ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Band 143.

Nº 3420-21.

12-13.

Bestimmung der mittleren Bewegungen des Leitstrahls, der Ap sidenlinie und der Knotenlinie.

Von Aug. Weiler.

1.

Ich nehme an, der innere Planet sei der gestörte. Der Parameter der gestörten Ellipse ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v).$$

Die Veränderlichen k und h ergeben sich aus den Störungsgleichungen:

$$-m p_0^2 k' = \frac{r}{p} \sin v \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) \quad (2)$$

$$m p_0^2 h' = \frac{r}{p} \cos v \left(f \frac{p_0}{r} + q + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right) \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen ist die Veränderliche q mittelst des Integrals der lebendigen Kraft zu eliminiren. Das Integral der lebendigen Kraft ist in Nr. 2291 S. 173 aufgestellt, und es sind an dieser Form einige der in Nr. 2510 unter 2. erwähnten Transformationen anzubringen. Auf Grund der Gleichungen:

$$q = m \left(r'^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{2 \kappa}{(1+m)^2} \frac{1}{r} + p_0^2 (1 - e^2) \right)$$

$$-m p_0^2 k' = \frac{r^3}{p^3} \sin v \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) v'$$

$$m p_0^2 h' = \frac{r^3}{p^3} \cos v \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) v'.$$

Damit die Integration zu einem brauchbaren Resultat führe, muss man den Ausdruck:

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickeln, alsdann die überzähligen Integrationsbeständigen so bestimmen, dass in dieser Entwicklung sowohl die beständigen als auch diejenigen Glieder verschwinden, welche die Form $C e \cos v$ haben. Die Frage, ob diese Forderungen unerlässlich sind, wird unter 2. eingehend erörtert.

Wird die Beständige q_{01} so gewählt, dass aus dem Werthe von $q_1 - q_{01}$ die beständigen Glieder wegfallen, so giebt es in dem Producte

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} (q_1 - q_{01})$$

$$q_1 = m_0 \left(r_1'^2 + \frac{n_1^2}{r_1^2} - \frac{2 \kappa m_1}{m_0 r_1} + \lambda^2 p_{01}^2 (1 - e_1^2) \right)$$

kann das Integral der lebendigen Kraft in der folgenden Form geschrieben werden:

$$q - q_0 + q_1 - q_{01} = 2 \Omega.$$

Es sind q_0 und q_{01} ebenso wie f als überzählige Integrationsbeständige zu betrachten, zur Bestimmung von q_1 aber hat man die Störungsgleichung:

$$\frac{1}{2} q_1' = \frac{d\Omega}{dv_1} v_1' = \lambda \frac{p_1^2 r^2}{r_1^2 p^2} \frac{d\Omega}{dv_1} v'.$$

Diese Aufzeichnungen sind dem Aufsatz in Nr. 2908-09 unter 2. und 4. entnommen.

Nachdem man die Veränderliche q aus den Störungsgleichungen (2) und (3) eliminirt hat, werden vorläufig nur die Glieder der ersten Ordnung in Betracht gezogen, und demgemäss

$$\frac{p_0}{r} = \frac{p}{r},$$

$P = 0$ gesetzt. Die Störungsgleichungen gehen über in:

weder beständige, noch auch solche Glieder, welche die Form $C e \cos v$ haben. Es folgt das aus den in Nr. 3032 unter 2. nachgewiesenen Eigenschaften der Veränderlichen q_1 . Man kann daher, wenn es sich um die Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 handelt, den obigen nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 zu entwickelnden Ausdruck durch den einfacheren:

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} \left(f \frac{p}{r} + q_0 + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

ersetzen.

Die Entwicklung dieser Grösse führt zu zwei Gleichungen, indem man die Summe aller beständigen Glieder, und die Summe aller derjenigen Glieder gleich Null setzt, welche die Form $C e \cos v$ haben. Es versteht sich, dass die aus diesen Gleichungen hergeleiteten Werthe von f und von q_0 ebenso wie die Störungsfunktion mit dem Producte

der Massen m m_1 multiplicirt sind. Ferner sind diese Werthe Functionen von e^2 und von e_1^2 . Es wäre nicht ausreichend, nur die von e^2 und e_1^2 unabhängigen Glieder dieser Werthe zu berücksichtigen. In den Werthen der mittleren Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse, und der mittleren Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn sind die Grössen f und q_0 mit der wahren Anomalie v multiplicirt. Für jenen langen Zeitraum, welcher in der vorgesehenen Lösung der Störungsaufgabe maassgebend ist, wird angenommen, dass das Product $m_1 v$ nicht grösser sei

als ein Glied des ersten Grades. Die mit der ersten Potenz von e^2 oder von e_1^2 multiplicirten Glieder der Werthe von f und von q_0 führen daher in den Werthen der mittleren Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse, und der mittleren Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn zu Gliedern, welche als solche des dritten Grades zu betrachten sind. Es sollen aber alle diejenigen Störungen Berücksichtigung finden, deren Grad niedriger ist als der fünfte. Der Forderung entsprechend schreibe ich die Entwicklung der Factoren von f und von q_0 in der folgenden Form:

$$\frac{r_1^2 r^2}{p_1^2 p^2} = \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \left(1 - 2 e \cos v\right)$$

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} = \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{5}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} e^2 - 3 e \cos v\right)$$

Ich habe die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 in Nr. 3032 unter 3. für den Fall $\mathcal{F} = 0$ bestimmt. Es kommt nun auch der Winkel $\mathcal{F}$ in Betracht, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden. In dieser Ausdehnung habe ich die Entwicklung der Störungfunction nach den Cosinus der Vielfachen von u und u_1 in Nr. 3362

unter 2. und 4. aufgestellt. Da in derselben hier nur die beständigen und diejenigen Glieder in Betracht kommen, welche die Form $C e \cos v$ haben, so fallen die von den Veränderlichen $x = u - u_1$ und $y = u + u_1$ abhängigen Glieder weg. Die Störungfunction ist dann:

$$\Omega = \frac{\kappa m m_1}{r_1} \left(\sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{r^{2i}}{r_1^{2i}} - \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{r^{2i+n}}{r_1^{2i+n}} \right),$$

wo $\alpha = 1 - \beta$ und $\beta = \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ ist. Der erste Theil dieses Ausdrucks enthält die dem Falle $n = 0$ entsprechenden Glieder, in dem zweiten Theil sind anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$ zu setzen. Ich setze ferner $p = p_0$ und schreibe die Störungfunction in der Form:

$$\Omega : \kappa m m_1 = \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i} - \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n+1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} \left(2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} (2i+2) \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3}$$

$$- \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n+2) \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+3}.$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist schon in Nr. 3032 unter 3. nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelt worden. Es ist zu diesem Behuf gesetzt worden:

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} = 1 + \left(i - \frac{1}{2}\right) (i-1) e_1^2$$

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{2i+3} = 1 + \left(i + \frac{3}{2}\right) (i+2) e^2 - \left(i + \frac{3}{2}\right) \left[2 + \left(i+2\right) \left(i + \frac{5}{2}\right) e^2 \right] e \cos v.$$

Die Entwicklung des zweiten Theils betreffend ist zu bemerken, dass derselbe den Factor $\beta = \sin^2 \frac{1}{2} \mathcal{F}$ hat, welcher eine Grösse des zweiten Grades ist. Es ist gestattet, in der Entwicklung des zweiten Theils die mit e^2 oder mit e_1^2 multiplicirten Glieder fortzulassen. Denn diese Glieder würden sich, nachdem sie den Factor v erhalten haben, als solche des fünften Grades darstellen, welche vernach-

lässigt werden sollen. In dem zweiten Theil setze ich demgemäss:

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+3} = 1 - (2i+n+3) e \cos v.$$

Es besteht nun zur Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 = & f\left(1 + \frac{3}{2}e_1^2\right)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)\left(1 - 2e \cos v\right) + q_0\left(1 + \frac{3}{2}e_1^2\right)\left(1 + \frac{5}{2}e^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^2 - 3e \cos v\right) \\
& + \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} (2i+2) \left[1 + \left(i - \frac{1}{2}\right)(i-1)e_1^2\right] \\
& \quad \cdot \left\{1 + \left(i + \frac{3}{2}\right)(i+2)e^2 - \left(i + \frac{3}{2}\right)\left[2 + (i+2)\left(i + \frac{5}{2}\right)e^2\right]e \cos v\right\} \\
& - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n+2) [1 - (2i+n+3)e \cos v].
\end{aligned}$$

Setzt man hier $e \cos v = 1/2$, so findet man:

$$\begin{aligned}
- q_0 \left(1 + \frac{3}{2}e_1^2\right) \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) = & - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n+1)(2i+n+2) \\
& + \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} (2i+1)(2i+2) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{2}e_1^2\right) \left(1 + \frac{(i+2)(2i+3)}{4}e^2\right).
\end{aligned}$$

Setzt man aber $e \cos v = 1/3 + 1/6 e^2$, so findet man:

$$\begin{aligned}
f\left(1 + \frac{3}{2}e_1^2\right) \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) = & \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} 2i(2i+2) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{2}e_1^2\right) \left(1 + \frac{(2i+3)^2}{8}e^2\right) \\
& - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} (2i+n)(2i+n+2).
\end{aligned}$$

In diesen Werthen von f und von q_0 sind anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$ zu setzen, wo hingegen anstatt i die sämmtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$ einzusetzen sind.

2.

