufgestellt war, ergab die Grösse a . Der Beugungsschirm bestand aus einem Streifen Christbaumlametta; ein breiterer Streifen wurde dadurch hergestellt, dass zwei Lamettastreifen mit sich überdeckenden Rändern neben einander gelegt wurden. Der beugende Streifen theilte eine rechteckige Oeffnung in zwei gleiche etwa 1 cm^2 grosse Theile. Diese Oeffnung befand sich in der Mitte eines grösseren verticalen Blechschirmes, der in einer passenden Fassung so befestigt war, dass er in seiner eigenen Ebene um seine Mitte gedreht werden konnte. Dadurch war es möglich, die Ränder des beugenden Schirmes der Richtung der Linien des Spectrums genau parallel zu stellen. Ueber die eine Hälfte der rechteckigen Oeffnung wurde schliesslich ein Deckgläschen geklebt, sodass sein Rand von dem beugenden Schirme verdeckt war. Natürlich genügte nicht ein beliebiges Deckgläschen, sondern es musste sorgfältig ausgesucht und so justirt werden, dass seine Dicke in der unmittelbaren Nähe des beugenden

Randes möglichst wenig variirte. Mit Hülfe der Interferenzcurven im reflectirten Na-Lichte war die Ausführung dieser Bedingung möglich. Um die Entfernung zwischen dem beugenden Schirm und dem Beleuchtungs-Spectrum leicht und sicher ändern zu können, stand die Vorrichtung, die den beugenden Schirm trug, auf einem auf zwei Schienen verschiebbaren Schlitten; ein zweiter auf denselben Schienen laufender Schlitten trug die zur Beobachtung der Streifen dienende Lupe. Als solche wurde meist ein grosses Brennglas mit schwacher Vergrösserung und weitem Gesichtsfelde verwendet. Der Spalt des Spectralapparates wurde mit einem gewöhnlichen Argandbrenner beleuchtet. Die Breite des Spectrums in der Brennebene des Beobachtungsrohres des Spectralapparates betrug von der *C*- bis zur *F*-Linie 7,6 mm. Wurde das volle Spectrum zur Beleuchtung verwendet, so war die Erscheinung ziemlich matt. Wenn man den Beugungsapparat aus grösserer Entfernung dem Spectrum näherte, so trat in dem von einem verwaschenen Farbenschimmer erfüllten Gesichtsfelde eine Gruppe schwacher grauer Streifen hervor. Dass dies die erwartete Erscheinung war, ging vor allem daraus hervor, dass die Streifen nur auftraten, wenn das Deckgläschen auf der violetten Seite des Gesichtsfeldes lag. Die Streifen wurden zwar weniger zahlreich, aber schwarz und scharf — fast so scharf, wie sie ohne Deckgläschen bei weissem Spalt erschienen — wenn man das Spectrum bis auf einen schmalen, 1—2 mm breiten Theil verdeckte. Dabei bewahren die Streifen die Eigenthümlichkeit, nur für die eine charakteristische Lage des Deckgläschens sichtbar zu sein, woraus hervorgeht, dass sie nicht etwa deswegen sichtbar werden, weil die Lichtquelle in diesem Falle schon hinreichend homogen ist. Ausserdem treten bei dieser Art der Beleuchtung die Streifen nur in einem bestimmten, ziemlich eng begrenzten Abstände des Schirmes vom Spectrum auf, und dieser Abstand variirt mit der Wellenlänge des benutzten Theiles des Spectrums. Diese Beobachtungen sind daher sehr geeignet, um die oben aufgestellte Formel zu prüfen. Er wurden zwei Beobachtungsreihen mit demselben Spectrum und demselben Deckgläschen, aber mit Beugungsschirmen von verschiedener Breite angestellt. In jeder Beobachtungsreihe wurde der Werth von a für 3 verschiedene Farben als Mittel aus einer Anzahl

unabhängiger Einstellungen bestimmt. Die Abbildung des Spectrums geschah so, dass eine der Linien *C*, *D*, *M* oder *F* gerade die Mitte des schmalen, sichtbar gebliebenen Theiles des Spectrums einnahm, und durch die Wellenlänge dieser Linien waren dann die benutzten Farben charakterisirt. Um die Abhängigkeit der Entfernung *a* von der Wellenlänge auszudrücken, müssen die Dispersionsverhältnisse in der Formel berücksichtigt werden. Es sei wie oben

$$x_1 = A - \frac{B}{\lambda^2} \quad \frac{dx_1}{d\lambda} = + \frac{2B}{\lambda^3}.$$

Vernachlässigt man die Dispersion im Deckgläschen, so ist

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{N-1}{\lambda} \right) = - \frac{N-1}{\lambda^2},$$

und die Formel lässt sich schreiben:

$$\frac{a\lambda^2}{e} = \frac{2B}{D(n-1)}.$$

Wollte man dagegen auch die Dispersion im Deckgläschen berücksichtigen, etwa indem man $N = \alpha + \beta/\lambda^2$ setzt, so wäre:

$$\frac{a\lambda^2}{e} = \frac{2B}{D\left(\alpha - 1 + \frac{3\beta}{\lambda^2}\right)}$$

Im ersten Falle wäre der Ausdruck $a\lambda^2/e$ als constant anzusehen, im zweiten Falle würde er mit abnehmender Wellenlänge kleiner werden.

Spectral- linie	λ	1. Beobachtungsreihe		2. Beobachtungsreihe	
		$e = 0,73 \text{ mm}$		$e = 1,16 \text{ mm}$	
		a	$a\lambda^2/e$	a	$a\lambda^2/e$
<i>C</i>	0,000 656	133 mm	$7,8 \times 10^{-5}$	253 mm	$9,4 \times 10^{-5}$
<i>D</i>	0,000 589	167	$7,9 \times 10^{-5}$	289	$8,6 \times 10^{-5}$
<i>M</i>	0,000 535	221	$8,7 \times 10^{-5}$	—	—
<i>F</i>	0 000 486	—	—	453	$9,2 \times 10^{-5}$

Der Ausdruck $a\lambda^2/e$ ergab sich also in der That als annähernd constant; die Beobachtungen waren nicht genau genug, um die Abnahme in Folge der Dispersion des Deckgläschens hervortreten zu lassen. Die Dicke des Deckgläschens betrug

0,16 mm; nimmt man seinen Brechungsexponenten zu 1,53 an, und berechnet man B aus der angegebenen Breite des Spectrums, so ergibt sich für den Ausdruck $2B/D(N-1)$ der Werth $9,4 \times 10^{-5}$, also ein Werth, der ziemlich gut mit den Werthen von $a\lambda^2/e$ übereinstimmt.

Bei diesen Beobachtungen wurde die Wahrnehmung gemacht, dass die Streifen auch dann noch sichtbar blieben, wenn man den Beugungsschirm entfernte, das Glasplättchen aber an seiner Stelle liess. Das erschien zunächst insofern auffallend, als in der Formel, die die Bedingung für das Zustandekommen dieser Interferenzen ausdrückt, doch die Breite e des Beugungsschirmes vorkommt. Die genauere Untersuchung dieser durch das Glasplättchen allein hervorgerufenen achromatischen Interferenzen ergab aber, dass mit der Entfernung des Beugungsschirmes auch die Beschränkung der Sichtbarkeit der Streifen auf einen beschränkten, engen Bereich der Entfernung a des beugenden Systems vom Spectrum fortgefallen war. Die Streifen blieben nunmehr auch sichtbar, wenn man den Blechschirm mit dem Glasplättchen weiter vom Spectrum entfernte, oder ihn dem Spectrum sogar bis auf sehr kleine Entfernungen näherte. Dabei wuchs die Streifenbreite mit der Annäherung an das Spectrum. Offenbar entstehen diese Streifen durch die Achromatisirung derjenigen Beugungserscheinung, die von der Beugung am Rande der dünnen Glasplatte herührt, und die zu der Kategorie der zuerst von Hrn. Quincke¹⁾ beobachteten lamellaren Beugungserscheinungen gehört. Wenn man die mit dem streifenförmigen Schirm erhaltenen Interferenzen als Fresnel'sches Analogon zu der von Kirchhoff unter dem Namen der Talbot'schen Streifen behandelten Fraunhofer'schen Beugungserscheinung betrachten konnte, so entsprechen die durch das Glasplättchen allein hervorgebrachten Interferenzen demjenigen Versuche, bei dem die Talbot'schen Streifen durch einfaches Verschieben eines Deckgläschens vor die eine Hälfte der Pupille erzeugt werden. Die Theorie dieses eigenthümlichen Falles einer Fraunhofer'schen Beugungserscheinung ist von Airy²⁾ entwickelt und von

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **132**. p. 321—371. 1867.

