Über die anomalistische und azimuthale Bewegung des Pendels in einer Kegelfläche von nahe kreisförmiger Basis, mit Rücksicht auf die stetige Verminderung der Elongationen durch den dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand der Atmosphäre, von Herrn Dr. *Lehmann*.

(Schluss der bisherigen Abhandlungen desselben Verfassers über die Pendel-Bewegung.)

§ 53.

Wir nehmen wiederum die Elongation während der ganzen Bewegung $< 1^{\circ}.8'.26'',2$ und $t < 2^h,243$, also ω constant an; ausserdem betrachten wir ω allemal als positiv, und übertragen die etwaige Negativität auf μ . Wenden wir nun die Theorie der Variation der Constanten auf die Gleichungen

$$\theta^2 = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2}{2} \cos(2\omega t + 2\eta),$$

$$\psi = \alpha + (\mu + \frac{1}{2}\mu')t + \text{Arc. tg.} \frac{\varepsilon' \text{ tg. } (\omega t + \eta)}{\varepsilon}$$

so an, dass wir dabei $\varepsilon, \varepsilon', \eta$ und α als die veränderlichen Constanten betrachten, so finden wir, so lange $\varepsilon, \varepsilon', \eta, \alpha$ noch als constant angesehen werden,

$$\theta^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \theta^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} \right) = \omega^2 (\varepsilon^2 - \varepsilon'^2)^2 \sin^2(\omega t + \eta) \cos^2(\omega t + \eta) + \omega^2 \varepsilon^2 \varepsilon'^2 + 2(\mu + \frac{1}{2}\mu')\omega \varepsilon \varepsilon' \theta^2 + (\mu + \frac{1}{2}\mu')^2 \theta^4$$

$$= \theta^2 \omega^2 (\varepsilon^2 \sin^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \cos^2(\omega t + \eta)) + 2(\mu + \frac{1}{2}\mu')\omega \varepsilon \varepsilon' \theta^2 + (\mu + \frac{1}{2}\mu')^2 \theta^4;$$

$$k = \rho \sqrt{\frac{d\theta^2}{dt^2} + \theta^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} \left(1 - \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{2}{45}\theta^4 - \dots \right)}$$

$$= \rho \omega \sqrt{\varepsilon^2 \sin^2(\omega t + \eta) + \varepsilon'^2 \cos^2(\omega t + \eta) + 2 \left(\frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{\omega} - \frac{\theta^2}{6} \right) \varepsilon \varepsilon' + \dots}$$

$$= \rho \omega \sqrt{\beta^2 + \beta'^2 - 2\beta(l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t) + 2 \left(\frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{\omega} - \frac{\beta^2}{6} \right) \beta^2 + \dots}$$

$$= \rho \omega \beta \sqrt{1 - 2 \frac{l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t}{\beta} + \frac{\beta'^2}{\beta^2} + \frac{2\mu + \mu'}{\omega} - \frac{\beta^2}{3} + \dots}$$

$$= \rho \omega \beta \left(1 - \frac{l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t}{\beta} + \frac{(l \sin 2\omega t + h \cos 2\omega t)^2}{2\beta^2} + \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{\omega} - \frac{\beta^2}{6} + \dots \right)$$

$$= \rho \omega \beta - \rho \omega (l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t) + \rho \omega \frac{(l \sin 2\omega t + h \cos 2\omega t)^2}{2\beta} + \rho \beta (\mu + \frac{1}{2}\mu') - \frac{\rho \omega \beta^3}{6} + \dots$$

Substituirt man diesen Werth statt k in die Differentialgleichungen des Artikels 36. für β, h, l, α' , so sieht man, dass die zu Ende der 80^{sten} Seite der Preisschrift angegebenen Ausdrücke für $\frac{d\beta}{dt}, \frac{dh}{dt}, \frac{dl}{dt}, \frac{d\alpha'}{dt}$ folgende Zusätze erhalten:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\rho \left(\omega \beta'^2 \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos(4\omega t + 4\eta)}{8} \right) + (\mu + \frac{1}{2}\mu') \beta^2 - \frac{\omega \beta^4}{12} \right) + \dots;$$

$$\frac{dh}{dt} = -\rho \left(\omega \beta'^2 \left(\frac{3}{8} \sin 2\omega t + \frac{\sin(2\omega t + 4\eta)}{16} - \frac{\sin(6\omega t + 4\eta)}{16} \right) + \left((\mu + \frac{1}{2}\mu') \beta^2 - \frac{\omega \beta^4}{12} \right) \sin 2\omega t \right) + \dots;$$

$$\frac{dl}{dt} = \rho \left(\omega \beta'^2 \left(\frac{3}{8} \cos 2\omega t - \frac{\cos(2\omega t + 4\eta)}{16} - \frac{\cos(6\omega t + 4\eta)}{16} \right) + \left((\mu + \frac{1}{2}\mu') \beta^2 - \frac{\omega \beta^4}{12} \right) \cos 2\omega t \right) + \dots;$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \frac{\rho \omega \beta'^2}{4\beta} \sin(4\omega t + 4\eta) + \dots$$

