Esperienze dirette a determinare le velocità delle molecole fluide prossime al foro di emissione, nell'efflusso dei vasi;

*eseguite dal Professore LUIGI PACINOTTI,
e dal Dottore GAETANO NICCOLI.*

I Geometri applicando il calcolo al movimento dei liquidi hanno dovuto ricorrere al sussidio di varie ipotesi, le quali deducevano dal fenomeno fisico con un certo grado di esattezza più o meno approssimato. Supposero in principio che i successivi strati della massa fluida si movessero come tutti d'un sol pezzo lungo una direttrice, e che le rispettive velocità dei varii loro punti fossero quasi eguali e in direzione parallela alla direttrice stessa; per cui nel caso dell'efflusso dei vasi da fori scolpiti nelle loro faccie, gli strati risultando orizzontali, ciascheduna molecola di un medesimo strato orizzontale veniva a riguardarsi dotata della stessa velocità. Questa ipotesi però essendo poco corrisposta dal fatto, la teoria non poteva procedere che in un modo lento e vacillante. Le fu pertanto sostituita l'altra della permanenza dei filetti, che consiste nel riguardare la massa fluida in movimento come decomposta in un infinito numero di filamenti di forma inalterabile, lungo i quali le successive molecole si dirigono sempre con leggi determinate. Tale ipotesi naturalissima, la quale comprende ancora quella precedente nel caso che i filetti abbiano andamento parallelo, produsse alla scienza idraulica le più belle speranze di progresso, liberando le molecole fluide da quel vincolo improprio cui l'assoggettava la prima. Ma si doveva conoscere la natura dei supposti filamenti nei varii casi di moto per procedere con tale scorta alle ulteriori ricerche, e ben poco si è fatto fin qui su questo soggetto; onde la teoria dell'efflusso dei vasi in specie, è tuttora costretta ad atte-

nersi al sussidio del parallelismo degli strati: ciò che include l'ipotesi dei filamenti paralleli. Questa circostanza in vero non sarà sensibilmente dannosa per quelle parti del fluido molto discoste dal foro di emissione, in confronto dell'ampiezza del foro stesso; perchè ivi sembra che le differenze di velocità delle varie molecole fluide non sieno apprezzabili: quindi possiamo riguardarvi i filetti disposti in un modo qualunque, ed anche farne astrazione se si vuole. Ma avanzandosi verso il foro le rispettive molecole vanno procedendo animate da velocità sempre maggiori e maggiormente fra loro differenti, per cui nel caso che le linee da esse decorse non coincidano coi filetti verticali prima supposti, accadrà d'incontrare una manifesta aberrazione di moto, e saremo costretti di arrestare ogni nostra ricerca. Gl'Idraulici arrestano le loro teorie a certe distanze dai fori di emissione più o meno grandi secondo le ampiezze dei fori medesimi, accennando che al di là di tali limiti accade un gorgo; o sia la corrente del fluido vi forma una conojde molto convergente, di cui insino ad ora non seppesi mai con esattezza determinare la forma, nè i limiti che le si debbono; e molto meno la natura del movimento che vi si effettua. Ma siamo noi certi che tali limiti coincidano con quei punti ove si deve abbandonare la dottrina del parallelismo degli strati? I mezzi grossolanissimi coi quali suol giungersi a farsi idea di tal gorgo, ed a circoscriverne i limiti, ci danno ragionevol motivo di dubitarne.

Noi ci siamo proposti di studiare quest'ultima parte di fluido che rimane non molto distante dal foro, per scoprire, se sia possibile, la natura delle linee di moto delle varie molecole e la legge che regola in esse le rispettive velocità; ed abbiamo tentato di conoscere quanto tal porzione che non obbedisce al movimento degli strati paralleli sia estesa. In queste ricerche si è tenuto il solo metodo sperimentale, e le formole che abbiamo stabilite sono

del tutto empiriche. Tre parti ci si presentavano importantissime su questo soggetto, ma noi non abbiamo inteso a svilupparne alcuna completamente. Il nostro lavoro lo presentiamo come un abbozzato saggio di quello vastissimo che la scienza Idraulica reclama. Verteva la prima parte sulla legge delle celerità nel filetto verticale che corrisponde sul centro del foro scolpito nel fondo di un vaso, il quale abbia sezione sì estesa da potersi ritenere come indefinita rispetto all'ampiezza del foro stesso: e di questa ci siamo più che delle altre occupati. La seconda aveva per oggetto di determinare i filetti nei quali dividesi la massa fluida che circonda il filetto verticale sopra rammentato, e la legge che regola in essi l'andamento delle rispettive velocità. A ciò che facemmo relativamente a tale studio, abbiamo unito quel pochissimo che si è studiato nella terza parte, la quale raggrivasi sulla natura del moto relativo al foro in parete verticale.