2) Airy, Pogg. Ann. **58**. p. 535—549. 1843.

Esselbach¹⁾ ergänzt worden. Die Theorie der in unmittelbarer Beziehung dazu stehenden Fresnel'schen Beugungserscheinungen am Rande einer durchsichtigen Lamelle ist ebenfalls von Airy in der ersten seiner den Gegenstand behandelnden Arbeiten²⁾ und später von Jochmann³⁾ gegeben worden. Um die Achromatisirung dieser letzteren Classe von Beugungserscheinungen handelt es sich also in dem vorliegenden Falle. Die Betrachtungen gestalten sich dabei schwieriger als in den beiden vorher behandelten Fällen, weil die Grunderscheinung, die lamellaren Beugungstreifen im homogenen Lichte, schon wesentlich complicirter ist, als die Erscheinung am Rande eines undurchsichtigen Schirmes. Es dürfte sich in Anbetracht dessen empfehlen, zunächst die Theorie der Grunderscheinung selbst und ihre Consequenzen ausführlicher, als es von Airy und Jochmann geschehen ist, zu entwickeln, um an die erhaltenen Resultate das Weitere anknüpfen zu können. Ich will dabei die Rechnung im unmittelbaren Anschluss an die Darstellung durchführen, deren sich Kirchhoff⁴⁾ in seinen Vorlesungen über mathematische Optik bei der Behandlung der Fresnel'schen Beugungserscheinungen bedient hat.

III. Theorie der lamellaren Beugungserscheinungen.

Die Verhältnisse seien genau die gleichen wie unter I; nur denke man sich den undurchsichtigen Schirm, der die negative Seite der XY -Ebene bedecken sollte, ersetzt durch eine durchsichtige Lamelle von der constanten Dicke D und dem Brechungsexponenten N . Die punktförmige Lichtquelle, die homogenes Licht von der Wellenlänge λ aussendet, liege in der negativen Z -Achse im Abstände a vom Anfangspunkt der Coordinaten, der im Rande der Lamelle angenommen wird. Ist die Lamelle in Richtung der Y -Axe unendlich ausgedehnt, so genügt es, die Lichtvertheilung für Punkte der XZ -Ebene zu berechnen. In dieser Ebene habe der Beobachtungspunkt die Coordinaten

1) Esselbach, Pogg. Ann. **98**. p. 527—541. 1856. Vgl. auch Dvořák, Wien. Sitzungsber. (2) **67**. p. 89—100. 1873.

2) Airy, Pogg. Ann. **53**. p. 459—479. 572—589. 1841.

3) Jochmann, Pogg. Ann. **136**. p. 561—572. 1869.

4) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik. p. 116—128.

x_0 und $z = b$, während x die Coordinate eines Punktes in der XY -Ebene selbst bedeute. Es mögen mit Kirchhoff folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$(1) \quad \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} D(N-1)$$

und

$$(2) \quad \xi = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \frac{a+b}{ab}} \left(x - x_0 \frac{a}{a+b} \right).$$

Der Werth von ξ für $x = 0$ werde mit u bezeichnet. Also

$$(3) \quad u = -x_0 \sqrt{\frac{\pi a}{\lambda b(a+b)}}.$$

Die Lichtintensität im Beobachtungspunkte ist dann proportional der Summe der Quadrate zweier, über die ganze X -Axe auszudehnender Integrale. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Lichtstrahlen, welche nach dem Huygens'schen Princip vom negativen Theil der XY -Ebene ($\xi = -\infty$ bis $\xi = u$) ausgehend zu denken sind, eine Phasenverzögerung von Δ besitzen gegen diejenigen Strahlen, welche von der positiven Seite ($\xi = u$ bis $\xi = +\infty$) ausgehen. Demgemäss nimmt der von Kirchhoff entwickelte Intensitätsausdruck in unserem Falle die Form an:

$$J = \left(\int_{-\infty}^u d\xi \cos(\xi^2 + \Delta) + \int_u^{+\infty} d\xi \cos \xi^2 \right)^2 \\ + \left(\int_{-\infty}^u d\xi \sin(\xi^2 + \Delta) + \int_u^{+\infty} d\xi \sin \xi^2 \right)^2.$$

Durch Zerlegung der Kreisfunctionen, Ausquadriren und Berücksichtigung der Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^u d\xi \cos \xi^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_u^{\infty} d\xi \cos \xi^2$$

und

$$\int_{-\infty}^u d\xi \sin \xi^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_u^{\infty} d\xi \sin \xi^2$$

lässt sich der Ausdruck in den folgenden überführen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= \pi + 4 \sqrt{\pi} \sin \frac{\Delta}{2} \int_u^{\infty} d\xi \sin \left(\xi^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &\quad + 4 \sin^2 \frac{\Delta}{2} \left[\left(\int_u^{\infty} d\xi \sin \xi^2 \right)^2 + \left(\int_u^{\infty} d\xi \cos \xi^2 \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Bildet man hieraus, um die Lage der Maxima und Minima zu finden, die Gleichung

$$\frac{dJ}{du} = 0,$$

so erhält man:

$$-4 \sin \frac{\Delta}{2} \left[\sqrt{\pi} \cdot \sin \left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \frac{\Delta}{2} \int_u^{\infty} d\xi \cos (\xi^2 - u^2) \right] = 0.$$

Diese Gleichung ist für alle x_0 erfüllt, wenn $\sin \Delta/2 = 0$, also $\Delta = 2k\pi$ ist; in diesem Falle treten Maxima und Minima überhaupt nicht auf; J ist überall $= \pi$, d. h. es hat überall den Werth, den es ohne die beugende Lamelle an der gleichen Stelle haben würde.

Ist $\Delta \geq 2k\pi$, also $\sin \Delta/2$ von 0 verschieden, so sind diejenigen Werthe von u , für die J ein Maximum oder Minimum wird, die Wurzeln der Gleichung:

$$(5) \quad \sin \left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sin \frac{\Delta}{2} \int_u^{\infty} d\xi \cos (\xi^2 - u^2).$$

Kirchhoff bezeichnet das hier vorkommende Integral mit $M(u)$, ein anderes, später noch zu benutzendes

$$\int_u^{\infty} d\xi \sin (\xi^2 - u^2)$$

mit $N(u)$ und giebt für diese beiden Functionen je zwei Reihenentwicklungen, die eine nach steigenden, die andere nach fallenden Potenzen des Argumentes, an. Die Benutzung dieser Reihen ermöglicht es, für die Wurzeln der obigen Gleichung Näherungswerthe anzugeben einerseits für den Fall sehr kleiner, andererseits für den sehr grosser Werthe dieser Wurzeln.