Die Differentiale von β, h, l, α' haben also überhaupt folgende nicht-periodische Glieder:

$$\frac{d\beta}{dt} = -\rho \left(\frac{\omega \beta^2}{2} + \frac{3\omega \beta'^2}{8} + (\mu + \frac{1}{2}\mu') \beta^2 - \frac{\omega \beta^4}{12} + \dots \right); \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4}\rho \omega \beta h; \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{3}{4}\rho \omega \beta l; \quad \frac{d\alpha'}{dt} = 0,$$

und folgende periodische:

$$\frac{d\beta}{dt} = \rho \omega \beta (l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t) + \dots; \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2} \rho \omega \beta^2 \sin 2\omega t + \dots; \quad \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2} \rho \omega \beta^2 \cos 2\omega t + \dots;$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -\frac{1}{2} \rho \omega (l \sin 2\omega t + h \cos 2\omega t) + \dots$$

Vernachlässigen wir anfangs die periodischen Glieder, und behalten wir von den nicht-periodischen nur die Hauptglieder

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{2} \rho \omega \beta^2, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{4} \rho \omega \beta h, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{3}{4} \rho \omega \beta l, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = 0$$

bei, so erhalten wir folgende Integrale:

$$\beta = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega (\beta) t}; \quad h = \frac{(2 + \rho \omega (\beta) t)^{-\frac{3}{2}}}{\text{constante}},$$

wo die Constante, wenn für $t = 0$ auch $\eta = 0$ ist, unendlich, und folglich h constant $= 0$ ist;

$$l = (\beta') (1 + \frac{1}{2} \rho \omega (\beta) t)^{-\frac{3}{2}}; \quad \alpha' \text{ constant} = \alpha.$$

Hierdurch gehen die vorher vernachlässigten Glieder, deren Unmerklichkeit wir nun zeigen wollen, in

$$\frac{d\beta}{dt} = \rho \left(\omega \beta \beta' \cos 2\omega t - \frac{3\omega (\beta')^2}{(2 + \rho \omega (\beta) t)^3} - \frac{4\mu + 2\mu'}{(2 + \rho \omega (\beta) t)^2} (\beta)^2 + \frac{4\omega (\beta)^4}{3(2 + \rho \omega (\beta) t)^4} \right) + \dots,$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\rho \omega}{2} \beta^2 \sin 2\omega t + \dots, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\rho \omega}{2} \beta^2 \cos 2\omega t + \dots, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = -\frac{1}{2} \rho \omega \beta' \sin 2\omega t + \dots$$

über. Wegen der langsamen Veränderung von β und β' können die periodischen Glieder dieser vier Gleichungen so integrirt werden, als wenn β und β' constant wären.*) Das giebt folgende für $t = 0$ verschwindende Integrale:

$$\delta \beta = \rho \beta \beta' \cdot \frac{\sin 2\omega t}{2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{(\beta)^2 - \beta^2}{(\beta)^3} (\beta')^2 - \frac{2\mu + \mu'}{\omega} ((\beta) - \beta) + \frac{(\beta)^3 - \beta^3}{18};$$

$$\delta h = -\rho \beta^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{4}; \quad \delta l = \rho \beta^2 \cdot \frac{\sin 2\omega t}{4}; \quad \delta \alpha' = -\rho \beta' \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{4}.$$

