SUL CARATTERE INVARIANTIVO DI ALCUNE ESPRESSIONI VETTORIALI.

Nota di **Alessandro Terracini** (Torino).

Adunanza del 10 marzo 1912.

Il prof. BOGGIO ¹⁾ ha recentemente stabilito i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — Se $F(x, y, z)$ è una funzione lineare dei vettori arbitrari x, y, z , ed inoltre è funzione alternata dei due ultimi argomenti, cioè:

$$F(x, y, z) = -F(x, z, y),$$

l'ente

$$(I) \quad F(i, j, k) + F(j, k, i) + F(k, i, j)$$

non varia comunque sia scelta la terna i, j, k unitaria-ortogonale-destro-gira-costante.

TEOREMA II. — Se $F(x, y, z)$ è una funzione lineare ed alternata dei vettori arbitrari x, y, z , l'ente

$$F(i, j, k)$$

non varia comunque sia scelta la terna i, j, k unitaria-ortogonale-destro-gira-costante.

In questa Nota io mi propongo di mostrare come le precedenti proposizioni siano suscettibili di un enunciato più generale, e di assegnare, per una funzione lineare $F(x, y, z)$ di tre vettori x, y, z , un sistema di condizioni necessarie e sufficienti affinché sia valida la tesi del citato Teorema I, rispondendo così ad una questione posta dal prof. BOGGIO ²⁾.

1. Sia $F(x, y, z)$ una funzione lineare di tre vettori x, y, z , e poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} x = x_1 i + x_2 j + x_3 k, \\ y = y_1 i + y_2 j + y_3 k, \\ z = z_1 i + z_2 j + z_3 k, \end{cases}$$

essendo i, j, k una terna di vettori unitaria-ortogonale-destro-gira. Sia poi x', y', z' una terna di vettori direttamente congruente alla terna x, y, z , cosicchè potremo porre

$$(3) \quad \begin{cases} x' = x_1 i' + x_2 j' + x_3 k', \\ y' = y_1 i' + y_2 j' + y_3 k', \\ z' = z_1 i' + z_2 j' + z_3 k', \end{cases}$$

¹⁾ BOGGIO, *Teoremi generali sul carattere invariantivo di espressioni vettoriali* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (2° semestre 1911), pp. 292-296].

²⁾ Loc. cit. ¹⁾, nota (4).

essendo i', j', k' una terna unitaria-ortogonale-destrogiro. Allora, se sviluppiamo la funzione lineare

$$(4) \quad F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y)$$

in modo da ottenere una combinazione lineare di funzioni di argomenti i , o j , o k , e analogamente procediamo per la

$$(5) \quad F(x', y', z') + F(y', z', x') + F(z', x', y'),$$

il risultato di questa seconda operazione sarà lo stesso della prima, in cui alle i, j, k si sostituiscano ordinatamente le i', j', k' .

Nel primo e nel secondo sviluppo compariranno rispettivamente

$$F(i, j, k) + F(j, k, i) + F(k, i, j)$$

e

$$F(i', j', k') + F(j', k', i') + F(k', i', j')$$

moltiplicate per uno stesso fattore numerico: e queste due espressioni risulteranno uguali, in virtù del Teorema I del prof. BOGGIO, se supponiamo che la F sia una combinazione lineare di funzioni lineari di tre vettori, alterne rispetto a due fra i tre argomenti. In quanto agli altri termini che compaiono nello sviluppo della (4), essi saranno, a meno di coefficienti numerici, del tipo

$$F(i, i, i)$$

oppure

$$F(i, i, j) + F(i, j, i) + F(j, i, i)$$

e perciò saranno nulli nella ipotesi fatta. Cose analoghe sussistono per l'espressione (5): dunque le espressioni (4) e (5) risultano uguali. Concludiamo perciò il seguente

TEOREMA I. — Se $F(x, y, z)$ è una funzione lineare dei tre vettori arbitrari x, y, z , ed è una combinazione lineare di funzioni lineari di x, y, z alternate rispetto a due fra i tre argomenti, la somma

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y)$$

non varia passando dalla terna x, y, z ad una terna qualsiasi di vettori ad essa direttamente congruente.