Wenn die Lösung des Störungsproblems für den unbegrenzten Zeitraum gelten soll, so dürfen nur diejenigen Elemente der Störung, welche in den Coordinatenwerthen des gestörten Planeten ausschliesslich als Argumente von Sinus oder von Cosinus vorkommen, ein der Zeit proportionales Glied enthalten. Die Werthe der übrigen Elemente der Störung müssen als periodische Functionen der Zeit gegeben sein. Es müssen also der Parameter p und die Neigung $\mathcal{F}$ der Bahnen zu einander periodische Functionen der Zeit sein. Dagegen sind die der Zeit proportionalen Glieder zugelassen in den Werthen des Perihels ϖ und des Knotens ϑ .

Die Störungsglieder der ersten Ordnung in den Werthen der Derivirten q_1' und h' sind sämmtlich Sinus-Glieder, in den Werthen der Derivirten h' und ϖ' sämmtlich Cosinus-Glieder, und die Argumente der Sinus und der Cosinus

sind als lineare Functionen der vier Veränderlichen u, u_1, v, v_1 dargestellt von solcher Art, dass die Coefficienten dieser Veränderlichen positive oder negative ganze Zahlen sind. Aus dieser Eigenschaft der genannten Derivirten folgt, dass es unter den Störungsgliedern der ersten Ordnung in den Derivirten q_1' und h' keine beständigen Glieder giebt, dass beständige Glieder nur in den Derivirten h' und ϖ' vorhanden sind. Ich habe das in Nr. 2909 unter ϑ , bewiesen. Es folgt weiter, dass die Störungen der ersten Ordnung von q_1 und von h frei sind von den der Zeit proportionalen Gliedern, dass aber derartige Glieder vorhanden sind unter den Störungen der ersten Ordnung von h und von ϖ .

Bleiben die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 unbestimmt, so sind in dem Werthe des Parameters, zu dessen Bestimmung die Gleichung

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v)$$

vorliegt, Störungen unvermeidlich, welche mit der Zeit, oder dem entsprechend mit der wahren Anomalie v multiplicirt sind. Um die Störungsgleichungen

$$- m p_0^2 k' = \frac{r^3}{p^3} \sin v \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \mathcal{Q} + r \frac{d\mathcal{Q}}{dr} \right) v', \quad (2)$$

$$m p_0^2 h' = \frac{r^3}{p^3} \cos v \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \mathcal{Q} + r \frac{d\mathcal{Q}}{dr} \right) v', \quad (3)$$

aus welchen sich die Veränderlichen k und h bestimmen, integriren zu können, muss man den Ausdruck:

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \mathcal{Q} + r \frac{d\mathcal{Q}}{dr} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickeln. Diese Entwicklung enthält Glieder von der Form $Ce \cos v$. Es ergeben sich hiermit beständige Glieder in dem Werthe der Derivirten h' , ferner die hieraus folgenden mit v multiplicirten Glieder in dem Werthe der Veränderlichen h . Diese Glieder von h sind aber nicht zulässig, weil der Parameter eine periodische Function von v und v_1 sein soll. Es ist unumgänglich, die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 so zu bestimmen, dass in der erwähnten Entwicklung alle Glieder von der Form $Ce \cos v$ verschwinden.

Dass es in den Werthen der Derivirten q_1' und k' auch unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung keine beständigen Glieder gebe, ist, wie ich in Nr. 2909 unter 9. gezeigt habe, von der Wahl der überzähligen Integrationsbeständigen h_0 abhängig. Man erhält die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man in die Werthe der Derivirten q_1' und k' an die Stelle der Elemente p und ϖ die Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen einsetzt. Diese Störungen der ersten Ordnung des Parameters und des Perihels sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v)$$

$$\varpi + \left(1 + \frac{p}{r}\right) (k \sin v - h \cos v) - h e = \omega,$$

vgl. Nr. 3053 unter 7. Die Forderung, dass es unter den Störungsgliedern der zweiten Ordnung von q_1' und k' keine beständigen Glieder gebe, kann sich nur dann erfüllen, wenn die Integrationsbeständige $h_0 = 0$ gesetzt wird. Nur in diesem Falle gestalten sich die Störungen der ersten Ordnung von p ausnahmslos als Cosinus-Glieder, und die Störungen der ersten Ordnung von ϖ als Sinus-Glieder von solcher Art, dass die Argumente der Cosinus und der Sinus durch die oben erwähnten linearen Functionen der vier Veränderlichen u, u_1, v, v_1 dargestellt sind. Wenn die Störungen der ersten Ordnung von p und von ϖ diese Eigenschaft besitzen, so sind die sämtlichen Störungsglieder der zweiten Ordnung von q_1' und k' als Sinus-Glieder gegeben, in welchen das Argument des Sinus die erwähnte lineare Function der vier Veränderlichen u, u_1, v, v_1 darstellt, daher beständige Glieder unter diesen Störungsgliedern nicht vorhanden sind.

Die überzählige Integrationsbeständige k_0 hat keinen Einfluss auf das Vorhandensein von der Zeit proportionalen Gliedern in den Werthen der gestörten Elemente. Es ist aber noch eine andere Rücksicht maassgebend bei der Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen k_0 und h_0 . Es ist bekanntlich p_0 eine Integrationsbeständige, und der Parameter p der gestörten Ellipse, deren Gleichung in der Form:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

zu schreiben ist, soll die Eigenschaft haben, dass er in diese Integrationsbeständige p_0 übergeht, sobald die störende Masse $m_1 = 0$ gesetzt wird. In Nr. 3032 unter 5. habe ich gezeigt, wie die überzähligen Integrationsbeständigen k_0

und h_0 bestimmt werden müssen, damit dieser Forderung Rechnung getragen werde. Es müssen nämlich die Veränderlichen k und h verschwinden, sobald in deren Werthen die störende Masse gleich Null gesetzt wird. Denn es geht dann die Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v),$$

wie verlangt ist, über in $p = p_0$. Die periodischen Störungen von k und von h haben den Factor m_1 , und verschwinden, wenn $m_1 = 0$ ist. Dass auch die säcularen Störungen von k und von h verschwinden, wenn $m_1 = 0$ gesetzt wird, kann nur durch die geeignete Bestimmung von h_0 und k_0 bewirkt werden. Die säcularen Störungen von k und von h haben die Form:

$$C e_1 \cos(A + B v), \quad - C e_1 \sin(A + B v),$$

wo C, A, B beständige Grössen sind, von welchen nur die zuletzt genannte den Factor m_1 hat, vgl. Nr. 3053 S. 91. Demzufolge ergeben sich die Werthe von k_0 und von h_0 als Functionen von A . Es ist nämlich

$$k_0 = -C e_1 \cos A, \quad h_0 = C e_1 \sin A.$$

Da aber das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen $h_0 = 0$ und $h_0 = C e_1 \sin A$ nur für den Fall $\sin A = 0$ erreicht wird, so ist in der für den unbegrenzten Zeitraum gültigen Lösung der Anfang der Bewegung an einen jener Zeitpunkte gebunden, in welchen der Winkel A gleich Null ist.

Für den Fall, dass die Lösung der Störungsaufgabe nur für einen begrenzten Zeitraum gelten soll, so dass das Product $B v$ einen kleinen Bruchwerth darstellt, ist es gestattet, die Forderung $h_0 = 0$ fallen zu lassen, weil dann die der Zeit proportionalen Glieder unter den Störungen der zweiten Ordnung der Convergenz der Integrale nicht Abbruch thun. Mit der Gleichung $h_0 = 0$ fällt auch die Forderung weg, dass am Anfang der Bewegung $A = 0$ sei. Denn man kann hier für jeden beliebigen Werth von A die überzähligen Integrationsbeständigen k_0 und h_0 so einrichten, dass die Gleichungen $k = 0$ und $h = 0$ bestehen, sobald die störende Masse m_1 gleich Null gesetzt wird.

Die Veränderlichen k und h haben säculare Störungen der ersten Ordnung von der Form:

$$k = C e_1 \cos(A + B v), \quad h = -C e_1 \sin(A + B v),$$

wo C, A, B beständige Grössen sind, von welchen die zuletzt genannte mit der störenden Masse m_1 multiplicirt ist. Werden diese säcularen Störungen in die Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v)$$

eingesetzt, so geht dieselbe über in:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} C e_1 \cos(A + B v + v).$$

Um nun in den Störungsgleichungen (2) und (3) auch die Glieder der zweiten Ordnung in Betracht zu ziehen, schreibe ich diese Störungsgleichungen in der Form:

$$-k' = \sin v Q v', \quad h' = \cos v Q v',$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$m p_0^2 Q = \frac{r^3}{p^3} \left(f \frac{p_0}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} + P \right).$$

Den obigen Werth von p : p_0 setze ich in die Störungsgleichungen (2) und (3) ein, und gelange durch deren Integration zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h . Von diesen säcularen Störungen der zweiten Ordnung haben diejenigen, welche aus den mit f multiplicirten Störungsgliedern, oder aus den dem Falle $n = 0$ entsprechenden Gliedern der Störungsfuction hervorgehen, die gleiche Grössenklasse wie die oben genannten säcularen Störungen der ersten Ordnung. Offenbar sind diese säcularen Störungen der zweiten Ordnung in den Werthen von

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} \left(2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} \frac{p^{2i}}{p_0^{2i}} (2i+2) \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i-1} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+3}.$$

Durch Potenziren des obigen Werthes von p : p_0 entsteht:

$$\frac{p^{2i}}{p_0^{2i}} = 1 + 2i \frac{p}{r} C e_1 \cos(A + Bv + v) + \dots$$

Indem ich von dem nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 entwickelten Ausdruck

$$\left(-f + \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} 2i(2i+2) \right) \frac{p}{r} C e_1 \cos(A + Bv + v).$$

Dieser Ausdruck führt zu den erwähnten säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h . Nun ist aber, wenn man in dem unter 1. erhaltenen Werth von f die mit einem der Factoren $e^2 e_1^2 \beta$ multiplicirten Glieder fortlässt,

$$f = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} 2i(2i+2).$$

Man sieht nun, dass diejenigen Glieder des zu entwickelnden Ausdrucks, in welchen die Grösse

$$\frac{p}{r} C e_1 \cos(A + Bv + v)$$

mit einer Beständigen multiplicirt ist, wegfallen. Auch diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h , welche der gleichen Grössenklasse angehören, wie die säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen, verschwinden, sobald man anstatt der überzähligen Integrationsbeständigen f den unter 1. erhaltenen Werth in die Störungsgleichungen (2) und (3) einsetzt. Ich habe das schon in Nr. 2909 unter 17. bewiesen.