Von diesen vier Integralen ist das erste absolut genommen $< \frac{1}{2} \rho (\beta)^2 \cdot \frac{(\beta')}{(\beta)} + \frac{3}{8} (\beta) \left(\frac{(\beta')}{\beta} \right)^2 + \frac{2\mu + \mu'}{\omega} (\beta) + \frac{(\beta)^3}{18}$, also, wenn man

$$(\beta) = 1^\circ.8'.26'',2, \quad \frac{(\beta')}{(\beta)} = \frac{1}{17}, \quad \frac{\mu + \frac{1}{2}\mu'}{\omega} = \frac{1}{8803}$$

setzt, $< \text{Arc. } 6'',3185$ und daher schwerlich merklich. Die drei anderen Integrale haben wir in die aus der Gleichung

$$\theta^2 = \beta^2 + \beta'^2 + 2\beta (l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t)$$

des 23sten Artikels der Preisschrift und aus der Näherungsgleichung

$$\psi = (\omega + \mu + \frac{1}{2}\mu') t + \alpha' - \frac{(\sin 2\omega t + h \cos 2\omega t)}{\beta}$$

fließende Gleichung

$$\delta \theta^2 + \theta^2 \delta \psi^2 = \left(\frac{h \delta h + l \delta l}{\theta} + \beta \cdot \frac{\delta l \cos 2\omega t - \delta h \sin 2\omega t}{\theta} \right)^2 + \left(\delta \alpha' - \frac{\delta l \sin 2\omega t + \delta h \cos 2\omega t}{\beta} \right)^2 \theta^2$$

$$= \left(\delta h \sin 2\omega t - \delta l \cos 2\omega t - \frac{(\theta - \beta) \delta h \sin 2\omega t + \delta l (\beta' - (\theta - \beta) \cos 2\omega t)}{\theta} \right)^2$$

$$+ \left(\theta \delta \alpha' - \delta h \cos 2\omega t - \delta l \sin 2\omega t - \frac{(\theta - \beta) \delta h \cos 2\omega t + (\theta - \beta) \delta l \sin 2\omega t}{\beta} \right)^2$$

zu substituieren. Nun ist

$$\sqrt{(\delta h \sin 2\omega t - \delta l \cos 2\omega t)^2 + (\delta h \cos 2\omega t + \delta l \sin 2\omega t)^2} = \sqrt{\delta h^2 + \delta l^2},$$

*) Strenge genommen wäre z. B. $\int \rho \omega \beta \beta' \cos 2\omega t \cdot dt = \rho \beta \beta' \cdot \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{3}{8} \rho^2 \omega (\beta)^2 (\beta') \int (1 + \frac{1}{2} \rho \omega (\beta) t)^{-\frac{7}{2}} dt \cdot \sin 2\omega t$
 $= \rho \beta \beta' \cdot \frac{\sin 2\omega t}{2} - 5 \rho^2 \beta^2 \beta' \cdot \frac{\cos 2\omega t - 1}{16} + \dots$

und (weil $\theta > \varepsilon'$, d. i. $> \beta - \beta'$, und $\theta - \beta$ absolut genommen $< \beta'$)

$$\sqrt{\left(\frac{(\theta - \beta) \delta h \sin 2\omega t - \delta l (\theta - \beta) \cos 2\omega t}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{(\theta - \beta) \delta h \cos 2\omega t + (\theta - \beta) \delta l \sin 2\omega t}{\beta}\right)^2} \\ < \beta' \sqrt{\left(\frac{\delta h \sin 2\omega t - \delta l \cos 2\omega t}{\beta - \beta'}\right)^2 + \left(\frac{\delta h \cos 2\omega t + \delta l \sin 2\omega t}{\beta - \beta'}\right)^2},$$

d. i. $< \frac{\beta' \sqrt{\delta h^2 + \delta l^2}}{\beta - \beta'}$; ausserdem ist $\sqrt{\left(\frac{\delta l \cdot \beta'}{\theta}\right)^2} < \frac{\beta' \delta l}{\beta - \beta'}$, wenn man für δl den absoluten Werth nimmt; endlich ist $\sqrt{(\theta \delta \alpha')^2} < (\beta + \beta') \delta \alpha'$, wenn man für $\delta \alpha'$ den absoluten Werth nimmt. Diese vier Grössen

$$\sqrt{\delta h^2 + \delta l^2}, \quad \frac{\beta' \sqrt{\delta h^2 + \delta l^2}}{\beta - \beta'}, \quad \frac{\beta' \delta l}{\beta - \beta'}, \quad (\beta + \beta') \delta \alpha'$$

betragen zusammen

$$\frac{\beta \sqrt{\delta h^2 + \delta l^2} + \beta' \delta l}{\beta - \beta'} + (\beta + \beta') \delta \alpha', \quad (104)$$

wenn δl und $\delta \alpha'$ absolut genommen werden. Nun ist aber $\delta h^2 + \delta l^2 = (\frac{1}{2} \rho \beta^2 \sin \omega t)^2$, also $\sqrt{\delta h^2 + \delta l^2} < \frac{1}{2} \rho \beta^2$; dagegen ist $\beta' \delta l$ absolut genommen $< \frac{1}{4} \rho \beta^2 \beta'$, und $(\beta^2 - \beta'^2) \delta \alpha'$ absolut genommen $< \frac{1}{2} \rho (\beta^2 - \beta'^2) \beta^3$, also die Grösse (104) $< \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{\beta^3 + \frac{3}{2} \beta^2 \beta' - \beta'^3}{\beta - \beta'}$. Um so mehr ist

$$\sqrt{\delta \theta^2 + \theta^2 \delta \psi^2} < \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{\beta^3 + \frac{3}{2} \beta^2 \beta' - \beta'^3}{\beta - \beta'},$$

d. i.