PARTE PRIMA

§. I.

Del metodo sperimentale per riconoscere le velocità delle varie molecole liquide nell'efflusso dei vasi

In questo primo paragrafo supponendo conosciute le linee percorse dalle varie molecole fluide, daremo un metodo sperimentale per riconoscere le velocità che corrispondono alle molecole stesse in varii dei loro punti, onde determinare con questi dati la legge che vi regola il movimento.

Quando l'efflusso ha luogo per un vaso inesausto, dopo che il liquido ha acquistato un movimento permanente, ciascun punto dello spazio che esso percorre riceve sempre le molecole che vi passano animate di eguali ve-

locità. In tal caso la ricerca delle diverse velocità di una medesima molecola corrispondenti ai varii punti della sua traiettoria, può essere sostituita da quella delle differenti velocità colle quali sono incontrati i punti medesimi da qualunque molecola che vi passa.

A quest'oggetto si trasporti in qualche modo verso il foro d'emissione una pallina perfettamente sferica, di gravità specifica minore di quella dell'acqua; procurando che si trovi sempre libera nella direzione del movimento del liquido, e percorra una delle traiettorie delle molecole in moto. Se accaderà che in qualche punto essa venga tratta dalla velocità del fluido, è chiaro che la componente della sua spinta verticale (1) diretta in senso contrario al movimento del liquido, sarà il valore preciso della forza che anima tutte le molecole, le quali percorrono quella traiettoria nell'istante del loro passaggio pel punto medesimo. Variando poi successivamente la spinta verticale della pallina, e facendole sempre percorrere la medesima linea, si potranno determinare di quel numero di forze che vorremo i rispettivi punti della traiettoria che gli corrispondono. Ripetute le medesime operazioni sulle traiettorie percorse dalle altre molecole, si giungerà a speculare tutta la massa effluente.

I risultati di queste esperienze si riferirebbero però ad un caso particolare di tutti gl'elementi dai quali può dipendere il valore delle velocità che si cercano; come sarebbero: il carico, il foro per la sua posizione, ampiezza e figura. Ma variando in seguito gradatamente tutti questi elementi, e ripetendo per ciascun caso le medesime esperienze, potremo ottenere tutti i dati che si richiedono per conoscere la legge generale del movimento del fluido.

(1) Si dà tal nome alla forza colla quale la pallina tende ad ascendere nel liquido, attesa la sua minore gravità specifica.

Per passare poi dai valori delle forze che animano le varie molecole fluide a quelli delle velocità che gli corrispondono, ritenendo l'ipotesi assai finora accreditata, che le resistenze dei mezzi contro i corpi solidi nei reciproci loro movimenti agiscano nella ragione dei quadrati delle velocità, potremo valerci della formola seguente

$$(1) \dots\dots\dots v = \sqrt{\frac{z}{k}}$$

in cui v dinota le velocità cercate, z le forze surriferite, e k una costante da determinarsi per mezzo dell'esperienza. Infatti se si consideri la pallina in un punto qualunque della massa liquida in moto, vedesi che nel primo istante agisce con una certa forza z , nella direzione contraria a quella del movimento del liquido; ed il liquido le oppone una resistenza eguale a $k v^2$; quindi essa si deciderebbe a muoversi con una velocità dovuta alla forza $z - k v^2$ nella direzione della forza z , ovvero in quella della velocità del liquido, secondochè si avesse $z >$, o $< k v^2$. Nei punti corrispondenti ai diversi valori di z che si ottenessero colle riferite sperienze, la pallina si troverebbe al limite delle due direzioni; dovrebbe dunque avere $z = k v^2$, e quindi $v = \sqrt{\frac{z}{k}}$; che è la formola (1). Per

determinare la costante k , possiamo procedere nel seguente modo. Se si trasporta una pallina simile a quella soprammentata ad una certa profondità in un vaso ripieno di liquido in quiete, e si lascia libera a se medesima; essa si solleverà nella direzione verticale con una forza acceleratrice espressa da $\frac{dv}{dt} = z - k v^2$, in cui t dinota il tempo del suo movimento, contato dall'istante di partenza; e le altre lettere hanno lo stesso significato di quelle della formola (1). Integrando due volte questa equazione, col mezzo della nota formola

$v dt = ds$, in cui s dinota lo spazio percorso dal mobile, giungesi ad un' espressione fra z, s, t, k , dalla quale potremo facilmente dedurre il valore di k ; somministrandoci l'esperienza quelli di tutte le altre quantità.