Man gelangt auf einem anderen Wege zu noch weiteren säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h , welche der gleichen Grössenklasse angehören, wie die säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen. In dem Vorausgehenden habe ich in den Störungsgleichungen (2) und (3) die Grösse P nicht in Betracht gezogen. Die weiter zu berücksichtigenden säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(k \cos v + h \sin v)^2 = \gamma^2 + 2 \gamma C e_1 \cos(A + Bv + v) + C^2 e_1^2 \cos^2(A + Bv + v).$$

k und von h unzulässig. Dieselben führen ihrerseits zu säcularen Störungen der dritten Ordnung von der gleichen Grössenklasse, und die Integration der Störungsgleichungen (2) und (3) führt zu unendlichen Reihen säcularer Störungen, welche keine Convergenz haben.

Für den Fall $n = 0$ ist die Störungsfuction:

$$\Omega = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} \frac{p^{2i}}{p_0^{2i}} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+1} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i}.$$

Daher ist:

$$m p_0^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q$$

nur diejenigen Glieder behalte, in welchen die Grösse

$$\frac{p}{r} C e_1 \cos(A + Bv + v)$$

mit einem beständigen Factor verbunden ist, führe ich denselben über in:

$$-m p_0^2 k' = \sin v \frac{r^3}{p^3} P v',$$

$$m p_0^2 h' = \cos v \frac{r^3}{p^3} P v',$$

vgl. Nr. 3053 S. 94. Indem ich diejenigen Glieder von P , deren Ordnung höher ist als die zweite, vernachlässige, gebe ich diesen Gleichungen die Form:

$$-k' = \frac{3}{2} \sin v (k \cos v + h \sin v)^2 v'$$

$$h' = \frac{3}{2} \cos v (k \cos v + h \sin v)^2 v'.$$

Ich nehme an, es sei in der Entwicklung des Ausdrucks:

$$\frac{r_1^2 r^3}{p_1^2 p^3} \left(f \frac{p}{r} + q_0 - q_1 + q_{01} + 2 \Omega + r \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

ein Glied γ vorhanden, welches sich als eine beständige Grösse darstellt. Unter den Störungen der ersten Ordnung von k und von h finden sich dann die Glieder:

$$k = \gamma \cos v + C e_1 \cos(A + Bv)$$

$$h = \gamma \sin v - C e_1 \sin(A + Bv),$$

von welchen die letzteren die schon oben erwähnten säcularen Störungen der ersten Ordnung von k und von h sind. Man gelangt nun zu den folgenden Werthen:

$$k \cos v + h \sin v = \gamma + C e_1 \cos(A + Bv + v)$$

Wird der letztere Werth in die vorliegenden Störungsgleichungen eingesetzt, so führt das zweite Glied desselben zu säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h , welche einerlei Grössenklasse haben mit den säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen. Die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 sind unter 1. so bestimmt worden, dass in der oben erwähnten Entwicklung die beständigen Glieder verschwinden, dass also $\gamma = 0$ ist. Es verschwinden daher die hier angezeigten säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h . Wie auch diese säcularen Störungen der zweiten Ordnung zum Verschwinden gebracht werden, habe ich schon in Nr. 2909 S. 95, etwas weniger eingehend als hier, gezeigt.

Das Problem der drei Körper in seiner allgemeinen Bedeutung hat keine Lösung, welche in einem bestimmten analytischen Ausdruck enthalten ist. Man muss sich denken, dass die Bahn, welche irgend einer der drei Massenpunkte beschreibt, zu verschiedenen analytischen Ausdrücken führe, je nach den numerischen Verhältnissen der Anfangsbewegungen und der Massen der drei Körper. Man muss ferner annehmen, dass während der Bewegung des Massenpunktes Zeitpunkte eintreten, an welchen der analytische Ausdruck der Bewegungserscheinung aufhört convergent zu sein; dass dann ein anderer analytischer Ausdruck an dessen Stelle tritt. Auch ist die Anzahl der Zeitpunkte, an welchen ein Wechsel in dem analytischen Ausdruck der Bewegung eintritt, keinerlei Beschränkung unterworfen. In der Störungstheorie ist diese Schwierigkeit des allgemeinen Problems der drei Körper nicht vorhanden. In der Störungstheorie sind die Bewegungsverhältnisse der drei Körper in solcher Art eingeschränkt, dass es in der That einen bestimmten analytischen Ausdruck der Bewegung giebt, welcher in ein und derselben Form für den unbegrenzten Zeitraum fort-

besteht. Es lässt sich von vornherein einsehen, dass die Annahme einer gestörten Ellipse eine Einrichtung der Bahn ermöglicht, bei welcher in dem unbegrenzten Zeitraum ein Wechsel des analytischen Ausdrucks der Bewegung nicht eintritt. Die Möglichkeit einer solchen Einrichtung ist verbürgt durch die Realität der Bewegungserscheinungen in dem Planetensystem. In allen Fällen ist die wirkliche Bahn des Planeten nur wenig abweichend von der Kepler'schen Ellipse. Die genaue Bestimmung der Bahn wird erreicht durch die unter 1. und unter 2. gegebenen Vorschriften.

3.

Die überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 sind unter 1. bestimmt worden. Ich werde jetzt zeigen, dass sich die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse und die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn als Functionen dieser Integrationsbeständigen darstellen.

Ich bestimme die wahre Anomalie v als Function der Zeit durch die Gleichung:

$$\frac{dv}{dt} = l \frac{p^2}{r^2} = l (1 + e \cos v)^2,$$

wo l und e beständige Grössen sind. Zur Vereinfachung der analytischen Rechnung habe ich die wahre Zeit t_1 durch eine reducirte Zeit t ersetzt, indem ich $l t_1 = t$ schreibe. Die obige Gleichung geht dann über in die einfachere

$$\frac{dv}{dt} = v' = \frac{p^2}{r^2} = (1 + e \cos v)^2.$$

Integrirt man die ursprüngliche Gleichung, so erhält man bekanntlich

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = l (1 - e^2)^{3/2} (t_1 - t_{01}),$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt, dass $l(1 - e^2)^{3/2}$ die mittlere Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse ist. Ferner habe ich zur Bestimmung des Coefficienten l in Nr. 2620 § 1 die folgende Gleichung hergeleitet:

$$\frac{x}{p_0^3 (1 + m)^2} = 1 + \frac{f}{m p_0^2},$$

wo $x = K : l^2$ und K eine bekannte Beständige ist.

$$\begin{aligned} f \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) &= x m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} 2 i (2 i + 2) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{(2i+3)^2}{8} e^2 \right) \\ &- x m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} (2 i + n) (2 i + n + 2). \end{aligned}$$

Ich setze in derselben an die Stelle des Parameters p_0 die grosse Axe der Ellipse, setze also $p_0 = a_0 (1 - e^2)$. Man kann nachweisen, dass der so transformirte Werth von f genauer ist als vorher, für den Fall dass auch die mit e^4 multiplicirten Glieder noch merklich sind. In dem Werthe von

$$\frac{f K (1 - 3 e^2)}{x m p_0^2}$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1 - e^2)^3 l^2$, so giebt dieselbe das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit des gestörten Planeten in der Ellipse:

$$(1 - e^2)^3 l^2 = \frac{K}{a_0^3 (1 + m)^2} - \frac{f K (1 - 3 e^2)}{x m p_0^2}.$$