$$\sqrt{\delta \theta^2 + \theta^2 \delta \psi^2} < \frac{1}{2} \rho \beta^2 \left(1 + \frac{\beta'}{\beta} \left(1 + \frac{3}{2 - 2 \frac{\beta'}{\beta}}\right) + \left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2\right).$$

Nun sind aber die obigen Gleichungen

$$\beta = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega(\beta) t}, \quad h = 0, \quad l = (\beta') (1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t)^{-\frac{3}{2}}$$

gleichgeltend mit

$$\beta = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega(\beta) t}, \quad \eta = 0, \quad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{(\beta')}{(\beta) \sqrt{1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t}},$$

zeigen also, dass $\beta < (\beta)$, und $\frac{\beta'}{\beta} < \frac{(\beta')}{(\beta)}$. Folglich ist

$$\sqrt{\delta \theta^2 + \theta^2 \delta \psi^2} < \frac{1}{2} \rho (\beta)^2 \left(1 + \frac{(\beta')}{(\beta)} \left(1 + \frac{3}{2 - 2 \frac{(\beta')}{(\beta)}}\right) + \left(\frac{(\beta')}{(\beta)}\right)^2\right).$$

d. i. (wenn man $(\beta) = 1^\circ.8'.26'', 2$ und $\frac{(\beta')}{(\beta)} = \frac{1}{17}$ setzt) $< \text{Arc. } 0'', 8822$. Die letztere Grösse, mit der oben gefundenen $6'', 3185$ zusammen, ist nicht $> 7'', 2007$, also schwerlich merklich, und so können wir bei den Integralen

$$\beta = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega(\beta) t}, \quad \beta' = (\beta') (1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t)^{-\frac{3}{2}}, \quad \eta = 0, \quad \delta \alpha = 0$$

stehen bleiben. Die beiden ersten unter diesen vier Gleichungen lassen sich, so lange ωt nicht $> \pi$ ist, auch so schreiben:

$$\beta = (\beta) - \frac{1}{2} \rho \omega(\beta)^2 t + \frac{1}{4} \rho^2 \omega^2(\beta)^3 t^2 - \frac{1}{8} \rho^3 \omega^3(\beta)^4 t^3 + \dots; \quad (105)$$

$$\beta' = (\beta') - \frac{3}{4} \rho \omega(\beta) (\beta') t + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} \rho^2 \omega^2(\beta)^2 (\beta') t^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} \rho^3 \omega^3(\beta)^3 (\beta') t^3 + \dots \quad (106)$$

und hier ist

$$\frac{1}{4} \rho^2 \omega^2(\beta)^3 t^2 > \frac{1}{4} \rho^2 \omega^2(\beta)^3 t^2 - \frac{1}{8} \rho^3 \omega^3(\beta)^4 t^3 + \dots$$

und (weil (β') nicht $> \frac{1}{17} (\beta)$ angenommen wird) auch $>$

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} \rho^2 \omega^2(\beta)^2 (\beta') t^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} \rho^3 \omega^3(\beta)^3 (\beta') t^3 + \dots, \quad \text{und}$$

doch $\frac{1}{4} \rho^2 \omega^2(\beta)^3 t^2 < \frac{1}{4} \pi^2 \rho^2 (\beta)^3$, d. i. (wenn man $(\beta) = 1^\circ.8'.26'', 2$ setzt) $< \frac{1}{14}$ Bogensekunde und daher völlig unmerklich, wodurch die Gleichungen (105) und (106) sich in

$$\beta = (\beta) - \frac{1}{2} \rho \omega(\beta)^2 t, \quad (107)$$

$$\beta' = (\beta') - \frac{3}{4} \rho \omega(\beta) (\beta') t \quad (108)$$

zusammen ziehen. Betrachtet man nun (β) als eine sehr kleine Grösse der ersten, und (β') als eine sehr kleine Grösse der zweiten Ordnung, so lehrt der oben gefundene numerische Werth von ρ , dass $\frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2t$ eine sehr kleine Grösse der dritten, und $\frac{3}{4}\rho\omega(\beta)(\beta')t$ eine sehr kleine Grösse der vierten Ordnung ist; folglich giebt die Wurzel-Ausziehung