Da questo segue immediatamente il

TEOREMA II. — Se $F(x, y, z)$ è una funzione lineare dei vettori arbitrari x, y, z , ed è alterna rispetto a due qualunque fra i tre argomenti, la

$$F(x, y, z)$$

non varia passando dalla terna x, y, z ad una terna qualsiasi di vettori ad essa direttamente congruente.

Le due proposizioni ora stabilite si possono facilmente invertire. Per quello che riguarda la seconda osserviamo che, se, qualunque siano x, y, z , la funzione lineare $F(x, y, z)$ resta invariata passando dalla terna x, y, z a qualsiasi terna ad essa direttamente congruente, sarà

$$F(u, v, v) = F(-u, -v, -v) = -F(u, v, v) = 0,$$

dove u e v sono vettori qualunque. Quindi sarà anche

$$0 = F(x, y + z, y + z) = F(x, y, y) + F(x, z, z) + F(x, y, z) \\ + F(x, z, y) = F(x, y, z) + F(x, z, y).$$

Analogamente si conchiude

$$F(x, y, z) = -F(z, y, x) = -F(y, x, z).$$

Possiamo quindi raccogliere il Teorema II e il suo inverso sotto il seguente enunciato:

TEOREMA III. — *La più generale funzione lineare $F(x, y, z)$ di tre vettori arbitrari x, y, z , che sia invariante rispetto al gruppo dei movimenti ³⁾, è una funzione alternata di due qualunque dei tre argomenti.*

Ciò posto, si può anche invertire il Teorema I. Poniamo infatti

$$F(x, y, z) - F(x, z, y) = 3\Phi(x, y, z),$$

$$F(x, y, z) - F(z, y, x) = 3\Psi(x, y, z),$$

$$F(x, y, z) - F(y, x, z) = 3\Omega(x, y, z),$$

cosicchè Φ sarà funzione alternata di y, z ; Ψ di x, z ; Ω di x, y . Dalle uguaglianze poste risulta

$$F(x, y, z) = \Phi(x, y, z) + \Psi(x, y, z) + \Omega(x, y, z) \\ + \frac{1}{3} F[x, z, y] + F[z, y, x] + F[y, x, z].$$

Applicando poi l'ultima proposizione stabilita alla funzione lineare

$$F(x, z, y) + F(z, y, x) + F(y, x, z)$$

nell'ipotesi che essa resti inalterata passando dalla terna x, y, z a qualunque terna ad essa direttamente congruente, si vede che la F risulta espressa come una combinazione lineare di 4 funzioni lineari di x, y, z , di cui le prime tre sono alternate rispetto ad una coppia di argomenti, e l'ultima rispetto a ciascuna delle tre coppie di argomenti. Inglobando quest'ultima in una delle tre precedenti, il Teorema I risulta invertito. Racogliendo anche in questo caso il suo enunciato con quello dell'inverso concludiamo il

TEOREMA IV. — *La più generale funzione lineare $F(x, y, z)$ di tre vettori arbitrari x, y, z , tale che l'espressione*

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y)$$

sia invariante rispetto al gruppo dei movimenti, è una combinazione lineare di funzioni lineari di x, y, z alternate rispetto a due fra i tre argomenti.