a) Dass wenigstens für gewisse Bereiche der Phasenverzögerung Δ die eine der Wurzeln der obigen Gleichung sehr

klein ist, folgt unmittelbar daraus, dass die Gleichung für $u = 0$ erfüllt ist, wenn $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ ist. Der Werth $u = 0$ entspricht dem Werthe $x_0 = 0$, d. h. der Grenze des geometrischen Schattens der Lamelle. Für $u = 0$ geht der Intensitätsausdruck über in

$$J = \pi \cdot \cos^2 \frac{\Delta}{2}.$$

Ist $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$, so ist $J = 0$. Für diesen Werth der Phasenverzögerung liegt also ein Minimum, und zwar ein vollkommen dunkles Minimum, in der Schattengrenze selbst. Um für benachbarte Werthe von Δ die Beziehung zwischen u und Δ zu finden, kann man die eine der erwähnten Reihenentwicklungen benutzen. Es ist

$$M(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos u^2 + \sin u^2) - \int_0^u d\xi \cos(u^2 - \xi^2)$$

und das letzte Integral ist durch eine Reihe darstellbar:

$$\int_0^u d\xi \cos(u^2 - \xi^2) = u - \frac{4}{1.3.5} u^5 + \dots$$

die sich für kleine Werthe von u auf das erste Glied reducirt. Also ist für kleine Werthe von u

$$M(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{2}\right) - u$$

und die Gleichung (5) geht in die folgende über:

$$\sin\left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\Delta}{2} \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\Delta}{2} u.$$

oder

$$(6) \quad \sin\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} \cdot u.$$

Berücksichtigt man, dass für kleine u u^2 gegen $\pi/4$ vernachlässigt werden kann, so erhält man:

$$(7a) \quad u = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\Delta}{2}$$

und demnach:

$$(7b) \quad x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{2a}} \operatorname{ctg} \frac{\Delta}{2}.$$

Setzt man

$$\frac{\Delta}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon \pi,$$

so ist

$$x_0 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda b (a + b)}{2a}} \operatorname{tg} \varepsilon \pi.$$

Von der Schattengrenze aus, in der das centrale Minimum für $\Delta = (2k + 1)\pi$ liegt, rückt das Minimum mit wachsendem Δ nach der negativen Seite der X -Axe, d. h. nach dem Innern der Lamelle zu, mit abnehmendem Δ nach der positiven Seite, d. h. nach Aussen. Liegt das Minimum nicht mehr in der Schattengrenze selbst, so ist auch seine Intensität nicht mehr gleich Null. Führt man dieselben Vernachlässigungen, wie oben, in die Gleichung (4) ein, so nimmt der Intensitätsausdruck für kleine Werthe von u die Form an:

$$J = \pi \cos^2 \frac{\Delta}{2} - 4 \sqrt{\pi} \sin \frac{\Delta}{2} \cos \frac{\Delta}{2} \sin \left(u^2 - \frac{\pi}{2} \right) u + 4 \sin^2 \frac{\Delta}{2} \cdot u^2.$$

Dieser Ausdruck geht für das centrale Minimum durch Berücksichtigung der Gleichung (6), über in:

$$J = \pi \cos^2 \frac{\Delta}{2} - 4 \sin^2 \frac{\Delta}{2} u^2$$

und schliesslich durch Berücksichtigung von Gleichung (7a) in

$$(8) \quad J = \frac{1}{2} \pi \cos^2 \frac{\Delta}{2}.$$

Diese Gleichung giebt an, wie sich im centralen Minimum die Intensität mit der Phasenverzögerung verändert, so lange es in unmittelbarer Nachbarschaft der Schattengrenze liegt. Man sieht, dass diese Aenderungen halb so gross sind, wie die gleichzeitigen Aenderungen der Intensität in der Schattengrenze selbst.

b) Für grosse Werthe von u ist zu unterscheiden zwischen den positiven und den negativen Werthen.

Für grosse positive Werthe von u kann $M(u) = 0$ gesetzt werden. Die Maxima und Minima sind dann bestimmt durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\sin \left(u^2 - \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

also

$$(9a) \quad u = + \sqrt{\left(q + \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{\Delta}{2}}$$

$$(9b) \quad x_0 = -\sqrt{\left(q + \frac{1}{4}\right) \pi + \frac{A}{2} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{\pi a}}},$$

wenn q eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Um die Intensität an den durch diese Gleichung bestimmten Stellen zu finden, kann man zunächst den Ausdruck (4). durch Einführung der Functionen $M(u)$ und $N(u)$ auf die folgende Form bringen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= \pi + 4 \sqrt{\pi} \sin \frac{A}{2} \left[\sin \left(u^2 - \frac{A}{2} - \frac{\pi}{4} \right) M(u) + \cos \left(u^2 - \frac{A}{2} - \frac{\pi}{4} \right) N(u) \right] \\ &+ 4 \sin^2 \frac{A}{2} \left[M(u)^2 + N(u)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Vernachlässigt man für grössere Werthe von u die Quadrate der Functionen $M(u)$ und $N(u)$, so erhält man für die Maxima und Minima den Werth der Intensität:

$$J = \pi + (-1)^q 4 \sqrt{\pi} \cdot \sin \frac{A}{2} N(u).$$

Die Differenzen der Intensität sind am grössten, wenn

$$\frac{A}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

ist. In diesem Falle ist

$$x_0 = -\sqrt{\left(q + k + 1\right) \pi - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}}}.$$

Der kleinste absolute Werth, den x_0 haben kann ist offenbar gegeben durch $q = -k$. Rechnet man die Ordnungszahlen der Maxima und Minima von diesem Werthe an, setzt also

$$n = q + k + 1,$$

so ist

$$(11) \quad x_0 = -\sqrt{n - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}}} \text{ und } J = \pi - (-1)^n 4 \sqrt{\pi} N(u).$$

Den ungeraden Werthen von n entsprechen die Maxima, den geraden die Minima. Setzt man, wie oben

$$\frac{A}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon \pi$$

wo ε zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ liegt, so ist

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \\ x_0 = -\sqrt{n - \frac{1}{4} + \varepsilon} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}} \\ J = \pi - (-1)^n 4 \sqrt{\pi} N(u) \cdot \cos \varepsilon \pi. \end{array} \right.$$

Für negative Werthe von u ist zu berücksichtigen, dass in diesem Falle:

$$M(u) = \sqrt{\pi} \cdot \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) - M(-u)$$

$$N(u) = -\sqrt{\pi} \cdot \sin\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) - N(-u)$$

zu setzen ist. Dann geht Gleichung (5) über in

$$\sin\left(u^2 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\Delta}{2} M(-u).$$

Für grosse negative Werthe von u sind daher die Maxima und Minima bestimmt durch die Wurzeln der Gleichung:

$$\sin\left(u^2 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

also

$$(13a) \quad u = -\sqrt{\left(q + \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{\Delta}{2}}.$$

$$(13b) \quad x_0 = +\sqrt{\left(q + \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{\Delta}{2}} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{\pi \cdot a}}.$$

Der Intensitätsausdruck Gleichung (10) geht über in:

$$J = \pi - 4 \sqrt{\pi} \sin \frac{\Delta}{2} \left[\sin\left(u^2 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) M(-u) \right. \\ \left. + \cos\left(u^2 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) N(-u) \right] + 4 \sin^2 \frac{\Delta}{2} \left[M(-u)^2 + N(-u)^2 \right]$$

und nimmt daher für grosse negative Werthe von u die Form an:

$$J = \pi - (-1)^q 4 \sqrt{\pi} \cdot \sin \frac{\Delta}{2} N(-u).$$

Für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ wird:

$$x_0 = +\sqrt{q - k - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}}$$

Der kleinste Werth, den x_0 haben kann, ist dieses Mal gegeben durch $q = k + 1$, und rechnet man die Ordnungszahlen der Maxima und Minima wieder von diesem Werthe an, indem man $n = q - k$ setzt, so ist

$$(14) \quad x_0 = + \sqrt{n - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{a}} \text{ u. } J = \pi - (-1)^n 4 \sqrt{\pi} N(-u),$$

wobei den ungeraden Werthen von n wieder die Maxima, den geraden die Minima entsprechen, und für:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon \pi \\ \text{und} \\ x_0 = + \sqrt{n - \frac{1}{4} - \varepsilon} \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{a}} \\ J = \pi - (-1)^n 4 \sqrt{\pi} N(-u) \cos \varepsilon \pi. \end{array} \right.$$

Zum Vergleiche möge daran erinnert werden, dass die Streifen, die am Rande eines undurchsichtigen Schirmes ausserhalb der Schattengrenze auftreten, ihrer Lage und Intensität nach gegeben sind durch die Gleichungen:

$$x_0 = \sqrt{n - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b (a+b)}{a}} \text{ und } J = \pi - (-1)^n 2 \sqrt{\pi} N(-u).$$

Aus den Gleichungen (11) und (14) folgt also, dass für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ die bei einer durchsichtigen Lamelle zu beiden Seiten der Schattengrenze auftretenden Streifensysteme genau die gleiche Lage haben, als wäre jedes von ihnen durch eine Beugung an einem undurchsichtigen Schirm entstanden, dass aber die Intensitätsdifferenzen der Maxima und Minima in der lamellaren Beugungserscheinung doppelt so gross sind, wie in dem gewöhnlichen Fresnel'schen Streifensysteme. Ausserdem liegt zwischen den beiden Streifensystemen in der Schattengrenze selbst noch das centrale Minimum von der Intensität 0.