$$\begin{aligned}\theta &= \beta + \beta' \cos 2\omega t + \frac{\beta'^2}{2\beta} \sin^2 2\omega t - \frac{\beta'^3}{2\beta^2} \sin^2 2\omega t \cos 2\omega t + \dots \\ &= (\beta) + (\beta') \cos 2\omega t + \frac{(\beta')^2}{2(\beta)} \sin^2 2\omega t - \frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2 t - \frac{(\beta')^3}{2(\beta)^2} \sin^2 2\omega t \cos 2\omega t - \frac{3}{4}\rho\omega(\beta)(\beta')t \cos 2\omega t + \dots,\end{aligned}$$

wo aber das Maximum des Gliedes $\frac{(\beta')^3}{2(\beta)^2} \sin^2 2\omega t \cos 2\omega t$ und das Maximum des Gliedes $\frac{\beta'^3}{2\beta^2} \sin^2 2\omega t \cos 2\omega t$ nicht $> \frac{(\beta)}{\sqrt{27}} \left(\frac{(\beta')}{(\beta)}\right)^3$, d. i. (wenn man $(\beta) = 1^\circ.8'.26'',2$ und $\frac{(\beta')}{(\beta)} = \frac{1}{17}$ setzt) nicht $> \text{Arc. } 0'',16084$, und das Glied $\frac{3}{4}\rho\omega(\beta)(\beta')t \cos 2\omega t < \frac{3}{4}\pi\rho(\beta)(\beta')$, also um so mehr $< \frac{3}{4}\pi\rho \frac{(\text{Arc. } 1^\circ.8'.26'',2)^2}{17}$, d. i. $< \text{Arc. } 0'',2115$, beide Grössen $0'',16084$ und $0'',2115$ zusammen aber nicht $> 0'',3723$ und daher unmerklich sind. Dadurch findet sich

$$\theta = (\beta) + (\beta') \cos 2\omega t + \frac{(\beta')^2}{2(\beta)} \sin^2 2\omega t - \frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2 t$$

und folglich

$$\frac{d\theta}{dt} = -2\omega(\beta') \sin 2\omega t + \omega \frac{(\beta')^2}{(\beta)} \sin 4\omega t - \frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2.$$

$$\theta = (\beta) + (\beta') - \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} + \dots + \frac{\rho^2(\beta)^3}{32} - \dots + \frac{\rho^2(\beta)^4}{16(\beta')} = (\beta) + (\beta') + \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} + \dots,$$

$$\theta = (\beta) - (\beta') + \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} - \dots + \frac{\rho^2(\beta)^3}{32} - \dots - \frac{1}{4}\rho(\beta)^2\pi = (\beta) - (\beta') + \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} - \frac{1}{4}\rho(\beta)^2\pi + \dots$$

Nun ist aber, wenn die Excentricität der Schwingungs-Ellipse irgend merklich ist, $(\beta') > \text{Arc. } 12''$, also (wenn wir $(\beta) = 1^\circ.8'.26'',2$ setzen) $\frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} < 0'',006066$. Addiren wir die gefundenen Grössen

$$\frac{1''}{714}, \quad 0'',006066$$

und dazu noch das Maximum von $\frac{3}{8}\pi\rho(\beta)(\beta')$, nämlich $\frac{3}{8}\pi\rho \frac{(\text{Arc. } 1^\circ.8'.26'',2)^2}{17}$, so finden wir $0'',11322$, also ebenfalls

unmerklich, und so sehen wir, dass das Maximum von θ nicht merklich von $(\beta) + (\beta')$, d. i. von dem bei $t = 0$ stattfindenden ε , und das erste Minimum nicht merklich von $(\beta) - (\beta') - \frac{1}{4}\rho(\beta)^2\pi + \frac{3}{8}\pi\rho(\beta)(\beta') + \dots$, d. i. von dem bei $\omega t = \frac{1}{2}\pi$ stattfindenden ε' verschieden ist. Da man diese Schlüsse bei jedem Maximum und Minimum von θ wiederholen kann, so finden die Maxima überhaupt statt,

aus der Gleichung

$$\theta^2 = \beta^2 + \beta'^2 + 2\beta \{l \cos 2\omega t - h \sin 2\omega t\}$$

des 23^{ten} Artikels der Preisschrift (welche Gleichung, wenn man $\eta = 0$ setzt,

$$\theta^2 = \beta^2 + 2\beta\beta' \cos 2\omega t + \beta'^2$$

lautet) folgende Gleichung:

Hieraus folgt bei der konischen Pendel-Schwingung mit genau kreisförmiger Basis $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2$, also stets negativ. Ist aber die Basis etwas excentrisch, so unterscheiden sich diejenigen Werthe von $2\omega t$, für welche $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ist, sehr wenig von

$$0, \quad \pi, \quad 2\pi,$$

und werden daher näherungsweise durch die Gleichungen

$$0 = -2\omega(\beta') \cdot 2\omega t - \frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2, \quad (109)$$

$$0 = -2\omega(\beta') (\pi - 2\omega t) - \frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2, \quad (110)$$

$$0 = -2\omega(\beta') (2\omega t - 2\pi) - \frac{1}{2}\rho\omega(\beta)^2$$

bestimmt. Die Gleichungen (109) und (110) geben:

$$t = \frac{-\rho(\beta)^2}{8\omega(\beta')}, \quad t = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\rho(\beta)^2}{8\omega(\beta')},$$

also

$$\begin{aligned}\theta &= (\beta) + (\beta') - \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} + \dots + \frac{\rho^2(\beta)^3}{32} - \dots + \frac{\rho^2(\beta)^4}{16(\beta')} = (\beta) + (\beta') + \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} + \dots, \\ \theta &= (\beta) - (\beta') + \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} - \dots + \frac{\rho^2(\beta)^3}{32} - \dots - \frac{1}{4}\rho(\beta)^2\pi = (\beta) - (\beta') + \frac{\rho^2(\beta)^4}{32(\beta')} - \frac{1}{4}\rho(\beta)^2\pi + \dots\end{aligned}$$

wenn $\theta = \varepsilon$, also $t =$

$$0, \quad \frac{\pi}{\omega}, \quad \frac{2\pi}{\omega}, \quad \dots,$$

und die Minima, wenn $\theta = \varepsilon'$, also $t =$

$$\frac{\pi}{2\omega}, \quad \frac{3\pi}{2\omega}, \quad \frac{5\pi}{2\omega}, \quad \dots;$$

alle Halb-Schwingungen werden also in gleichen Zeiträumen zurückgelegt, und die anomalistische Umlaufszeit des Pendels wird durch den Widerstand nicht geändert.

§ 54.

Die bis hierher abgeleiteten Ausdrücke der Integrale geben folgenden Unterschied des Einflusses beider Hypothesen zu erkennen: Bei der Annahme der Proportionalität des Widerstandes mit der Geschwindigkeit selbst ist das Verhältniss $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ constant und die Schwingungs-Ellipse bleibt sich

ähnlich, sowohl wenn sie sehr excentrisch, als, wenn sie sehr wenig excentrisch ist; bei der Annahme der Proportionalität des Widerstandes mit dem Quadrat der Geschwindigkeit aber bleibt das Verhältniss $\frac{\epsilon'^2}{\epsilon}$ constant, wenn die Ellipse sehr excentrisch ist; ist dieselbe sehr wenig excentrisch, so bleibt das Verhältniss $\frac{\beta'^2}{\beta^3}$ constant; in beiden Fällen nimmt die Excentricität der Ellipse ununterbrochen ab; die genaue kreisförmige Bahn bleibt auch hier kreis-

förmig, die Ellipse mit geringer Excentricität aber nähert sich unendlich dem Kreise ohne jedoch in endlicher Zeit die Kreisform völlig zu erreichen.

§ 55.

Da die Gleichungen

$$\beta = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega(\beta) t}, \quad \beta' = (\beta') (1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t)^{-\frac{3}{2}}$$

mit

$$\epsilon = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega(\beta) t} + (\beta') (1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t)^{-\frac{3}{2}}, \quad \epsilon' = \frac{2(\beta)}{2 + \rho \omega(\beta) t} - (\beta') (1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t)^{-\frac{3}{2}}$$

gleichgeltend sind, die letztere Gleichung aber

$$\frac{d\epsilon'}{dt} = -\frac{1}{2} \rho \omega(\beta)^2 (1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t)^{-\frac{5}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2} \rho \omega(\beta) t} - \frac{3(\beta')}{2(\beta)} \right)$$

und also negativ giebt, wenn $\frac{(\beta')}{(\beta)} < \frac{2}{3}$, so sehen wir, dass

bei der konischen Pendel-Schwingung mit nahe kreisförmiger Basis unter Voraussetzung des dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes auch ϵ und ϵ' ununterbrochen abnehmen.