Unter 1. ist die folgende Gleichung aufgestellt worden:

ergeben sich nun, die Coefficienten von e_1^2 und von e^2 betreffend, die folgenden Transformationen:

$$\begin{aligned} (i-1)(i-1/2) - 3/2 &= (i-2)(i+1/2) \\ (i+3/2)^2 - 4i - 3 &= (i-3/2)(i+1/2), \end{aligned}$$

und man hat die Gleichung:

$$\frac{f K (1 - 3 e^2)}{x m p_0^2} = \frac{K m_1}{p_1^3} F,$$

in dem man sich der folgenden Abkürzung bedient:

$$F = \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a_0^{2i-2}}{p_1^{2i-2}} 2i(2i+2) \left(1 + \frac{(i-2)(2i+1)}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{(2i-3)(2i+1)}{8} e^2\right) \\ - \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a_0^{2i+n-2}}{p_1^{2i+n-2}} (2i+n)(2i+n+2),$$

wo anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$ zu setzen sind, anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$. Das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse ist nun gegeben durch die Gleichung:

$$(1 - e^2)^3 l^2 = \frac{K}{a_0^3 (1+m)^2} - \frac{K m_1}{p_1^3} F.$$

Um die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn zu bestimmen, muss man von der Störungsgleichung:

$$-m p_0^2 (\omega' + \cos i \vartheta') = f \frac{p_0}{r} + \frac{3}{2} q + 2r \frac{d\Omega}{dr} + P + N \quad (4)$$

ausgehen, vgl. Nr. 2908 S. 55, aus welcher die Veränderliche q mittelst der Integrals der lebendigen Kraft zu eliminieren ist. Zum Behuf der Integration ist der Ausdruck:

$$\frac{r_1^2 r^2}{p_1^2 p^2} \left(f \frac{p_0}{r} + \frac{3}{2} (q_0 - q_1 + q_{01}) + 3\Omega + 2r \frac{d\Omega}{dr} + P + N \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 zu entwickeln. Es sollen hier nur diejenigen Glieder der mittleren Bewegung bestimmt werden, welche für den unbegrenzten Zeitraum der Zeit proportional sind. Andere Glieder der mittleren Bewegung, welche nicht hierher gehören, werde ich unter 4. bestimmen. Es werden hier also diejenigen Glieder der Entwicklung integriert, welche sich als beständige Größen darstellen. Es ist bekannt, dass das Product

$$\frac{r_1^2 r^2}{p_1^2 p^2} (q_1 - q_{01})$$

frei ist von beständigen Gliedern. Auch die Störungsglieder der zweiten Ordnung kommen nicht in Betracht. Es handelt sich also um die Entwicklung des einfacheren Ausdrucks:

$$\frac{r_1^2 r^2}{p_1^2 p^2} \left(f \frac{p}{r} + \frac{3}{2} q_0 + 3\Omega + 2r \frac{d\Omega}{dr} \right).$$

Man schreibe die Factoren von f und von q_0 in der folgenden Form:

$$\frac{r_1^2 r}{p_1^2 p} = \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) \\ \frac{r_1^2 r^2}{p_1^2 p^2} = \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right).$$

In der Entwicklung der Störungsfunktion bleiben nur solche Glieder stehen, welche dem Falle $n = 0$ entsprechen. Man erhält zunächst die Gleichung:

$$\frac{r_1^2 r^2}{p_1^2 p^2} \left(3\Omega + 2r \frac{d\Omega}{dr} \right) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} (4i+3) \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+2} \\ - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} (4i+2n+3) \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+2}$$

Werden in diesem Ausdruck nur die beständigen Glieder berücksichtigt, so kann man schreiben:

$$\left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+2} = \left[1 + \left(i - \frac{1}{2}\right) (i-1) e_1^2\right] \left[1 + (i+1) \left(i + \frac{3}{2}\right) e^2\right] \\ \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+2} = 1.$$

Indem man die vorliegende Entwicklung und zugleich die unter 1. gegebenen Werthe von

$$f(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{1}{2} e^2), \quad q_0(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{3}{2} e^2)$$

in den zu entwickelnden Ausdruck einsetzt, wird derselbe übergeführt in:

$$- \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i}}{p_1^{2i+1}} i(2i+1) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{(i+1)(2i+3)}{4} e^2\right) \\ + \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n}}{p_1^{2i+n+1}} \left(i + \frac{n}{2}\right) (2i+n+1).$$

Es ist oben die folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{x}{(1+m)^2} = p_0^3 + \frac{f p_0}{m}$$

Die Störungsglieder haben den Factor $x m_1$. Es versteht sich, dass man sich hier zur Elimination von x der einfacheren Gleichung $x = p_0^3$ zu bedienen hat. Die Störungsgleichung (4) ist dann:

$$\begin{aligned} \omega' + \cos i \vartheta' &= m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} i(2i+1) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{(i+1)(2i+3)}{4} e^2 \right) \frac{p_1^2}{r_1^2} v' \\ &\quad - m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} \left(i + \frac{n}{2} \right) (2i+n+1) \frac{p_1^2}{r_1^2} v'. \end{aligned}$$

Ich setze nun $p_0 = a_0(1-e^2)$. Durch die Integration der vorliegenden Gleichung wird der Factor $p_1^2 : r_1^2$ übergeführt in $(1-e_1^2)^{3/2}$, vgl. Nr. 3012 S. 117. Man erhält:

$$\omega + \cos i \vartheta = B v.$$

Zur Bestimmung von B hat man daher die Gleichung:

$$\begin{aligned} B &= m_1 \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \right) \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} i(2i+1) \left(1 + \frac{(i-2)(2i+1)}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{4} e^2 \right) \\ &\quad - m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a_0^{2i+n+1}}{p_1^{2i+n+1}} \left(i + \frac{n}{2} \right) (2i+n+1), \end{aligned}$$

wo anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$, anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$ zu setzen sind.

4.

In dem Folgenden werden nun einige Bedenken gegen die unter 1. gegebenen Vorschriften und Ausführungen, welche Berechtigung zu haben scheinen, widerlegt. Durch die Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 müssen aus der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 die beständigen Glieder fortgeschafft werden, damit diejenigen säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h wegfallen, welche einerlei Grössenklasse haben mit den säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen. Streng genommen erstreckt sich diese Forderung nur auf diejenigen beständigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$,

welche frei sind von den Factoren $e^2 e_1^2 \beta$. Denn wenn die mit diesen Factoren verbundenen beständigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nicht weggebracht werden, so stehen die an deren Vorhandensein geknüpften säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h der

$0 = f(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{3}{2} e^2)(1 - 2e \cos v) + q_0(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{3}{2} e^2)(1 + \frac{1}{2} e^2 - 3e \cos v) + \gamma + 2\delta \cos v$
wo γ und δ gegebene beständige Grössen sind. Setzt man hier $2e \cos v = 1$, so erhält man:

$$q_0(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{3}{2} e^2) = 2(\gamma + \delta).$$

Setzt man $3e \cos v = 1 + \frac{1}{2} e^2$ in die vorliegende Gleichung ein, so erhält man:

$$-f(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{1}{2} e^2) = 3\gamma + \delta(2 + e^2).$$

In dem Werthe von B ergeben sich die folgenden Coefficienten von e_1^2 und von e^2 :

$$\begin{aligned} (i-1)(i-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2} &= (i-2)(i+\frac{1}{2}) \\ \frac{(i+1)(2i+3)}{4} - (2i+1) &= \frac{(i-1)(2i-1)}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Convergenz der Integrale nicht im Wege, weil sie sich als kleine Bruchtheile der säcularen Störungen erster Ordnung dieser Veränderlichen darstellen. Mit dieser Bemerkung ist auf eine Unbestimmtheit in den Werthen der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 hingewiesen, welche ihren Grund darin hat, dass es in das Belieben gestellt ist, ob man bei der Bestimmung von f und q_0 diejenigen Glieder der

Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$, welche mit einem der Factoren $e^2 e_1^2 \beta$ verbunden sind, fortbringt oder nicht fortbringt. Es ist die zu erstrebende Einheitlichkeit der Analysis, welche doch verlangt, dass man auch diejenigen beständigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ fortbringe, welche mit den erwähnten Factoren verbunden sind. Die Analysis würde an ihrer Einfachheit Einbusse erleiden, wollte man in der Behandlung der beständigen Glieder der Entwicklung ~~die in Rede stehende Unterscheidung machen.~~

Auf die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn überträgt sich die erwähnte Unbestimmtheit der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 nicht. Um das zu zeigen, schreibe ich jene Gleichung, welche zur Bestimmung von f und von q_0 unter 1. aufgestellt ist, in der einfacheren Form:

Indem man in der Störungsgleichung (4) nur die beständigen Glieder schreibt, führt man dieselbe über in:

$$-m p_0^2 B = (f(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{1}{2} e^2) + \frac{3}{2} q_0(1 + \frac{3}{2} e_1^2)(1 + \frac{3}{2} e^2) + \epsilon)(1 - \frac{3}{2} e_1^2),$$

wo ϵ eine gegebene beständige Grösse ist. Man setze die vorliegenden Werthe von f und von q_0 hier ein, und man erhält:

$$m p_0^2 B = (\delta(1 - e^2) + \epsilon)(1 - \frac{3}{2} e_1^2).$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Werth des Coefficienten B unabhängig ist von den in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ enthaltenen beständigen Gliedern γ . Auf den Werth von B haben nur diejenigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ einen Einfluss, welche die Form $C e \cos v$ haben. Die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn bleibt unberührt von jener Unbestimmtheit in den Werthen der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 , weil diese Unbestimmtheit nur in den beständigen Gliedern der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ zum Ausdruck kommt.