Es muss allerdings bemerkt werden, dass für die niederen Ordnungen die Werthe $u = \sqrt{(n - \frac{1}{4})} \pi$ nicht genau den wirklichen Wurzelwerthen der Gleichung (5) für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ entsprechen. Für das gewöhnliche Fresnel'sche Streifensystem sind die Abweichungen aber selbst für $n = 1$ ziemlich gering. Für die lamellaren Beugungsstreifen sind sie etwas grösser, immerhin aber auch hier noch so klein, wie eine Rechnung auf Grund der Zahlenwerthe der Fresnel'schen Integrale ergiebt, dass im Folgenden der Ausdruck $u = \sqrt{(n - \frac{1}{4})} \pi$ als allgemeiner Ausdruck für die Wurzelwerthe der Gleichung (5) in dem Falle $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ angesehen werden soll.

Die Gleichungen (12) und (15) lehren, dass mit wachsen der Phasendifferenz beide Streifensysteme, ebenso wie das centrale Minimum in der Richtung der negativen X -Axe, d. h. nach der Seite der Lamelle hin sich verschieben, und dass dabei zugleich die Intensitätsunterschiede der Maxima und Minima abnehmen. Die Streifen verschwinden vollständig für $\epsilon = \frac{1}{2}$, um bei weiterem Wachsen von Δ von neuem wieder aufzutreten. Dabei beträgt die Verschiebung der Streifen für eine Phasenänderung von 2π gewissermaassen die Hälfte des Streifenabstandes, indem beim Durchgang durch diejenigen Werthe der Phasendifferenz, bei denen die Streifen verschwinden, sich die Maxima in Minima und die Minima in Maxima verwandeln.

Ist die Lamelle nicht gleichförmig dick, sondern wie bei den Versuchen des Hrn. Quincke, keilförmig, und die Kante des Keils senkrecht zum beugenden Rande, so treten infolge der Abhängigkeit der Streifenlage von der Phasenverzögerung Δ bei Beleuchtung mit einer homogenen punktförmigen Lichtquelle die von Hrn. Quincke beschriebenen, eigenthümlich gewundenen, periodisch sich wiederholenden Streifensysteme auf. Setzt man

$$\frac{\Delta}{2} = A + By$$

und legt den Anfangspunkt so, dass für $y=0$ $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ ist, so ist das centrale Minimum in unmittelbarer Nähe der Y -Axe nach (7b) eine Curve von der Form

$$x = C \operatorname{tg}(By)$$

und die seitlichen Streifen sind nach (12) und (15) Curven von der Form:

$$x^2 = \left(n - \frac{1}{4}\right) C' \pm Dy.$$

Eine Zeichnung dieser Curven auf Grund der genauen Werthe der Integrale ist von Jochmann gegeben worden.¹⁾

Wenn man bei einer stark keilförmigen Lamelle statt der punktförmigen Lichtquelle einen homogenen, dem beugenden Rande parallelen Lichtspalt anwendet, so lagern sich an jeder Stelle des Gesichtsfeldes die den verschiedenen Punkten dieses

1) Jochmann, Pogg. Ann. 136, Taf. VIII. Fig. 6.

Spaltes und entsprechend verschiedenen Punkten des beugenden Randes zugehörigen Streifensysteme übereinander. Erstreckt sich diese Uebereinanderlagerung auf alle möglichen Werthe der Phasenverzögerung von Δ_1 bis Δ_2 , so ist die resultirende Intensitätsvertheilung bestimmt durch den Ausdruck:

$$[J] = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} J d\Delta.$$

Bei hinreichend grossem Intervall kann man das Integral zerlegen in eine Summe gleicher Integrale von der Form

$$\int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + 2\pi} J d\Delta$$

und einen zu vernachlässigenden Rest; dann ist die relative Intensitätsvertheilung im wesentlichen gegeben durch den Ausdruck:

$$[J] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + 2\pi} J d\Delta.$$

Rechnet man das Integral aus, unter Zugrundelegung des Ausdruckes (4), so erhält man:

$$[J] = \pi - \sqrt{2} \pi \left[\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 + \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \right] \\ + 2 \left[\left(\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 \right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \right)^2 \right].$$

Die Uebereinanderlagerung führt also zu keinem vollständigen Verwischen der Erscheinung, sondern es bleiben Maxima und Minima bestehen. Für ihre Lage erhält man aus der Gleichung

$$\frac{d[J]}{du} = 0$$

die Werthe

$$u = 0 \text{ und } u = \pm \sqrt{\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi};$$

sie haben also, wie unmittelbar zu erwarten war, dieselbe Lage, wie die bei punktförmiger Beleuchtung für $\Delta/2 = (2k+1)\pi/2$ auftretenden Streifen. Aber die Intensitätsvertheilung ist in

beiden Fällen verschieden. Denn für $\Delta/2 = (2k + 1)\pi/2$ folgt aus Gleichung (4):

$$J = \pi - 2\sqrt{2}\pi \left[\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 + \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \right] \\ + 4 \left[\left(\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 \right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \right)^2 \right].$$

Durch die Uebereinanderlagerung der Streifen werden also die Intensitätsschwankungen auf die Hälfte herabgesetzt. Es möge schliesslich des Vergleiches halber noch die Formel für die Intensitätsvertheilung in dem einseitigen Streifensysteme eines undurchsichtigen Beugungsschirmes angeführt werden. Sie lautet, in der gleichen Weise ausgedrückt:

$$J = \pi - \sqrt{2}\pi \left[\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 + \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \right] \\ + \left[\left(\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 \right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \right)^2 \right].$$

Dieser Ausdruck wird für die Streifen höherer Ordnung, für die das letzte Glied zu vernachlässigen ist, identisch mit dem Ausdruck für die lamellare Beugungserscheinung an keilförmigen Platten bei spaltförmiger Beleuchtung. Jede Hälfte dieser letzteren Erscheinung ist dann also einem gewöhnlichen Fresnel'schen Streifensysteme nicht blos in der Lage der Maxima und Minima, sondern auch in der Lichtvertheilung gleich, abgesehen von Punkten in der Nähe der Schattengrenze. In der Schattengrenze selbst ist bei den Fresnel'schen Streifen $J = \pi/4$, bei den übereinandergelagerten lamellaren Streifen dagegen $J = \pi/2$.

Derselbe Effect der Uebereinanderlagerung der Streifensysteme für alle möglichen Werthe von Δ tritt auch bei einer Platte von constanter Dicke ein, wenn man statt der homogenen Lichtquelle eine weisse verwendet. Auch dann macht, wenigstens bei dicken Lamellen, das entstehende doppelseitige Streifensystem, bis auf die Punkte in der Nähe der Mitte, in jeder seiner Hälften den gleichen Eindruck wie ein Fresnel'sches Streifensystem im weissen Lichte. In Wahrheit sind aber die beiden Erscheinungen in diesem Falle nichts weniger als identisch. Denn die Fresnel'schen Streifen bestehen in gleicher

Weise, nur mit geringen Lagenänderungen für alle Farben, die lamellaren Beugungstreifen dagegen haben für gewisse Farben ein Maximum der Schärfe und sind für gewisse andere Farben überhaupt nicht vorhanden. Auf diesem Umstande beruhen die bei der Achromatisirung der lamellaren Beugungserscheinungen auftretenden Eigenthümlichkeiten, die im folgenden Abschnitt behandelt werden sollen.