§ 56.

Das obige Integral $\delta \alpha = 0$ aber zeigt, dass der dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionale Widerstand auch

in

$$\psi = ((\omega) - \mu) \int \frac{dt}{\sqrt{\cos \theta \cdot \frac{2(\theta)}{2 + \rho(\omega)(\theta)t}}}$$

$$= \alpha + ((\omega) - \mu) t \left(1 + \frac{(\theta)^2}{4 + 2\rho(\omega)(\theta)t} + \frac{84(\theta)^4 + 42\rho(\omega)(\theta)^5 t + 7\rho^2(\omega)^2(\theta)^6 t^2}{18(4 + 2\rho(\omega)(\theta)t)^3} + \dots \right)$$

über. Subtrahiren wir hiervon die Bewegung (47) § 30, welche der Elongation (θ) ohne Rücksicht auf den Widerstand entsprechen würde, so finden wir die indirecte Störung der Azimuthal-Bewegung:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -((\omega) - \mu) \left(\frac{\rho(\omega)(\theta)^3 t^2}{8 + 4\rho(\omega)(\theta)t} + \frac{168\rho(\omega)(\theta)^5 t^2 + 112\rho^2(\omega)^2(\theta)^6 t^3 + 21\rho^3(\omega)^3(\theta)^7 t^4}{36(4 + 2\rho(\omega)(\theta)t)^3} + \dots \right) \\ &= -\frac{((\omega) - \mu)\rho(\omega)(\theta)^3 t^2}{8 + 4\rho(\omega)(\theta)t} \left(1 + \frac{168(\theta)^2 + 112\rho(\omega)(\theta)^3 t + 21\rho^2(\omega)^2(\theta)^4 t^2}{18(4 + 2\rho(\omega)(\theta)t)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Differentiirt man hier die Grösse

$$\frac{168(\theta)^2 + 112\rho(\omega)(\theta)^3 t + 21\rho^2(\omega)^2(\theta)^4 t^2}{18(4 + 2\rho(\omega)(\theta)t)^2} \quad (111)$$

$$\left(\text{welche} = \frac{\frac{7}{2}(\theta)^2 \cdot \frac{6 + 8 \cdot \frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t + 3(\frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t)^2}{(1 + \frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t)^2} \right) \quad (112)$$

$$= \frac{7}{18\rho^2(\omega)^2 t^2} \cdot \frac{6(\frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t)^2 + 8(\frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t)^3 + 3(\frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t)^4}{(1 + \frac{1}{2}\rho(\omega)(\theta)t)^2} \quad (113)$$

ist) in der Gestalt (112) in Beziehung auf (ω) und auf t , in der Gestalt (113) aber in Beziehung auf (θ) , so erkennt man leicht, dass die Grösse (111) desto grösser ist, je länger das Pendel, je grösser die anfängliche Elongation, und je kürzere Zeit die Pendel-Bewegung fortgesetzt ist; für $t = 0$ ist die Grösse (111) $= \frac{7}{18}(\theta)^2$, also, wenn man $(\theta) = 1^\circ.8'.26'', 2$ setzt, $= \frac{1}{4325}$, woraus die schnelle Convengenz der Reihe

$$\delta\psi = -((\omega_1) - \mu) \left(\frac{\rho(\omega_1)(\theta)^3 t^2}{8 + 4\rho(\omega_1)(\theta)t} + \frac{168\rho(\omega_1)(\theta)^5 t^2 + 112\rho^2(\omega_1)^2(\theta)^6 t^3 + 21\rho^3(\omega_1)^3(\theta)^7 t^4}{36(4 + 2\rho(\omega_1)(\theta)t)^3} + \dots \right)$$

erhellt. Differenziert man aber hier die Grösse

$$\frac{168\rho(\omega_1)(\theta)^5 t^2 + 112\rho^2(\omega_1)^2(\theta)^6 t^3 + 21\rho^3(\omega_1)^3(\theta)^7 t^4}{36(4 + 2\rho(\omega_1)(\theta)t)^3}, \quad (114)$$

welche =

$$\frac{7(\theta)^4 t}{288} \cdot \frac{6 \cdot \frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t + 8(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^2 + 3(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^3}{(1 + \frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^3} \quad (115)$$

$$= \frac{7(\theta)^3}{144\rho(\omega_1)} \cdot \frac{6(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^2 + 8(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^3 + 3(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^4}{(1 + \frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^3} \quad (116)$$