2. Dimostrata l'invertibilità del nostro Teorema I, resta a vedere se un fatto ana-

³⁾ Poichè per un sistema di vettori una traslazione deve essere considerata come equivalente all'identità, sarebbe forse meglio, anzichè del gruppo dei movimenti, parlare del gruppo delle rotazioni vettoriali, ossia delle isomerie vettoriali ad invariante terzo $+1$ [cfr. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla Fisica-Matematica* (Torino, G. B. Petrini, 1909), pag. 27 e seg.].

logo si presenti pel Teorema I del prof. BOGGIO. Ora si possono trovare degli esempi di funzioni lineari $F(x, y, z)$ tali che l'espressione (1), anzi la stessa espressione $F(i, j, k)$, non dipende dalla particolare terna unitaria-ortogonale-destrogiro considerata i, j, k , mentre in generale l'espressione

$$F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y)$$

varia colla terna di vettori x, y, z , anche se questa resta sempre direttamente congruente a una terna fissa. Basta considerare per es. la funzione lineare

$$F(x, y, z) = (x \times y)z.$$

Allora

$$F(i, j, k) = 0, \quad F(i, i, i) = i, \quad F(j, j, j) = j, \quad F(k, k, k) = k.$$

In virtù del Teorema IV possiamo asserire che una tale funzione e quelle per cui si verifica un fatto analogo, *non* sono combinazioni lineari di funzioni lineari alternate rispetto a due fra i tre argomenti. Ci proponiamo quindi di risolvere il problema di determinare la più generale funzione lineare $F(x, y, z)$ dei vettori arbitrari x, y, z tale che l'espressione (1) non dipenda dalla particolare terna unitaria-ortogonale-destrogiro considerata i, j, k .

Sia F una tale funzione: in virtù delle ipotesi fatte, posto

$$F_0 = F(i, j, k) + F(j, k, i) + F(k, i, j)$$

e sostituendo in questa ad i, j i vettori, pure unitari ed ortogonali, $\frac{i-j}{\sqrt{2}}, \frac{i+j}{\sqrt{2}}$, verrà:

$$\begin{aligned} 2F_0 &= F(i-j, i+j, k) + F(i+j, k, i-j) + F(k, i-j, i+j) \\ &= 2F_0 + F(i, i, k) + F(i, k, i) + F(k, i, i) - F(j, j, k) - F(j, k, j) - F(k, j, j) \end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned} F(i, i, k) + F(i, k, i) + F(k, i, i) &= F(j, j, k) + F(j, k, j) + F(k, j, j), \\ F(j, j, i) + F(j, i, j) + F(i, j, j) &= F(k, k, i) + F(k, i, k) + F(i, k, k), \\ F(k, k, j) + F(k, j, k) + F(j, k, k) &= F(i, i, j) + F(i, j, i) + F(j, i, i). \end{aligned}$$

Se consideriamo un vettore l unitario, ortogonale ad i

$$l = \alpha j + \beta k, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

sarà

$$\begin{aligned} F(l, l, i) + F(l, i, l) + F(i, l, l) &= \alpha^2 [F(j, j, i) + F(j, i, j) + F(i, j, j)] \\ &+ \beta^2 [F(k, k, i) + F(k, i, k) + F(i, k, k)] = F(j, j, i) + F(j, i, j) + F(i, j, j). \end{aligned}$$

Dunque l'espressione

$$F(l, l, i) + F(l, i, l) + F(i, l, l),$$

dove l è un vettore unitario ortogonale ad i , non dipende da l , e perciò dipende soltanto da i .

Possiamo dunque porre

$$\begin{aligned} F(\mathbf{l}, \mathbf{l}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{l}, \mathbf{i}, \mathbf{l}) + F(\mathbf{i}, \mathbf{l}, \mathbf{l}) &= \mu(\mathbf{i}) \quad \text{dove} \quad \mathbf{l}^2 = 1, \quad \mathbf{l} \times \mathbf{i} = 0, \\ F(\mathbf{m}, \mathbf{m}, \mathbf{j}) + F(\mathbf{m}, \mathbf{j}, \mathbf{m}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{m}) &= \mu(\mathbf{j}) \quad \text{dove} \quad \mathbf{m}^2 = 1, \quad \mathbf{m} \times \mathbf{j} = 0, \\ F(\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{k}) + F(\mathbf{n}, \mathbf{k}, \mathbf{n}) + F(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{n}) &= \mu(\mathbf{k}) \quad \text{dove} \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{k} = 0, \end{aligned}$$

μ essendo una funzione lineare del suo argomento.