Es möge zum Schlusse dieses Abschnittes noch darauf hingewiesen werden, dass es, um die beschriebenen Erscheinungen wahrzunehmen, nicht so dünner Lamellen bedarf, wie sie Hr. Quincke verwandte. Sie sind ebenso gut an jedem Deckgläschen zu beobachten, wenn man als Lichtquelle ein feines, von einer Natronflamme beleuchtetes Loch benutzt. Liegt der beugende Rand senkrecht zu den Curven gleicher Dicke, so sieht man sehr deutlich die S-förmigen lamellaren Beugungsfransen. Beobachtet man Punkte in geringem Abstände von dem Glasplättchen, so sieht man zugleich mit den Beugungstreifen auch die Curven gleicher Dicke. Der Abstand dieser von einander ist wesentlich kleiner als der Abstand, in dem sich längs des Randes die S-förmigen Beugungstreifen wiederholen. Der Abstand zweier Curven gleicher Dicke ist durch eine Dickenänderung der Platte um $\lambda'/2$ oder um $\lambda/2N$ bedingt, wenn λ' die Wellenlänge im Glase, λ diejenige in der Luft und n den Brechungsexponenten des Glases bedeutet. Die periodische Wiederholung der lamellaren Beugungstreifen dagegen ist durch jedesmalige Dickenänderung um $\lambda/(N-1)$ gegeben. Für Glas kommen daher ungefähr sechs Intervalle der Curven gleicher Dicke auf ein Intervall der Beugungstreifen, vorausgesetzt, dass die Lamelle senkrecht zu den Lichtstrahlen liegt. Mit der Neigung der Lamelle zu den Lichtstrahlen ändern sich die Intervalle bei den beiden Erscheinungen in entgegengesetzter Weise. Bedeutet i den Einfallswinkel in Luft, r den zugehörigen Brechungswinkel in der Lamelle, so ändert sich für die Curven gleicher Dicke die Phasendifferenz proportional mit $\cos r$, für die lamellaren Beugungserscheinungen dagegen ist

$$\Delta = \frac{2\pi D}{\lambda} (n \cdot \cos r - \cos i);$$

für jene nimmt Δ mit wachsender Neigung ab, für diese

zu. Dem entsprechend sieht man bei Drehung der Lamelle die Curven gleicher Dicke aus einander, die Systeme der Beugungstreifen dagegen näher aneinander rücken.

IV. Achromatisirung der lamellaren Beugungserscheinungen.

Denkt man sich die weisse Lichtquelle in der Ebene $z = a$ spectral zerlegt und die Lage der einzelnen Farben durch die Abscisse x_1 bestimmt, so würde wieder, wie im ersten Abschnitte, die Beugungserscheinung für jede einzelne Farbe, vorausgesetzt, dass x_1 klein gegen a ist, charakterisirt sein durch die die Lage der Maxima und Minima bestimmende Gleichung:

$$(16) \quad x_0 = -u \sqrt{\frac{b(a+b)\lambda}{\pi a}} - \frac{b}{a} x_1.$$

Darin würden für u die im vorigen Abschnitte ermittelten Wurzelwerthe einzusetzen sein. Wollte man den Achromatisirungseffect wie früher berechnen, indem man $dx_0/d\lambda = 0$ setzt, so würde man dabei zu berücksichtigen haben, dass im vorliegenden Falle auch u eine Function von λ ist. Allein diese ganze Betrachtungsweise ist für den vorliegenden Fall nicht ausreichend, weil mit der Phasendifferenz sich nicht bloss der Ort der Maxima und Minima verschiebt, sondern vor allem die Intensität der ganzen Erscheinung sich ändert. Man müsste also auf die Intensitätsgleichung zurückgehen, müsste aus dieser die Summe der Intensitäten für alle Farben unter Berücksichtigung ihrer verschiedenen Lage herleiten und die Maxima und Minima dieses Ausdrucks suchen, wie es Esselbach in der oben genannten Arbeit für die entsprechende Fraunhofer'schen Beugungserscheinung gethan hat. Die Intensitätsgleichung ist aber für die Fresnel'schen Beugungserscheinungen zu complicirt, um sich in der Weise verwerthen zu lassen. Dagegen kann man auf Grund der im vorigen Abschnitte gewonnenen genauen Einsicht in die Erscheinungen bei homogenem Lichte sich die verschiedenen Möglichkeiten von Achromatisirungseffecten durch einfache Ueberlegungen klar machen.

Zweierlei ist zu beachten. Erstens wiederholt sich beim Durchwandern einer continuirlichen Farbenfolge der Verlauf der Erscheinungen periodisch, so oft λ in Folge der Veränderung der Wellenlänge um 2π sich ändert. Rechnet man die Periode

von einer Farbe, für die keine Streifen auftreten ($\Delta = 2k\pi$) bis zur nächsten ($\Delta = (2k+2)\pi$), so treten innerhalb jeder Periode die Streifen mit wachsendem Δ allmählich hervor, erreichen für $\Delta = (2k+1)\pi$ das Maximum ihrer Deutlichkeit und verschwinden dann wieder, und zu gleicher Zeit verschieben sie sich im Verlaufe der Periode um eine halbe Streifenbreite. Zweitens aber sind die Streifensysteme der einzelnen Perioden insofern nicht ganz gleich, als der Factor von u in der Gleichung (16) ebenfalls mit der Wellenlänge variabel ist. Geht man von längeren zu kürzeren Wellenlängen, also im Sinne der wachsenden Δ , so rücken von Periode zu Periode die Streifen in dem Systeme etwas enger zusammen.

Die erste Möglichkeit eines Achromatisirungs-Effectes besteht nun offenbar darin, dass die zuletzt genannte Verschiebung der Streifen von Periode zu Periode durch die spectrale Ausbreitung der Farben compensirt wird. Ist die Lamelle nicht ausserordentlich dünn, kommt vielmehr auf die Ausdehnung des Spectrums eine ganze Anzahl von Perioden — bei den benutzten Deckgläschen waren es ungefähr 48 zwischen der C - und der F -Linie — so ist unmittelbar ersichtlich, dass die Bedingung für diese Art von Achromasie die gleiche ist, wie für die Achromatisirung der gewöhnlichen Fresnel'schen Beugungsstreifen, die im ersten Abschnitte behandelt worden ist. In der That nimmt man unter den gleichen Bedingungen, wie sie dort hinsichtlich der Breite des Spectrums, und der Entfernungen a und b angegeben worden sind, dieselben Achromatisirungseffekte wie am Rande eines undurchsichtigen Schirmes dem auch am Rande einer durchsichtigen Lamelle wahr, nur mit Unterschiede, dass, da die lamellare Erscheinung im homogenen Lichte doppelseitig ist, bei spectraler Beleuchtung für jede Lage der Lamelle ein achromatisches Streifensystem erhalten werden kann. Liegt die Lamelle auf der violetten Seite des Spectrums, so sind beim reellen Beugungsbilde die äusseren Streifen achromatisch; liegt sie auf der rothen Seite, so sind es die inneren, und umgekehrt im virtuellen Beugungsbilde.