$$= \frac{7}{18\rho^4(\omega_1)t^3} \cdot \frac{6(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^5 + 8(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^6 + 3(\frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^7}{(1 + \frac{1}{2}\rho(\omega_1)(\theta)t)^3} \quad (117)$$

ist, in der Gestalt (115) nach (ω_1) , in der Gestalt (116) nach t , und in der Gestalt (117) nach (θ) , so sieht man, dass die Grösse (114) desto grösser ist, je kürzer das Pendel, je grösser die anfängliche Elongation, und je länger die Pendel-Bewegung fortgesetzt ist; für

$$(\omega_1) = 10\pi, \quad (\theta) = 1^\circ 8' 26'', 2, \quad t = 2^h, 243$$

ist die Grösse (114), sogar um ihren 4325^{ten} Theil vermehrt, nicht $> \frac{1}{1024}$ Zeit-Secunde und daher völlig unmerklich. Wir können also kürzer

$$-\delta\psi = \frac{((\omega_1) - \mu)\rho(\omega_1)(\theta)^3 t^2}{8 + 4\rho(\omega_1)(\theta)t}$$

schreiben. Hieraus folgt:

$$\frac{(\omega_1) - \mu}{-\delta\psi} = \frac{8}{\rho(\omega_1)(\theta)^3 t^2} + \frac{4}{(\theta)^2 t};$$

folglich ist der Zeitraum $\frac{-\delta\psi}{(\omega_1) - \mu}$ desto grösser, je kürzer das Pendel, je grösser die anfängliche Elongation, und je länger die Pendel-Bewegung fortgesetzt ist; für

$$(\omega_1) = 10\pi, \quad (\theta) = 1^\circ 8' 26'', 2, \quad t = 2^h, 243$$

ist $\frac{-\delta\psi}{(\omega_1) - \mu} = 0,7834$ Zeit-Secunden.

$$t \frac{\psi' - \alpha}{\psi - \alpha} - t' = \frac{(\theta)^2 t'}{4 + 2\rho(\omega_1)(\theta)t} - \frac{(\theta)^3 t}{4 + 2\rho(\omega_1)(\theta)t} \cdot \frac{\psi' - \alpha}{\psi - \alpha},$$

also (da jedes der beiden Glieder dieser Formel $< 0,39007$ Zeit-Secunden ist) $< 0'',39007$.

Dieser Zeitraum ist merklich, sogar bei dem 20 Meter langen Pendel, wo er (wenn $(\theta) = 1^\circ 8' 26'', 2$ und $t = 2^h, 243$ gesetzt wird) $0'',4099$ beträgt; versteht man aber unter der Störung den Überschuss der wirklichen Azimuthal-Bewegung über diejenige, welche das Pendel annehmen würde, wenn es sich von Anfang an mit der Azimuthal-Geschwindigkeit $(\omega_1) - \mu$ bewegte, so lässt sich leicht die Unmerklichkeit darthun. Denn alsdann ist

$$\delta\psi = \psi - \alpha - ((\omega_1) - \mu)t,$$

also sehr nahe

$$\frac{\delta\psi}{(\omega_1) - \mu} = \frac{(\theta)^2 t}{4 + 2\rho(\omega_1)(\theta)t},$$

desto grösser, je länger das Pendel, je grösser die anfängliche Elongation, und je länger die Pendel-Bewegung fortgesetzt ist, und, wenn man

$$(\omega_1) = 0,7003, \quad (\theta) = 1^\circ 8' 26'', 2, \quad t = 2^h, 243$$

setzt, $= 0,39007$ Zeit-Secunden.

Noch unmerklicher ist die Störung der Gleichförmigkeit der Azimuthal-Bewegung überhaupt; diese findet sich nämlich, wenn man die zu Ende des § 30 gebrauchte Bedeutung von t' und ψ' beibehält,

§ 57.

Wir hoffen in den bisherigen Abhandlungen über die Pendel-Bewegung auf einige interessante Punkte aufmerksam gemacht zu haben, welche durch die Beobachtung geprüft und entschieden werden können.

Potsdam, den 12. October 1854.

W. Lehmann.

Schreiben des Herrn Professors *A. Secchi*, Directors der Sternwarte des Coll. Rom., an den Herausgeber.

Permettez moi de vous adresser quelques observations de la comète du 3, 4. Juin 1855. Le mauvais temps et la Lune

et après la Lune les brouillards du côté de la comète ont empêché de l'observer après — . Je vous envoie encore