Nella prima di queste relazioni si scrivano rispettivamente $\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ in luogo di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{l}$. Allora risulta

$$\begin{aligned} F(\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}) + F(\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}) + F(\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ = 2^{\frac{3}{2}} \mu\left(\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}\right) = 2\mu(\mathbf{i}) + 2\mu(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Tenendo conto della linearità della F , il primo membro si sviluppa nell'espressione

$$\begin{aligned} 3F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}) + 3F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{j}) - [F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + F(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{i})] \\ - [F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + F(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{j})] = 3F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}) + 3F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{j}) - \mu(\mathbf{i}) - \mu(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Sarà dunque:

$$F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{j}) = \mu(\mathbf{i}) + \mu(\mathbf{j}),$$

ed analoghe; donde:

$$F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}) = \mu(\mathbf{i}), \quad F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{j}) = \mu(\mathbf{j}), \quad F(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}) = \mu(\mathbf{k}).$$

Vediamo dunque che si presenta come necessaria la seguente condizione: *qualunque siano i vettori unitarii ortogonali $\mathbf{i}$ e $\mathbf{l}$, si ha*

$$F(\mathbf{l}, \mathbf{l}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{l}, \mathbf{i}, \mathbf{l}) + F(\mathbf{i}, \mathbf{l}, \mathbf{l}) = F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}).$$

Dimostreremo ora che tale condizione è anche sufficiente. Supponiamo infatti che essa sia verificata: se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono due terne unitarie-ortogonali-destrogiere, tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}' &= b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \end{aligned}$$

si verifica facilmente che

$$F(\mathbf{i}', \mathbf{i}', \mathbf{i}') = a_1 F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}) + a_2 F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{j}) + a_3 F(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}) \dots$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}') + F(\mathbf{j}', \mathbf{k}', \mathbf{i}') + F(\mathbf{k}', \mathbf{i}', \mathbf{j}') \\ &= (3a_1 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_2 + a_1 b_3 c_3 + a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_3 + a_3 b_3 c_1) F(\mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{i}) \\ &+ (a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 + 3a_2 b_2 c_2 + a_2 b_3 c_3 + a_3 b_2 c_3 + a_3 b_3 c_2) F(\mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{j}) \\ &+ (a_1 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_1 + a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_1 + a_3 b_2 c_2 + 3a_3 b_3 c_3) F(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}) \\ &+ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [F(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j})] \\ &= (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) F(\mathbf{i}', \mathbf{i}', \mathbf{i}') + (c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3) F(\mathbf{j}', \mathbf{j}', \mathbf{j}') \\ &\quad + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) F(\mathbf{k}', \mathbf{k}', \mathbf{k}') \\ &+ F(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = F(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + F(\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}) + F(\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Concludiamo dunque che sussiste il seguente

TEOREMA V. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione lineare $F(x, y, z)$ di tre vettori arbitrari x, y, z sia tale che l'espressione*

$$F(i, j, k) + F(j, k, i) + F(k, i, j)$$

non varii comunque sia scelta la terna i, j, k unitaria-ortogonale-destrogiro, è che, se i e l sono due qualsiansi vettori unitarii ortogonali, sussista la relazione ⁴⁾

$$F(i, i, i) = F(l, l, i) + F(l, i, l) + F(i, l, l).$$

Torino, 4 Gennaio 1912.

ALESSANDRO TERRACINI.

---

⁴⁾ In virtù della dimostrazione sopra esposta si può aggiungere che basta di saper verificata tale relazione nel caso che i e l vengano successivamente a coincidere con due qualunque fra i tre vettori di una particolare terna unitaria ortogonale, in tutti i modi possibili.