Während in diesem Falle für zwei benachbarte Perioden sich Minima gleicher Ordnung übereinanderlagern, führt der Umstand, dass die Beugungserscheinung in der Farbenfolge nicht stetig, sondern periodisch auftritt, zu der weiteren Mög-

lichkeit, dunkle Streifen zu erhalten durch die Uebereinanderlagerung der Minima verschiedener Ordnung für zwei benachbarte Perioden. Die Beugungserscheinung ist am intensivsten ausgebildet für diejenigen Farben, für die $\Delta = (2k + 1)\pi$ ist. Der Abstand zweier Farben dieser Art, die um eine Periode auseinanderliegen, in der Ebene des Spectrums ($z = a$) möge mit δx_1 bezeichnet werden. Ihnen entsprechen in der Beobachtungsebene ($z = b$) zwei Systeme von Beugungsstreifen, die gegeneinander verschoben sind um eine Strecke $\delta x_0 = -(b/a) \delta x_1$. Bei dickeren Lamellen ist der Unterschied der Wellenlängen der beiden Farben so gering, dass man die beiden Streifensysteme im übrigen als identisch betrachten kann. Da der Phasenunterschied der beiden Wellenlängen in der Lamelle 2π betragen soll, so lässt sich der Abstand der entsprechenden Punkte der beiden Systeme ausdrücken durch die Gleichung:

$$\delta x_0 = -2\pi \frac{b}{a} \frac{dx_1}{d\lambda} \bigg/ \frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Andererseits sind in der Beugungsfigur jeder der beiden Farben die Abstände der seitlichen Maxima und Minima von dem centralen Minimum näherungsweise gegeben durch:

$$\delta x_0 = \pm \sqrt{n - \frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\lambda b (\alpha + b)}{a}}.$$

Es ist vor allem zu beachten, dass in dieser Beugungsfigur die Abstände der Minima voneinander oder von den Maxima je nach der Ordnung sehr verschieden sind. Um nur die wichtigsten Fälle, nämlich diejenigen der ersten beiden Ordnungen anzuführen, so ist in der für die obige Formel geltenden Annäherung:

Der Abstand des 1. seitlichen Min. vom centralen Minimum:				$1,32 \sqrt{\frac{\lambda b (\alpha + b)}{a}}$
„	„	„ 2. Max.	vom 1. Max.	0,79 „
„	„	„ 2. Min.	„ 1. Min.	0,61 „
„	„	„ 1. Max.	„ centralen Minimum	0,86 „
„	„	„ 1. Min.	„ 1. Max.	0,46 „

Aus diesem Umstande ergibt sich eine vielfache Möglichkeit, eine Reihe von Streifensystemen dieser Art nebeneinander in gleichen Abständen so anzuordnen, dass als Gesamteffect sich ein System von Streifen gleichen Abstandes ergibt. Um zu erfahren, welche von diesen möglichen Com-

binationen bei den wirklich beobachteten Streifen vorlagen, wurden Versuche folgender Art angestellt.

Wie bei dem im zweiten Abschnitt beschriebenen Versuche wurde ein objectives Spectrum mit Hülfe eines Spectralapparates erzeugt, aus dessen Beobachtungsfernrohr der Ocularansatz entfernt war. Die Lichtstrahlen, die dieses Spectrum bildeten, fielen dann weiterhin auf den schwarzen Blechschirm mit der grösseren rechteckigen Oeffnung, die zur Hälfte mit einem passenden Deckgläschen belegt war, und bildeten hinter diesem die zu untersuchende Beugungsfigur in Form eines Systems schwacher farbloser Streifen in dem von verwaschenen Farben erfüllten Gesichtsfelde. Wurden die Entfernungen a und b des Spectrums einerseits, des Beobachtungspunktes andererseits von dem Deckgläschen nicht zu gross genommen, so war es möglich, das Streifensystem mit dem horizontalen Mikroskope zu beobachten und auf der Ocularscala dieses Mikroskopes den Abstand der Streifen zu messen. Diese Messungen wurden für diejenige Stelle des Gesichtsfeldes ausgeführt, deren Beleuchtung von der Gegend der D -Linie des Spectrums herrührte. Nach jeder Messung wurde bei unveränderter Lage des Deckgläschens und des Mikroskopes der Auerbrenner, der zur Erzeugung des Spectrums gedient hatte, durch eine Natronflamme ersetzt. Dann sah man im Mikroskope die lamellare Beugungsfigur des Deckgläschens für $\mathcal{N}a$ -Licht und konnte den Abstand etwa der ersten seitlichen Minima voneinander messen. Es wurden zwei Beobachtungsreihen in der Weise ausgeführt, dass das Mikroskop in constantem Abstand vom Spectrum aufgestellt, und der Schirm mit dem Deckgläschen zwischen Spectrum und Mikroskop verschoben wurde. Wenn man diesen vom Mikroskope aus langsam nach dem Spectrum hinausschiebt, so treten die Streifen anfangs sehr eng und zahlreich auf, allerdings so matt, dass sie schwer wahrzunehmen sind, verbreitern sich dann allmählich und haben schliesslich das Aussehen breiter verschwommener Schatten, wenn sie für kleine Werthe von a wieder aufhören sichtbar zu sein. Aber der Verlauf vom ersten Auftreten bis zum letzten Verschwinden war kein stetiger. Vielmehr verschwanden die Streifen auch für bestimmte mittlere Werthe von a , während sie an anderen dazwischenliegenden Punkten mit einem gewissen Maximum von

Deutlichkeit hervortraten. Für diese letzteren Lagen wurden die Streifenbreite δ im Spectrum und der Abstand δ' der beiden ersten Minima im *Na*-Lichte gemessen.

1. Beobachtungsreihe. $a + b = 80$ mm.

Die Streifen verschwanden für	$a =$	56	48,5	38	mm.
Es betrug für	$a =$	58,5	52,5	46	26 mm.
die Streifenbreite δ		0,65	0,9	1,3	3,3 Sc.-T.
der Abstand δ'		3,6	4,5	5,2	9 Sc.-T.
also nahezu	$\delta' =$	$6 \times \delta$	$5 \times \delta$	$4 \times \delta$	$3 \times \delta$.

2. Beobachtungsreihe. $a + b = 110$ mm.

Die Streifen verschwanden für	$a =$	67	57	39	mm.
Es betrug für	$a =$	71	62,5	51	28 mm.
die Streifenbreite δ		0,9	1,2	2,0	5,5 Sc.T.
der Abstand δ'		5,5	6	8	ca. 12,5 Sc.-T.
also nahezu	$\delta' =$	$6 \times \delta$	$5 \times \delta$	$4 \times \delta$	$[3 \times \delta]$.

Nach diesen Beobachtungen würden also die untersuchten Streifen das Maximum ihrer Deutlichkeit jedesmal dann besitzen haben, wenn der Abstand der ersten seitlichen Minima in der lamellaren Beugungsfigur für homogenes Licht gleich einem ganzen vielfachen m der Streifenbreite, d. h. des Periodenabstandes in der Ebene $z = b$ ist. Der Abstand der ersten seitlichen Minima von einander ist angenähert:

$$\delta' = \sqrt{7} \sqrt{\frac{\lambda b (a + b)}{a}} = 2,64 \sqrt{\frac{\lambda b (a + b)}{a}},$$

die Periodenbreite ist

$$\delta = 2\pi \frac{b}{a} \frac{dx_1}{d\lambda} \bigg/ \frac{d\Delta}{d\lambda},$$

also wäre die Bedingung für das Maximum der Deutlichkeit:

$$\delta' = m \times \delta,$$

oder

$$(17) \quad m \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{7(a+b)\lambda}}{2\pi} \frac{d\Delta}{d\lambda} \bigg/ \frac{dx_1}{d\lambda}.$$

Die Uebereinstimmung zwischen δ' und $m \times \delta$ in den obigen Zahlenwerthen ist nicht überall befriedigend. Das liegt vor allem daran, dass die Einstellung auf das Maximum der Deutlichkeit der Streifen ziemlich unsicher ist. Man kann in der That von den angegebenen Lagen aus den Schirm beträchtlich nach beiden Seiten hin verschieben, ohne dass die Streifen aufhören deutlich zu sein. Dagegen ist die Einstellung auf das Verschwinden der Streifen von einer bemerkens-

werthen Schärfe. Nach der dargelegten Auffassung der Erscheinung wird das Verschwinden eintreten, so oft δ'/δ gleich einer ganzen Zahl $+\frac{1}{2}$ ist. Für die drei Verschwindungspunkte der beiden Beobachtungsreihen müsste δ'/δ die Werthe 5,5, 4,5 und 3,5 haben und diese Werthe müssten mit den zugehörigen Werthen von a und b so verknüpft sein, dass für jede Beobachtungsreihe $\sqrt{b/a} \cdot \delta'/\delta$ gleich einer Constanten ist. Die Rechnung ergibt Folgendes:

1. Beobachtungsreihe: $a + b = 80$

$a =$	56,0	48,5	38,0	
$b =$	24,0	31,5	42,0	
$\delta'/\delta =$	5,5	4,5	3,5	
$\frac{\delta'}{\delta} \sqrt{\frac{b}{a}} =$	3,60	3,63	3,68.	Im Mittel 3,64.