Auch die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse wird von dieser Unbestimmtheit nicht berührt. Die mittlere Bewegung des gestörten Planeten in der Ebene der Bahn ist gleich der mittleren Bewegung des gestörten Planeten in der Ellipse vermehrt um die mittlere Bewegung des Perihels in der Ebene der Bahn. Die mittlere Bewegung des gestörten Planeten in der Ellipse ist durch das Product $(1 - e^2)^{3/2} l(t_1 - t_{01})$ ausgedrückt. Wenn der Zeitraum einer vollen Umdrehung der Apsidenlinie in Betracht kommt, so ist die mittlere Bewegung des Perihels in der Ebene der Bahn genau gleich dem Producte Bv . Handelt es sich um die Lösung der Störungsaufgabe für einen beschränkteren Zeitraum, so ist die mittlere Bewegung des Perihels in der Ebene der Bahn durch das Product Bv nicht vollständig ausgedrückt. Es kommt dann zu dem Producte Bv noch ein Glied hinzu. Denn die Integration der Störungs-

gleichung (4) führt zu einer säcularen Störung von der Form:

$$(C e e_1 \sin(A + Bv) - C e e_1 \sin A) : B,$$

wo C eine mit der störenden Masse multiplicirte Beständige, und die Beständige A von dem Winkel abhängig ist, welchen die Apsidenlinien des gestörten und des störenden Planeten am Anfang der Bewegung mit einander bilden. Ist der Zeitraum, für welchen die Bewegung des Perihels bestimmt werden soll, in solcher Art beschränkt, dass das Product Bv einen kleinen Bruchwerth darstellt, so schreibt sich dieses säculare Glied in der Form $C e e_1 v \cos A$. Der vollständige Werth der mittleren Bewegung des Perihels in der Ebene der Bahn ist dann gleich

$$Bv + C e e_1 v \cos A.$$

Es wird nun vorausgesetzt, der Werth der mittleren Bewegung des gestörten Planeten in der Ebene der Bahn sei für einen gegebenen Zeitpunkt durch die Beobachtung ermittelt. Bezeichnet man denselben mit M , so besteht dem Obigen zufolge die Gleichung:

$$(1 - e^2)^{3/2} l(t_1 - t_{01}) + Bv + C e e_1 v \cos A = M. \quad (\alpha)$$

Nachdem man die mittlere Bewegung des Perihels in der Ebene der Bahn bestimmt, und in die Gleichung (α) eingesetzt hat, ergibt sich aus der letzteren der Werth der mittleren Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse. Die Beständigen B und C sind frei von jener Unbestimmtheit der überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 . Folglich ist auch die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse davon unabhängig.

Unter 3. habe ich die folgende Gleichung aufgestellt:

$$(1 - e^2)^3 l^2 = \frac{K}{a_0^3 (1 + m)^2} - \frac{K m_1}{p_1^3} F,$$

welche durch die Substitution des Werthes von F übergeht in:

$$(1 - e^2)^3 l^2 = \frac{K}{a_0^3 (1 + m)^2} - \frac{K m_1}{p_1^3} \left[- \sum_{n=2}^{\infty} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0}^{\infty} D_i^{(n)} \frac{a_0^{2i+n-2}}{p_1^{2i+n-2}} (2i+n)(2i+n+2) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{\infty} D_i^{(0)} \frac{a_0^{2i-2}}{p_1^{2i-2}} 2i(2i+2) \left(1 + \frac{(i-2)(2i+1)}{2} e_1^2 \right) \left(1 + \frac{(2i-3)(2i+1)}{8} e^2 \right) \right], \quad (\beta)$$

wo anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$, anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$ einzusetzen sind. Der Werth von $(1 - e^2)^{3/2} l$ ist durch die Gleichung (α) bestimmt. Man setze denselben in die Gleichung (β) ein, und es bestimmt sich aus der letzteren die Integrationsbeständige $p_0 = a_0(1 - e^2)$. Jene Unbestimmtheit in dem Werthe der überzähligen Integrationsbeständigen f , welche auf das Vorhandensein von beständigen Gliedern in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ zurückzuführen ist, überträgt sich demnach auf den Werth der Integrationsbeständigen p_0 . Wird in dem Werthe von f innerhalb der vorgesehenen Grenzen eine Aenderung ge-

troffen, so ist in dem Integral der Störungsgleichung die Ausgleichung durch eine Variation der Integrationsbeständigen p_0 bewirkt.

Aus der Gleichung (β) folgt auch eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der mittleren Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse. Ich nehme an, die Lösung der Störungsaufgabe sei für den Zeitraum einer vollen Umdrehung der Apsidenlinie aufgestellt. Es versteht sich, dass die Integrationsbeständige p_0 während des ganzen Verlaufs der Erscheinung ein und denselben Werth hat. Ein veränderlicher Werth von p_0 ist unvereinbar mit den Principien der Integralrechnung. Die Gleichung (β) giebt aber für den erwähnten Zeitraum ein und denselben Werth

von p_0 nur unter der Voraussetzung, dass auch die mittlere Geschwindigkeit $(1 - e^2)^{3/2} l$ in dem ganzen Verlauf der Erscheinung einen unveränderlichen Werth habe. Dies ist die sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der mittleren Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse, deren Vorhandensein hiermit nachgewiesen ist. Ich muss darauf hinweisen, dass dieses Ergebniss im Einklang steht mit der unter 3. erwähnten, der Störungstheorie zum Grund gelegten Hypothese, nach welcher der Coefficient l in der Gleichung

$$\frac{dv}{dt_1} = l \frac{p^2}{r^2} = l(1 + e \cos v)^2$$

eine beständige Grösse sein soll.

Wenn die Lösung der Störungsaufgabe auf einen Zeitraum beschränkt ist, in welchem das Product Bv einen kleinen Bruchwerth darstellt, so bestimmt sich die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse aus der Gleichung:

$$(1 - e^2)^{3/2} l(t_1 - t_{01}) + Bv + C e_1 v \cos A = M. \quad (\alpha)$$

Die Gleichung (β) hat gezeigt, dass die mittlere Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse für den unbegrenzten Zeitraum während des ganzen Verlaufs der Erscheinung ein und denselben Werth habe. Es fragt sich nun, wie diese Eigenschaft der Grösse $(1 - e^2)^{3/2} l$ in der Gleichung (α) zum Ausdruck kommt. Es ist zu beachten, dass in dieser Gleichung die Beständige A eine Function des Winkels ist, welchen die Apsidenlinien des gestörten und des störenden Planeten am Anfang der zu bestimmenden Bewegung mit einander bilden. Denkt man sich den Zeitraum einer vollen Umdrehung der Apsidenlinie des gestörten Planeten in gleich grosse Abschnitte zerlegt, so besteht für jeden dieser Zeitabschnitte die Gleichung (α) , wenn angenommen ist, dass das Product Bv einen kleinen Bruchwerth darstelle und dass am Anfang des Zeitabschnittes $t_1 - t_{01} = 0$, daher $v = 0$ sei. Die Beständige A aber hat für die einzelnen Zeitabschnitte verschiedene Werthe. Der aus der Gleichung (α) hergeleitete Werth $(1 - e^2)^{3/2} l(t_1 - t_{01})$ der mittleren Bewegung muss unabhängig von A sein. Dies ist nur dann möglich, wenn M als abhängig von A gedacht wird, so dass die Gleichung:

$$M = M_0 + C e_1 v \cos A \quad (\gamma)$$

besteht, wo M_0 ein von A unabhängiger Werth ist. Die Gleichung (α) geht dann über in:

$$(1 - e^2)^{3/2} l(t_1 - t_{01}) + Bv = M_0.$$

Nur mit dieser Form der Gleichung (α) ist jene Forderung vereinbar, dass die mittlere Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse während des ganzen Verlaufs der Erscheinung eine Aenderung nicht erleide.

Durch die Gleichung (γ) ist auch eine merkwürdige Eigenschaft der mittleren Bewegung des gestörten Planeten in der Ebene der Bahn ausgedrückt. Es ist aus derselben zu ersehen, dass man in den einzelnen Zeitabschnitten, in welche die Umlaufszeit der Apsidenlinie zerlegt worden ist, für gleiche Zeiträume durch die Beobachtung verschiedene Werthe von M erhält. Denn es ist M eine Function der

Beständigen A , welche für die einzelnen Zeitabschnitte verschiedene Werthe hat.

Die Veränderlichen k und h haben säculare Störungen von der Form

$$k = C e_1 \cos(A + Bv), \quad h = -C e_1 \sin(A + Bv),$$

in welchen $C A B$ beständige Grössen sind, und die zuletzt genannte mit der störenden Masse multiplicirt ist. Wenn die Lösung der Störungsaufgabe nur für einen beschränkten Zeitraum gelten soll, in welchem das Product Bv einen kleinen Bruchwerth darstellt, so kann man diese säcularen Störungen nach den Potenzen von Bv entwickeln. Es ist bekanntlich in diesem Falle gestattet, die überzähligen Integrationsbeständigen k_0 und h_0 so zu bestimmen, dass die beständigen Glieder aus den Entwicklungen dieser säcularen Störungen wegfallen. Die letzteren haben dann die Form:

$$k = -C e_1 \sin A \cdot Bv, \quad h = -C e_1 \cos A \cdot Bv.$$

Jene säcularen Störungen der zweiten Ordnung von k und von h , welche in der für den unbegrenzten Zeitraum aufgestellten Lösung der Störungsaufgabe einerlei Grössenklasse haben mit den säcularen Störungen der ersten Ordnung dieser Veränderlichen, erhalten hier die Form $C e_1 (Bv)^2$, wo C eine gegebene Beständige ist. Offenbar sind jene Reihen der säcularen Störungen höherer Ordnungen, welche in der für den unbegrenzten Zeitraum aufgestellten Lösung divergent sind, in dem hier vorausgesetzten Falle convergent. Es kann daher aus deren Vorhandensein nicht mehr die Nöthigung gefolgert werden, in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 die beständigen Glieder zum Verschwinden zu bringen. Dem ungeachtet soll das geschehen. Es wird nämlich, wenn die beständigen Glieder aus der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ fortgeschafft werden, die Lösung der Störungsaufgabe noch in einer anderen Richtung gefördert. Der Parameter der gestörten Ellipse bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\frac{p^2}{p_0^2} - 1 = 2 \frac{p}{r} (k \cos v + h \sin v).$$

Ich nehme an, es sei in der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_2^2} Q$ ein beständiges Glied γ vorhanden. Man erhält dann auf der rechten Seite der vorliegenden Gleichung ein Glied $2 \gamma \frac{p}{r}$. Von allen denjenigen Störungen des Parameters, welche unabhängig von der Anomalie v_1 des störenden Planeten, also Functionen von v allein sind, ist jenes Glied $2 \gamma \frac{p}{r}$ das überwiegend grösste. Man darf annehmen, dass die gestörte Ellipse einen engeren Anschluss an die Kepler'sche Ellipse erhält, wenn das Glied $2 \gamma \frac{p}{r}$ aus der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ weggebracht wird. Dies ist der Grund, warum auch für den Fall, dass die Lösung der Störungsaufgabe nur für einen begrenzten Zeitraum gelten soll, die

überzähligen Integrationsbeständigen f und q_0 doch so bestimmt werden müssen, dass die beständigen Glieder aus der Entwicklung des Productes $\frac{r_1^2}{p_1^2} Q$ wegfallen.