§. II.

Dell'applicazione del metodo esposto nel precedente paragrafo al caso del foro d'emissione nel fondo del recipiente per le molecole che restano nella verticale corrispondente al foro stesso.

Nel caso che il foro d'emissione sia nel fondo del recipiente che contiene il liquido in efflusso, non v'ha dubbio alcuno che la linea percorsa dalle molecole che sovrastano il suo centro, specialmente se esso è di figura circolare, non sia la verticale.

Per applicare il metodo esposto nel precedente paragrafo alla ricerca delle velocità delle molecole fluide che percorrono questa verticale, abbiamo costruito l'apparecchio che segue.

Un piccolo telaio di figura rettangolare, composto di quattro regoletti di legno, s'introduceva verticalmente nell'interno di un vaso prismatico che avevamo scelto per tenervi il liquido da esplorarsi, in modo che due de' suoi regoli rimanevano orizzontali. Questi due regoli erano così prolungati, che il superiore si appoggiava sui bordi dell'apertura del vaso, e vi si fissava stabilmente a contrasto per mezzo di apposite intaccature, tentando solo di trasportare il piano del telaio in posizione normale alle due pareti laterali del vaso stesso; e l'altro, premeva allora con forza le pareti medesime: onde tutto restava perfettamente immobile. Alla metà di ciascuno dei due mentovati regoli orizzontali, era praticato un foro verticale che trapassava interamente le loro grossezze, e le su-

perficie interne di tali fori erano tutte ricoperte di pelle. Per i medesimi fori passava un tubo di cristallo da barometri, e vi poteva scorrere colla massima facilità di moto lento e regolare; al quale era poi congiunto nella medesima direzione dalla parte inferiore, un filo metallico di moderata grossezza, che si ripiegava verso la fine ad angolo prossimamente retto. L'estremità della parte piegata di questo filo, era guarnita di un anello circolare di raggio poco minore di $3,^{mm}50$; di finissimo filo metallico, il quale vi stava applicato in posizione orizzontale, per un gambo molto sottile, in modo che era interamente libero e da essa distante 2^{mm} circa. In prossimità del tubo, si ergeva verticalmente sul regolo superiore del telajo, un quadrello di legno munito di scala in millimetri in una delle due faccie corrispondenti al piano del telajo, lungo la quale scorreva un indice fissato al cilindro di cristallo, quando questo movevasi verticalmente. La lunghezza del tubo unita a quella del prolungamento metallico era tale da poter condurre l'anello sul fondo del vaso, e l'indice applicato presso la sua sommità notava allora sulla scala il numero corrispondente al contatto dell'anello col fondo.

Disposto l'apparecchio suddescritto in una tal posizione che il centro dell'anello potesse corrispondere sulla verticale del centro del foro del vaso, era facile introdurre sotto l'anello stesso una pallina di 7^{mm} di diametro, e quindi facendo scorrere con diligenza il tubo di cristallo, trasportarla in basso, mantenendola sempre sulla medesima verticale. In tal modo, la pallina trovavasi sempre libera nel senso della velocità del liquido, nè l'urto di questa contro le parti circostanti dell'apparecchio, poteva molto disturbare l'azione diretta del mezzo sovra di lei; perchè l'anello era di filo finissimo, e se si aveva cura di tenerlo ben tondo, doveva combaciare totalmente colla sua superficie; e l'estremità del filo metallico a cui il medesimo si applicava, era assai discosta. L'oggetto della scala graduata e dell'indice che