2. Beobachtungsreihe: $a + b = 110$.

$a =$	67,0	57,0	39,0	
$b =$	43,0	53,0	71,0	
$\delta'/\delta =$	5,5	4,5	3,5	
$\frac{\delta'}{\delta} \sqrt{\frac{b}{a}} =$	4,41	4,32	4,72.	Im Mittel 4,48.

Um aber auch zu controlliren, ob wirklich die gemessene Streifenbreite dem durch die Dimensionen des angewandten Spectrums und die Natur des Deckgläschens bestimmten Periodenabstand in der Ebene $z = b$ entspricht, wurde der constante Werth von $\sqrt{b/a} \cdot \delta'/\delta$ aus der rechten Seite der obigen Gleichung berechnet. Wie im zweiten Abschnitt wurde

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = 2B/\lambda^3 \text{ und } \frac{dD}{d\lambda} = 2\pi D \frac{d \frac{N-1}{\lambda}}{d\lambda} = - \frac{2\pi D(N-1)}{\lambda^2}$$

gesetzt. Dann ist dem absoluten Werthe nach

$$\frac{\delta'}{\delta} \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{7(a+b)} \lambda \frac{D(N-1)\lambda}{2B}.$$

In dem angewandten Spectrum betrug der Abstand der D - von der F -Linie 5 mm. Der Brechungsexponent des Deckgläschens N wurde wieder zu 1,53, seine Dicke zu 0,16 mm angenommen. Dann ist $B = 3,70 \times 10^{-6}$ zu setzen, und es ergibt sich für die Constante in der ersten Beobachtungsreihe 3,87, für die in der zweiten Beobachtungsreihe 4,54, also

Werthe, die den durch die Beobachtung direct ermittelten Werthen sehr nahe liegen.

Es möge schliesslich noch eine andere Form des Versuches erwähnt werden, die die Richtigkeit der dargelegten Theorie der Erscheinung unmittelbar zur Anschauung brachte. Die obere Hälfte des Spaltes des Spectralapparates wurde mit dem Auerbrenner, die untere mit der Na-Flamme beleuchtet, und das Mikroskop dem objectiven Spectrum so weit genähert, dass eine Sonderung des Gesichtsfeldes in zwei Hälften wahrnehmbar wurde. Die obere Hälfte war von einem verwaschenen Bilde des Spectrums, die untere von einem breiten Bande von Na-Licht erfüllt. Wurde nun das Deckgläschen zwischen den anvisirten Punkt und das Spectrum eingeschoben, so nahm man gleichzeitig im oberen Theile des Gesichtsfeldes die spectralen Streifen, im unteren die dem homogenen Lichte entsprechende Beugungsfigur wahr, und man konnte sich durch unmittelbare Vergleichung davon überzeugen, dass an den Stellen deutlicher Sichtbarkeit der spectralen Streifen der Abstand der ersten Minima des Beugungsbildes nahezu ein ganzes Vielfaches des Abstandes der spectralen Streifen war.

Welche Intensitätsvertheilung in den beschriebenen Fällen durch die Uebereinanderlagerung der einzelnen Beugungserscheinungen zu Stande kommt, das lässt sich rechnerisch auswerthen unter Benutzung der von Airy in seiner ersten Abhandlung¹⁾ mitgetheilten Zahlen, die nichts anderes als den Intensitätsverlauf der lamellaren Beugungserscheinung repräsentiren. Die Resultate einer solchen Rechnung sind in den nebenstehenden Figuren veranschaulicht. Es sind die vier Fälle $m = 2, 3, 4$ und 5 dargestellt. Für jeden Fall sind die Intensitätscurven für die einzelnen Erscheinungen mit der dem Werthe von m entsprechenden Verschiebung unter einander gezeichnet. Für die mittlere Periode, den durch die Schraffirung gekennzeichneten Theil, ist die Summation der Intensitäten durchgeführt, die für jeden Punkt erhaltene Intensitätssumme durch die Anzahl der summirten Einzelercheinungen dividirt, und der so gefundene resultirende Intensitätsverlauf innerhalb der Periode durch die oberste, stark gezeichnete

1) Airy, Pogg. Ann. 53. p. 582—584. 1841.

Curve veranschaulicht. Die Einzelercheinungen sind dabei nur soweit berücksichtigt, als das erste seitliche Minimum noch in die mittlere Periode hineinfällt. Diese Curven lehren erstens, dass mit wachsendem m die Intensitätsdifferenzen schnell abnehmen; in der That waren für Werthe von $m > 5$ die Streifen im Spectrum so schwach, dass sie nicht mehr sicher wahrzunehmen waren. Wichtiger ist die zweite Bemerkung. Die Grenzen der Periode sind so gewählt, dass sie auf die centralen Minima zweier benachbarter Einzelercheinungen fallen. Die Minima der resultirenden Intensität fallen aber nur für die Werthe $m = 2$ und $m = 4$ in diese Grenzen; für die Werthe

$m = 3$ und $m = 5$ dagegen fallen auf die centralen Minima der Einzelercheinung die Maxima der Gesamtintensität. Daraus folgt des Weiteren, dass zwischen je zwei von den gezeichneten Fällen ein Werth vom m existiren muss, für den in der resultirenden Intensität die Maxima und die Minima überhaupt verschwinden, und dass beim Durchgange durch diese Werthe von m die Maxima in Minima und die Minima in Maxima sich verwandeln. Dass diese Verschwindungspunkte genau auf die Werthe $m = 2,5, 3,5, 4,5$ fallen müssen, kann man in Anbetracht der complicirten Intensitätscurve der Einzelercheinung wohl nicht ohne Weiteres behaupten, ebensowenig, wie die grössten Intensitätsdifferenzen unbedingt den ganz-

zähligen Werthen zukommen müssen. Aber die mitgetheilten Beobachtungen lehren jedenfalls, dass sehr nahe das Maximum der Deutlichkeit der Streifen für die ganzzahligen Werthe von m und das Verschwinden für die zwischenliegenden halbzähligen Werthe eintritt.

Die hier vorgetragene Theorie der Erscheinungen ist aber immer noch in einem Punkte unvollständig. Entständen die behandelten Streifen, wie bisher vorausgesetzt wurde, nur durch die Uebereinanderlagerung der lamellaren Beugungserscheinungen im Maximum ihrer Intensität, d. h. für die Farben, für die $\Delta = (2k + 1)\pi$ ist, so müssten sie sichtbar sein, gleichviel ob das Glasplättchen auf der violetten oder auf der rothen Seite des Gesichtsfeldes sich befindet; denn die Erscheinungen für die einzelnen Farben sind völlig symmetrisch nach beiden Seiten und ganz unabhängig von einander. In Wahrheit sind die Streifen aber nur sichtbar, wenn das Plättchen auf der violetten Seite des Gesichtsfeldes liegt. In diesem Umstande kommt eine dritte Achromatisirungsmöglichkeit der lamellaren Beugungserscheinungen zur Geltung. Ausser den Verschiebungen der ganzen Perioden mit der Wellenlänge finden, wie schon erwähnt wurde, auch noch innerhalb der Periode Verschiebungen des Streifensystemes mit der Wellenlänge, und zwar von einem Ende der Periode bis zum andern um eine halbe Streifenbreite, statt. Man kann auch diese Verschiebungen sich durch die spectrale Auseinanderrückung der Farben compensirt denken. Da diese Verschiebung mit wachsendem Δ , d. h. abnehmender Wellenlänge nach dem Inneren der Lamelle zu erfolgt, so ist diese Compensation nur möglich, wenn das blaue Ende des Spectrums auf der Seite der Lamelle liegt. Des genaueren hat man nach derjenigen Breite des Spectrums zu fragen, bei der die Compensation für das Streifensystem im Maximum seiner Intensität, d. h. für $\Delta = (2k + 1)\pi$ eine vollständige ist. Diese Bedingung ist aber für die verschiedenen Theile des Streifensystems verschieden. Für das centrale Minimum ist die Abhängigkeit von Δ durch die Gleichung (7a) ausgedrückt. Diese mit der Gleichung (16) verbunden, ergibt:

$$x_0 = + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b(a+b)}{2a}} \operatorname{ctg} \frac{\Delta}{2} - \frac{b}{a} x_1.$$