5.

Wenn der Winkel $\mathcal{F}$, welcher die Ebenen des gestörten und des störenden Planeten mit einander bilden, in den Störungsgleichungen berücksichtigt wird, so kommt

$$\sin u \sin u_1 \frac{dQ}{ds} : \kappa m m_1 = \sin u \sin u_1 \sum_{n=0} (-\alpha)^n \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r_1^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} \cos nx \\ + \frac{1}{4} \sum_{n=1} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r_1^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r_1^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}},$$

wo $x = u - u_1$ ist, und anstatt n in dem ersten Theil rechts die sämtlichen ganzen Zahlen $n = 0$ bis $n = \infty$ zu setzen sind, in dem zweiten und in dem dritten Theil nur die ungeraden Zahlen, und zwar in dem zweiten Theil von $n = 1$ bis $n = \infty$, in dem dritten Theil von $n = 3$ bis $n = \infty$. In dieser Entwicklung kommen hier nur diejenigen Glieder in Betracht, welche sich als beständige Grössen darstellen. Es ist daher in dem ersten Theil rechts nur der Fall $n = 1$ zu berücksichtigen. Durch die iden-

auch der Knoten in Betracht. Es soll hier die mittlere Bewegung des Knotens bestimmt werden. Die Störungen des inneren Planeten betreffend hat man zur Bestimmung des Knotens die Gleichung:

$$m n \vartheta' = \sin u \sin u_1 \frac{dQ}{ds},$$

wo $n = p_0^2$ gesetzt werden kann. Ferner ist in Nr. 3362 unter 5. die folgende Entwicklung gegeben:

tische Gleichung

$$\sin u \sin u_1 \cos x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos y) \cos x = \frac{1}{4}$$

wird der erste Theil übergeführt in:

$$- \frac{\alpha}{4} \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{r_1^{2i+2}}{r_1^{2i+3}}.$$

Der zweite Theil kann dargestellt werden als die Summe

$$\frac{1}{4} \beta \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{r_1^{2i+2}}{r_1^{2i+3}} + \frac{1}{4} \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r_1^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}},$$

von welcher das erste Glied mit dem ersten, das zweite Glied mit dem dritten Theil zu vereinigen ist. Die obige Störungsgleichung hat nun die folgende Form:

$$m p_0^2 \vartheta' = \kappa m m_1 \left(- \frac{1-2\beta}{4} \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{r_1^{2i+2}}{r_1^{2i+3}} + \frac{3}{4} \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{r_1^{2i+n+1}}{r_1^{2i+n+2}} \right).$$

Zum Behuf der Integration ist die rechte Seite dieser Gleichung mit $\frac{r_1^2}{p_1^2} v'$ zu multipliciren, alsdann der gemeinsame Factor von v' nach den Cosinus der Vielfachen

$$\vartheta' = m_1 \frac{p_1^2}{r_1^2} \left[- \frac{1-2\beta}{4} \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{p_0^{2i+3}}{p_1^{2i+3}} \left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+1} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+4} + \frac{3}{4} \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{p_0^{2i+n+2}}{p_1^{2i+n+2}} \right] v',$$

wo noch einzusetzen ist:

$$\left(\frac{p_1}{r_1} \right)^{2i+1} \left(\frac{r}{p} \right)^{2i+4} = \left[1 + i \left(i + \frac{1}{2} \right) e_1^2 \right] \left[1 + (i+2) \left(i + \frac{5}{2} \right) e^2 \right].$$

Bei der Integration der vorliegenden Gleichung ist bekanntlich der gemeinsame Factor $\frac{p_1^2}{r_1^2}$ als beständig zu betrachten; in dem Integral aber durch den Factor $1 - \frac{3}{2} e_1^2$ zu ersetzen. Ich setze noch $p_0 = a_0 (1 - e^2)$ und schreibe das Integral der Störungsgleichung in der Form:

$$C = m_1 \frac{\cos \mathcal{F}}{4} \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{a_0^{2i+3}}{p_1^{2i+3}} \left[1 + (i-1) \left(i + \frac{3}{2} \right) e_1^2 \right] \left[1 + (i+1) \left(i + \frac{3}{2} \right) e^2 \right] \\ - \frac{3}{4} m_1 \sum_{n=3} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} E_i^{(n)} \frac{a_0^{2i+n+2}}{p_1^{2i+n+2}},$$

von v und v_1 zu entwickeln. Ich erwähne, dass die mit β multiplicirten Glieder nicht in Betracht kommen, wenn sie einen der Factoren e^2 und e_1^2 haben. Wird schliesslich $\kappa = p_0^3$ gesetzt, so hat man die Störungsgleichung:

$$\vartheta = -Cv.$$

Es ergeben sich in dem Werthe der Beständigen C die folgenden Coefficienten von e_1^2 und von e^2 :

$$i(i+1/2) - 3/2 = (i-1)(i+3/2) \\ (i+2)(i+5/2) - 2i-3 = (i+1)(i+3/2) + 1/2,$$

und alsdann die Gleichung:

wo anstatt n die ungeraden Zahlen $n = 3$ bis $n = \infty$, anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$ zu setzen sind.

Man findet leicht eine einfache Relation zwischen diesem Coefficienten C und jenem Coefficienten B , durch welchen unter 3. die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn bestimmt ist. Wenn man von den mit $e^2 e_1^2 \beta$ multiplicirten Gliedern dieser Coefficienten ab- sieht, so ist, mit Rücksicht auf die Gleichung $D_0^{(0)} = 0$,

maße ich von den in Nr. 3362 S. 31 gegebenen Gleichungen Gebrauch:

$$E_{i-1}^{(1)} = 2 b_{i-1} b_i \quad b_{i-1} = 2 i c_i \quad b_i = (2 i + 1) c_i,$$

und führe jene identische Gleichung über in:

$$\sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{a_0^{2i+3}}{p_1^{2i+3}} = \sum_{i=1} 4 i (2 i + 1) c_i c_i \frac{a_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} = \sum_{i=1} D_i^{(0)} \frac{a_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} 4 i (2 i + 1),$$

weil

$$\sum_{i=1} c_i c_i = \sum_{i=1} D_i^{(0)}$$

ist. Wenn also die mit $e_1^2 e^2 \beta$ multiplicirten Glieder in den Werthen von C und von B ausser Acht bleiben, so besteht die einfache Relation $C = B$.

Auch der Knoten des störenden Planeten ist eine veränderliche Grösse. Es wird in Erinnerung gebracht, dass die Ebenen des gestörten und des störenden Planeten jederzeit in der Coordinatenebene einander schneiden, dass also die beiden Bahnen eine gemeinsame Knotenlinie haben. Es folgt hieraus, wenn ϑ und ϑ_1 die aufsteigenden Knoten des gestörten und des störenden Planeten sind, dass $\vartheta_1 = 180^\circ + \vartheta$ ist.

6.

Wenn der äussere Planet der gestörte ist, so erhält man den Parameter der gestörten Ellipse aus der Gleichung:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 Q_1 = \frac{r^2 r_1}{p^2 p_1} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_{01} - q + q_0 + 2 \Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right).$$

Zur Bestimmung der Veränderlichen q aber hat man die Gleichung:

$$\frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v' \quad (1)'$$

Die überzählige Integrationsbeständige q_0 ist so zu bestimmen, dass in der Differenz $q - q_0$ die beständigen

$$\lambda m_0 p_{01}^2 \frac{r_1^2}{p_1^2} Q_1 = \frac{r^2 r_1^3}{p^2 p_1^3} \left(f_1 \frac{p_1}{r_1} + q_{01} - q + q_0 + 2 \Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 zu entwickeln. In dieser Entwicklung sollen sowohl die beständigen als auch diejenigen Glieder verschwinden, welche die Form $C e_1 \cos v_1$ haben. Es ergeben sich hiermit zwei Gleichungen, aus welchen die Werthe der überzähligen Integrationsbeständigen f_1 und q_{01} folgen. Die überzähligen Integrationsbeständigen f_1 und q_{01} sind in Nr. 3032 unter 4. für den Fall $\mathcal{F} = 0$ bestimmt worden. Es soll nun auch

$$C = \frac{m_1}{4} \sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{a_0^{2i+3}}{p_1^{2i+3}}$$

$$B = m_1 \sum_{i=1} D_i^{(0)} \frac{a_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}} i (2 i + 1).$$

Von der identischen Gleichung ausgehend:

$$\sum_{i=0} E_i^{(1)} \frac{a_0^{2i+3}}{p_1^{2i+3}} = \sum_{i=0} E_{i-1}^{(1)} \frac{a_0^{2i+1}}{p_1^{2i+1}}$$

$$\frac{p_1^2}{p_{01}^2} - 1 = 2 \frac{p_1}{r_1} (k_1 \cos v_1 + h_1 \sin v_1),$$

und zur Bestimmung der Veränderlichen k_1 und h_1 hat man die Störungsgleichungen:

$$-k_1' = \sin v_1 Q_1 v' \quad (2)'$$

$$h_1' = \cos v_1 Q_1 v', \quad (3)'$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\lambda m_0 p_{01}^2 Q_1 = \frac{r^2 r_1}{p^2 p_1} \left(f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + q_1 + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1} + P_1 \right).$$

Aus diesem Ausdruck ist die Veränderliche q_1 vermittelst des Integrals der lebendigen Kraft zu eliminieren, also vermittelst der Gleichung:

$$q - q_0 + q_1 - q_{01} = 2 \Omega.$$

Es sind q_{01} und q_0 ebenso wie f_1 als überzählige Integrationsbeständige zu betrachten. Ferner ist nun

Glieder verschwinden. In dem Werthe von Q_1 streiche man ferner die Störungsglieder der zweiten Ordnung, indem man

$$\frac{p_{01}}{r_1} = \frac{p_1}{r_1} \text{ und } P_1 = 0$$

setzt; und es kommt nun darauf an, den Ausdruck

der Winkel $\mathcal{F}$ bei der Bestimmung von f_1 und q_{01} berücksichtigen werden.