Da sich die Betrachtung hier auf den stetigen Verlauf der Erscheinung innerhalb der Periode beschränken soll, so kann man die Achromatisirungsgleichung wie früher in der Form $dx_0/d\lambda = 0$ ansetzen, und erhält für die Mitte der Periode, d. h. für $\Delta = (2k + 1)\pi$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\lambda} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \cdot \frac{d\Delta}{d\lambda}, \\ &= -0,177 \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \frac{d\Delta}{d\lambda}.\end{aligned}$$

Für ein seitliches Maximum oder Minimum hat man dagegen nach Gleichung (12) und (15),

$$x_0 = \mp \sqrt{n - \frac{1}{4}} \pm \varepsilon \sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}} - \frac{b}{a} x_1,$$

wobei

$$\frac{\Delta}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon \pi$$

gesetzt ist, und daraus für die Mitte der Periode ($\varepsilon = 0$), als Achromatisirungsbedingung des n ten Streifens:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \left\{ \mp \frac{\sqrt{n - \frac{1}{4}}}{2\lambda} - \frac{1}{4\pi \sqrt{n - \frac{1}{4}}} \frac{d\Delta}{d\lambda} \right\}.$$

Ist $d\Delta/d\lambda$ gross, so kann man das erste Glied in der Klammer vernachlässigen und erhält:

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -\frac{1}{4\pi \sqrt{n - \frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

also für das erste seitliche Maximum ($n = 1$):

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -0,092 \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

für das erste seitliche Minimum ($n = 2$):

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = -0,060 \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \frac{d\Delta}{d\lambda}.$$

Dem Vorzeichen nach bedeuten diese Gleichungen, da $d\Delta/d\lambda$ negativ ist, dass x_1 mit λ abnehmen muss, also das blaue Ende des Spectrums nach der negativen Seite, der Seite der Lamelle hin gelegen sein muss. Der Grösse nach reihen sich die hier verlangten Breiten des Spectrums ein unter die Werthe, die nach den früheren Betrachtungen für die beste

Sichtbarkeit der Streifen gefunden wurden. Denn nach Gleichung (17) ist

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi m} \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \frac{dA}{d\lambda}.$$

Also:

$$\text{für } m = 2 \quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0,210 \sqrt{\frac{\lambda a(a+b)}{b}} \frac{dA}{d\lambda}$$

$$,, \quad m = 3 \quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0,140 \quad ,, \quad ,,$$

$$,, \quad m = 4 \quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0,105 \quad ,, \quad ,,$$

$$,, \quad m = 5 \quad \frac{dx_1}{d\lambda} = 0,084 \quad ,, \quad ,,$$

Diese Nebeneinanderstellung lässt erkennen, dass unter den Verhältnissen, unter denen die geschilderten Uebereinanderlagerungen der Streifensysteme benachbarter Perioden stattfinden, zugleich auch die Bedingung der Achromasie für den Verlauf der Streifen innerhalb der Perioden nahezu erfüllt ist. Dieser bemerkenswerthe Umstand ist für die deutliche Sichtbarkeit der Streifen offenbar entscheidend; denn wenn jene Bedingung infolge Einführung des Blättchens von der rothen Seite her nicht erfüllt ist, so sind die Streifen überhaupt nicht wahrnehmbar.

Airy hat in der ersten seiner mehrfach genannten Arbeiten die hier besprochenen Erscheinungen bereits behandelt. Aber er beschränkt die Erörterung auf die hier zuletzt genannte achromatische Bedingung und erwähnt nicht die verschiedenen Möglichkeiten der Uebereinanderlagerung benachbarter Streifensysteme. Die hier vervollständigte Theorie ist als das vollkommene Analogon zur Esselbach'schen Theorie der Talbot'schen Streifen zu betrachten. Nach Esselbach ist die Deutlichkeit der Talbot'schen Linien dann am grössten, wenn ihr Abstand gleich dem gegenseitigen Abstände der ersten beiden seitlichen Minima im Beugungsbilde der unbedeckten Oeffnung ist. Dvořák hat diese Theorie experimentell geprüft.¹⁾ Es möge erwähnt werden, dass die oben beschriebene Versuchsanordnung auch für die Richtigkeit dieser Theorie

1) Dvořák, Wied. Ann. 147. p. 604—615. 1872.

eine ganz unmittelbare Bestätigung lieferte. Der Spalt des Spectrometers wurde zur Hälfte mit dem Auerbrenner, zur anderen Hälfte mit der *Na*-Flamme beleuchtet. Das Mikroskop wurde scharf auf das Spectrum und die darunter liegende *Na*-Linie eingestellt. Die Hälfte eines Objectives wurde von der violetten Seite her mit einem passenden Deckgläschen bedeckt; dann sah man im Spectrum die Talbot'schen Linien als graue Streifen. Wurde ausserdem ein Spalt von veränderlicher Breite dicht vor das Objectiv gesetzt, so konnte man zugleich an der *Na*-Linie im unteren Theile des Gesichtsfeldes das Beugungsbild dieses Spaltes wahrnehmen. Verengerte man den Spalt allmählich, so wurden die Talbot'schen Linien dunkler; man konnte sich überzeugen, dass sie vollkommen schwarz und scharf waren, wenn ihr Abstand dem gegenseitigen Abstände der ersten Minima im Beugungsbilde gleich war. Bei weiterer Verengung des Spaltes wurden sie wieder blasser und verschwanden dann ganz. Dieser Fraunhofer'schen Beugungserscheinung entsprechen die im Vorstehenden beschriebenen Formen von Fresnel'schen Beugungserscheinungen, nur sind hier die Resultate mannigfaltiger infolge der complicirten Lichtvertheilung in den Fresnel'schen Streifensystemen.

Es möge zum Schluss noch eine Beobachtung Erwähnung finden, die über den Kreis der hier behandelten Thatsachen hinausführte. Für den Verlauf der besprochenen Erscheinungen ist die Farbenvertheilung im Spectrum ein massgebender Factor; im besonderen würden die im zweiten Abschnitt beschriebenen Versuche (p. 17) eine ganz andere Abhängigkeit der Grösse α von der Wellenlänge ergeben müssen, wenn man das prismatische Spectrum etwa durch ein Beugungsspectrum ersetzte. Es schien daher von Interesse, die gleichen Versuche auch mit einem Beugungsspectrum anzustellen. Es ergab sich aber, dass die erwarteten Interferenzstreifen bei Anwendung eines Beugungsspectrums von ausreichender Breite nicht mit Sicherheit wahrzunehmen waren. Dagegen traten ausserordentlich scharfe und deutliche Interferenzstreifen in diesem Falle auf, wenn das Glasplättchen auf der rothen statt auf der violetten Seite des Gesichtsfeldes lag. Die nähere Untersuchung ergab, dass diese Streifen mit den bisher besprochenen Streifensystemen nichts gemein haben. Es liegt in ihnen vielmehr eine neue Art

achromatischer Interferenzstreifen vor, die offenbar in Beziehung steht zu jener eigenthümlichen Structur der Beugungswellen, auf die zuerst Lord Rayleigh¹⁾ und in jüngster Zeit Hr. Meslin²⁾ aufmerksam gemacht haben. Die genauere Besprechung dieser neuen Erscheinung gehört aber nicht mehr in den Kreis der hier angestellten Betrachtungen hinein und möge daher einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben.

Frankfurt a. M. Institut des physik. Vereins. März 1895.

1) Lord Rayleigh, *Encyclop. Britannica*. **24.** p. 421—459. 1888.

2) Meslin, *Ann. de chim. et. phys.* (7) **3.** p. 362. 1894.