Die verlangte Entwicklung betreffend, muss ich erwähnen, dass auch in dem Producte

$$\frac{r^2 r_1^3}{p^2 p_1^3} (q - q_0)$$

Glieder von der Form $D + C e_1 \cos v_1$ vorhanden sind. Um

dieselben zu erhalten, streiche man in der Störungsgleichung

$$\frac{1}{2} q' = \frac{d\Omega}{dv} v'$$

alle diejenigen Glieder der Störungsfunktion, welche von $x = u - u_1$ und von $y = u + u_1$ abhängig sind. Die Derivirte $\frac{d\Omega}{dv}$ erhält dann den Factor $e \sin v$. Daraus folgt, dass alle diejenigen Glieder des Productes

$$\frac{r^2 r_1^3}{\rho^2 \rho_1^3} (q - q_0),$$

welche unabhängig sind von der Veränderlichen v , den Factor e^2 haben, dass demzufolge die mit β multiplicirten Glieder der Störungsfunktion gestrichen werden können. Ich setze daher

$$\Omega = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{\rho^{2i}}{\rho_{01}^{2i+1}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i+1}$$

in die vorliegende Störungsgleichung (1)' ein, wodurch dieselbe übergeführt wird in:

$$\frac{1}{2} q' = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{\rho^{2i}}{\rho_{01}^{2i+1}} 2 i e \sin v \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i+3} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i+1} v'.$$

Setzt man noch den Factor $\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2i+3} = 1$, so ist

$$\frac{1}{2} q' = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{\rho^{2i}}{\rho_{01}^{2i+1}} \frac{\rho_1^2}{r_1^2} 2 i e \sin v (1 + (2i-1) e_1 \cos v_1) v'.$$

Die Integration dieser Gleichung ist in Nr. 3032 S. 127 eingehend verfolgt, und hat zu dem folgenden Ergebniss geführt:

$$\frac{r^2 r_1^3}{\rho^2 \rho_1^3} (q - q_0) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{\rho^{2i}}{\rho_{01}^{2i+1}} 4 i e^2 \left(1 + \frac{2i-2+3v^2}{1-v^2}\right).$$

Die verlangte Entwicklung betreffend hat man ferner die Factoren von f_1 und ρ_{01} :

$$\begin{aligned} \frac{r^2 r_1^2}{\rho^2 \rho_1^2} &= \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) (1 - 2 e_1 \cos v_1) \\ \frac{r^2 r_1^3}{\rho^2 \rho_1^3} &= \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{5}{2} e_1^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 - 3 e_1 \cos v_1\right) \end{aligned}$$

zu setzen. Die übrigen Glieder der Entwicklung von $\frac{r_1^2}{\rho_1^2} Q_1$ ergeben sich, wenn die Störungsfunktion in der folgenden Form geschrieben wird:

$$\Omega = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{\rho^{2i}}{\rho_{01}^{2i+1}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i+1} - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{\rho^{2i+n}}{\rho_{01}^{2i+n+1}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i+n} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i+n+1}$$

Man gelangt zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{r^2 r_1^3}{\rho^2 \rho_1^3} \left(2 \Omega + r_1 \frac{d\Omega}{dr_1}\right) &= - \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{\rho^{2i}}{\rho_{01}^{2i+1}} (2i-1) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i+2} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i-2} \\ &\quad + \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{\rho^{2i+n}}{\rho_{01}^{2i+n+1}} (2i+n-1) \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i+n+2} \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i+n-2} \end{aligned}$$

In derselben ist:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2i+2} &= 1 + (i+1) \left(i + \frac{3}{2}\right) e^2 \\ \left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^{2i-2} &= 1 + (i-1) \left(i - \frac{3}{2}\right) e_1^2 + (i-1) \left[2 + \left(i - \frac{3}{2}\right) (i-2) e_1^2\right] e_1 \cos v_1. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der überzähligen Integrationsbeständigen f_1 und q_{01} entsteht die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} f_1 (1 + \frac{3}{2} e^2) (1 + \frac{3}{2} e_1^2) (1 - 2 e_1 \cos v_1) + q_{01} (1 + \frac{3}{2} e^2) (1 + \frac{5}{2} e_1^2) (1 + \frac{1}{2} e_1^2 - 3 e_1 \cos v_1) \\ = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 4 i e^2 \left(1 + \frac{2 i - 2 + 3 v^2}{1 - v^2} e_1 \cos v_1 \right) \\ + \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} (2 i - 1) \left[1 + (i + 1) \left(i + \frac{3}{2} \right) e^2 \right] \\ \cdot \left(1 + (i - 1) \left(i - \frac{3}{2} \right) e_1^2 + (i - 1) \left[2 + \left(i - \frac{3}{2} \right) (i - 2) e_1^2 \right] e_1 \cos v_1 \right) \\ - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n+1}} (2 i + n - 1) (1 + (2 i + n - 2) e_1 \cos v_1) . \end{aligned}$$

Setzt man hier $e_1 \cos v_1 = 1/2$, so erhält man:

$$\begin{aligned} - q_{01} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2 \right) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 4 i e^2 \frac{2 i + v^2}{1 - v^2} \\ + \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 2 i (2 i - 1) \left[1 + (i + 1) \left(i + \frac{3}{2} \right) e^2 \right] \left(1 + \frac{(i - 1)(2 i - 3)}{4} e_1^2 \right) \\ - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n+1}} (2 i + n) (2 i + n - 1) . \end{aligned}$$

Setzt man $e_1 \cos v_1 = 1/3 + 1/6 e_1^2$, so findet man

$$\begin{aligned} f_1 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2 \right) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 4 i e^2 \frac{2 i + 1}{1 - v^2} \\ + \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} (2 i + 1) (2 i - 1) \left[1 + (i + 1) \left(i + \frac{3}{2} \right) e^2 \right] \left(1 + \frac{(i - 1)^2}{2} e_1^2 \right) \\ - \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n+1}} (2 i + n + 1) (2 i + n - 1) . \end{aligned}$$

In diesen Werthen von f_1 und von q_{01} sind anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$ zu setzen; anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen von $i = 0$ bis $i = \infty$.

7.

Die überzähligen Integrationsbeständigen f_1 und q_{01} sind unter 6. bestimmt worden. Als Functionen davon werden nun die mittlere Bewegung des Leitstrahls in der Ellipse und die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn dargestellt.

Die mittlere Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse ist $(1 - e_1^2)^{3/2} l_1$, und zur Bestimmung von l_1 ist in Nr. 2620 § 1 die folgende Gleichung hergeleitet worden:

$$\frac{\kappa m_1}{m_0 p_{01}^3} = \lambda^2 + \frac{f_1}{m_0 p_{01}^2} ,$$

wo $\lambda = l_1 : l$ ist, und $\kappa = K : l^3$. Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1 - e_1^2)^3 l^3$, so erhält man das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse:

$$(1 - e_1^2)^3 l_1^2 = \frac{K m_1}{m_0 a_{01}^3} - \frac{f_1 K (1 - 3 e_1^2)}{\kappa m_0 p_{01}^2} .$$

Indem man in den Werth von f_1

$$p = a (1 - e^2) \quad \text{ferner} \quad p_{01} = a_{01} (1 - e_1^2)$$

einsetzt, gelangt man zu der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{f_1 K (1 - 3 e_1^2)}{\kappa m_0 p_{01}^2} = \frac{K m m_1}{m_0 a_{01}^3} \left[\sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a^{2i}}{p_{01}^{2i}} (2 i + 1) (2 i - 1) \left(1 + \frac{i (2 i + 1)}{2} e^2 \right) \left(1 + \frac{i (i - 2)}{2} e_1^2 \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a^{2i}}{p_{01}^{2i}} \frac{4 i (2 i + 1)}{1 - v^2} e^2 - \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} (2 i + n + 1) (2 i + n - 1) \right] . \end{aligned}$$

Das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit des Leitstrahls in der Ellipse ist dann:

$$(1 - e_1^2)^3 l_1^2 = \frac{K m_1}{m_0 a_{01}^3} (1 - m F_1),$$

indem ich mich der folgenden Abkürzung bediene:

$$F_1 = \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a^{2i}}{p_{01}^{2i}} (2i+1)(2i-1) \left(1 + \frac{i(2i+1)}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{i(i-2)}{2} e_1^2\right) + \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a^{2i}}{p_{01}^{2i}} \frac{4i(2i+1)}{1-v^2} e^2 \\ - \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} (2i+n+1)(2i+n-1),$$

wo anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$, anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$ zu setzen sind.

Um die mittlere Bewegung der Apsidenlinie in der Ebene der Bahn zu erhalten, gehe ich von der Störungsgleichung aus:

$$-\lambda m_0 p_{01}^2 (\omega_1' + \cos i_1 \vartheta') = f_1 \frac{p_{01}}{r_1} + \frac{3}{2} q_1 + 2 r_1 \frac{dQ}{dr_1} + P_1 + N_1.$$

Aus derselben ist die Veränderliche q_1 vermittelt des Integrals der lebendigen Kraft

$$q - q_0 + q_1 - q_{01} = 2Q$$

zu eliminieren. Ich lasse die Störungsglieder der zweiten Ordnung ausser Acht, und entwickle den Ausdruck:

$$\frac{r^2 r_1^2}{p^2 p_1^2} \left(f_1 \frac{p_1}{r_1} + \frac{3}{2} (q_{01} - q + q_0) + 3Q + 2 r_1 \frac{dQ}{dr_1} \right)$$

nach den Cosinus der Vielfachen von v und v_1 . Es kommt darauf an, alle diejenigen Glieder dieser Entwicklung aufzustellen, welche als beständige Grössen gegeben sind. Zu

diesem Behufe setze man die Factoren von f_1 und von q_{01} :

$$\frac{r^2 r_1}{p^2 p_1} = \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} e_1^2\right)$$

$$\frac{r^2 r_1^2}{p^2 p_1^2} = \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right).$$

Dem unter 6. gegebenen Resultat zufolge ist:

$$\frac{r^2 r_1^2}{p^2 p_1^2} (q - q_0) = \kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} 4i e^2.$$

Ferner erhält man die Entwicklung:

$$\frac{r^2 r_1^2}{p^2 p_1^2} \left(3Q + 2 r_1 \frac{dQ}{dr_1} \right) = -\kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} (4i-1) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+2} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} \\ + \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n+1}} (4i+2n-1) \left(\frac{r}{p}\right)^{2i+n+2} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i+n-1}$$

in welche noch einzusetzen ist:

$$\left(\frac{r}{p}\right)^{2i+2} \left(\frac{p_1}{r_1}\right)^{2i-1} = \left[1 + (i+1) \left(i + \frac{3}{2}\right) e^2\right] \left[1 + \left(i - \frac{1}{2}\right) (i-1) e_1^2\right].$$

Die beständigen Glieder der verlangten Entwicklung sind nun

$$-\kappa m m_1 \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i+1}} i(2i+1) \left[\left(1 + \frac{(i+1)(2i+3)}{2} e^2\right) \left(1 + \frac{(i-1)(2i-1)}{2} e_1^2\right) + \frac{2e^2}{1-v^2} \right] \\ + \kappa m m_1 \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n+1}} \left(i + \frac{n}{2}\right) (2i+n+1).$$

Indem ich $\kappa m_1 = m_0 \lambda^2 p_{01}^3$ setze, führe ich die obige Störungsgleichung über in:

$$\omega_1' + \cos i_1 \vartheta' = \lambda m \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{p^{2i}}{p_{01}^{2i}} i(2i+1) \left(1 + \frac{(i+1)(2i+3)}{2} e^2 + \frac{(i-1)(2i-1)}{4} e_1^2 + \frac{2e^2}{1-v^2}\right) \frac{p_1^2}{r_1^2} v' \\ - \lambda m \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{p^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} \left(i + \frac{n}{2}\right) (2i+n+1) \frac{p_1^2}{r_1^2} v',$$

wo noch $p = a(1 - e^2)$, $\lambda = v(1 - e^2)^{3/2}$ ferner

$$\frac{p_1^2}{r_1^2} = (1 - e_1^2)^{3/2}$$

zu setzen ist. Das Integral der vorliegenden Gleichung schreibt sich in der Form:

$$\omega_1 + \cos i_1 \vartheta = B_1 v,$$

Zur Bestimmung von B_1 hat man daher die Gleichung:

$$B_1 = m v \left(1 + \frac{2e^2}{1 - v^2} \right) \sum_{i=0} D_i^{(0)} \frac{a^{2i}}{p_{02}^{2i}} i(2i+1) \left(1 + \frac{i(2i+1)}{2} e^2 \right) \left(1 + \frac{(i+1)(2i-5)}{4} e_1^2 \right) \\ - m v \sum_{n=2} n \alpha^{n-1} \beta \sum_{i=0} D_i^{(n)} \frac{a^{2i+n}}{p_{01}^{2i+n}} \left(i + \frac{n}{2} \right) (2i+n+1),$$

wo anstatt n die geraden Zahlen $n = 2$ bis $n = \infty$, anstatt i die sämtlichen ganzen Zahlen $i = 0$ bis $i = \infty$ zu setzen sind.

Berichtigungen zu Nr. 2909.

- S. 84 Z. 5 v. u. anstatt p_{01}^3 lies p_0^3
S. 95 Z. 15 v. u. anstatt $e e_1^2$ lies $e^2 e_1$

Karlsruhe im December 1896.

und es ergeben sich in dem Werthe von B_1 die Coefficienten von e^2 und von e_1^2 :

$$\frac{(i+1)(2i+3)}{2} - 2i - \frac{3}{2} = \frac{i(2i+1)}{2}$$

$$\frac{(i-1)(2i-1)}{4} - \frac{3}{2} = \frac{(i+1)(2i-5)}{4}$$

Berichtigungen zu Nr. 3032.

- S. 129 Z. 8 v. u. anstatt des Nenners $m p_{01}^2$ lies $m_0 p_{01}^2$
S. 130 Z. 17 v. u. anstatt des Nenners $m p_{01}^2$ lies $m_0 p_{01}^2$
S. 132 Z. 10 v. u. anstatt $(i + \frac{3}{2})$ lies $(i + \frac{3}{2}) e^2$

Berichtigungen zu Nr. 3053.

- S. 79 Z. 14 v. u. anstatt τ lies τ_5
S. 88 Z. 6 v. u. anstatt v lies v_1

Aug. Weiler.

Ueber die säculare Perihelbewegung des Mercur.

Von Aug. Weiler.

In den Annales de l'observatoire impérial de Paris T. V. 1859 hat Leverrier gezeigt, dass die säculare Perihelbewegung des Mercur nicht ausreichend erklärt sei durch die Attraction der anderen Planeten. S. 99 des erwähnten Bandes giebt Leverrier die Resultate seiner Theorie, entnommen zwei verschiedenen von einander unabhängigen Bearbeitungen in der folgenden Zusammenstellung:

Mouvement séculaire du périhélie de Mercure.

	Mémoire de 1841	Travail actuel
Action de Venus	281"	280.6
» de la Terre	83	83.6
» de Mars	3	2.6
» de Jupiter	152	152.6
» de Saturne	8	7.2
» d'Uranus	—	0.1
	527"	526.7

Die aus der Theorie abgeleitete Zahl 527" ist um 38" kleiner als der unmittelbar aus den Beobachtungen genommene Werth der säcularen Perihelbewegung des Mercur, vgl. Comptes rendus B. 49 1859 S. 379.

Mit der Frage der säcularen Perihelbewegung des Mercur haben sich seitdem zahlreiche Astronomen beschäftigt. Ich erwähne die Arbeit des Herrn Bauschinger »Untersuchungen über die Bewegung des Mercur.« München 1884. Ferner ist dieser Gegenstand von Herrn Harzer verfolgt worden in seinen neuesten Untersuchungen über

die säcularen Störungen der grossen Planeten. Ein von dem Leverrier'schen etwas abweichendes Resultat hat Herr Newcomb veröffentlicht in seiner neuesten Schrift über die Fundamentalconstanten der Astronomie, Washington 1895. Auf S. 109 dieser Schrift ist der nach der Theorie berechnete Werth der säcularen Perihelbewegung zu 533.8 angegeben, etwa 7" grösser als der von Leverrier berechnete Werth. Doch ist diese Differenz zum grossen Theil darauf zurückzuführen, dass die von Herrn Newcomb verbesserten Planetenmassen in die Rechnung eingeführt sind. Im Gegensatz zu diesem theoretischen Werthe hat Herr Newcomb aus einem sehr umfangreichen Beobachtungsmaterial den Werth der säcularen Perihelbewegung des Mercur zu 575.1 abgeleitet. Die erwähnten Arbeiten kommen sämtlich zu dem übereinstimmenden Resultat, dass die beobachtete Perihelbewegung um etwa 40" grösser sei, als die aus der Theorie berechnete.

In der Absicht, eine numerische Anwendung der Formeln zu geben, welche in meinen Aufsätzen über Planetenstörungen veröffentlicht sind, habe ich die hier besprochene Aufgabe in Angriff genommen. Die erwähnten Misserfolge haben mich nicht davon abhalten können, diese Wahl zu treffen, weil die Störungstheorie, über welche ich verfüge, ohne Schwierigkeit zu den sämtlichen säcularen Störungen des Perihels führt, welche in dieser Untersuchung in Betracht kommen.

Bekanntlich ist die Bewegung des Perihels in der Ebene der Bahn durch die Grösse $\omega + \cos i \vartheta$ ausgedrückt, wenn ω das Argument der Breite des Perihels, ϑ den aufsteigenden Knoten, und i den Winkel bezeichnet, welchen