abbiamo rammentati nell'apparecchio, era quello di determinare in millimetri le distanze dell'anello dal foro del vaso, quando veniva abbandonato dalla pallina. Per ottenerle, dovevasi confrontare sulla scala il numero corrispondente al contatto dell'anello col fondo, con quelli che indicava rispettivamente l'indice, nei momenti in cui la pallina era tratta dalla velocità del liquido. Ma siccome l'anello ed il suo gambo erano di filo molto sottile, con facilità poteva variare di posizione il piano dell'anello: ciò che avrebbe reso erroneo il numero corrispondente al contatto dell'anello col fondo, e quindi erronea la distanza cercata. Affine di evitare questo caso, si fece chiudere ad un assistente il foro d'emissione con un dito, e poi si trasportò in basso l'anello fino ad arrivare al dito medesimo; in modo che girando orizzontalmente il tubo, l'anello vi scorresse sopra con un contatto leggerissimo, il grado del quale fu ad un di presso apprezzato dall'assistente medesimo. Dopo di che misurammo, per mezzo della sopra indicata scala, la piccola distanza che passava dal piano del foro del vaso all'anello. Eseguita poi che si aveva un'esperienza, notavamo prima sulla scala il numero dei millimetri che contava l'indice, mentre l'anello stava sempre nel luogo in cui lo aveva abbandonato la pallina tratta dalla velocità del liquido; quindi si trasportava in basso l'anello con diligenza fino a toccare quel dito dell'assistente, con cui aveva già serrato di nuovo il foro del vaso; del che n'avvertiva l'assistente medesimo, e notavamo ancora il numero contato dall'indice sulla scala. La differenza dei due numeri osservati, aggiunta alla distanza dell'anello dal foro nella sua stazione più bassa, era la misura cercata. Affinchè quest'ultima distanza non venisse sensibilmente alterata, avevamo cura che il dito, col quale chiudevasi il foro del vaso, fosse sempre lo stesso; e che non si stancasse di troppo stando molto in disagio, onde non venisse a perdere di sensibilità, e giudicare quindi con errore del grado del contatto coll'anello.

§. III.

Della maniera di formare le palline da porsi sotto l'anello dell'apparecchio descritto nel precedente paragrafo.

Uno dei cardini principali su cui riposa quasi totalmente l'esattezza del metodo adottato nelle nostre ricerche consiste nella sollecita rinnovazione della pallina che serve a specolare il liquido in modo che mantenga lo stesso diametro, la perfetta sfericità, e vada variando di peso. A quest'oggetto le abbiamo costruite di cera alquanto pura. Resa pastosa primieramente la cera per mezzo del fuoco, si formava colle dita una pallina poco maggiore della grandezza richiesta, avendo cura di lasciarvi nell'interno una certa quantità d'aria più o meno grande secondo il peso che le si voleva dare; quindi si continuava ad attondarla sopra il fuoco sempre colle dita, finchè non avesse presa tutta la figura sferica; lochè si otteneva speditamente in grazia del calorico che dilatava l'aria lasciata nel suo interno, e della contemporanea compressione esercitata colle dita alla sua superficie, per quanto era possibile in tutti i sensi, facendola ruotare con molto studio. Dappoi s'introduceva in un foro circolare praticato in una piccola lastra metallica di un diametro eguale a quello che si voleva dare alla pallina, ed in questo, che aveva i bordi assottigliati, si faceva ruotare in tutti i sensi finchè non fosse giunta a combaciarsi nel miglior modo girandola comunque. Quando poi volevasi variare la sua gravità specifica: se essa doveva farsi maggiore, si compenetravano nella sua superficie alcuni piccoli granelli di limatura di piombo, e quindi si rotondeggiava nuovamente col solito cerchietto: se essa invece doveva diminuirsi, allora si forava con una spilla, e chiuso poi il foro alla superficie, con quella poca di ce-

ra che nell'eseguirlo le si era sollevata al margine, si faceva ruotare nell'anello metallico affinchè riassumesse la deformata sfericità. Acquistato un pò d'esercizio in queste operazioni si operava con molta esattezza.

§. IV.

Della maniera di determinare le gravità specifiche delle palline.

I valori delle spinte verticali delle palline che si adoperavano, li abbiamo determinati colla bilancia idrostatica. Trattandosi però di forze piccolissime e di gran momento per noi, faceva d'uopo di usare tutte le diligenze possibili, onde ottenere dei risultati fiduciarj. Nella seguente maniera abbiamo proceduto in questa ricerca.

Una piccola rete metallica di maglia assai fitta stava orizzontalmente immersa in una quantità d'acqua contenuta in un vaso sottoposto ad uno dei piattelli della bilancia, a cui era essa applicata per mezzo di un filo, che avevamo scelto di metallo onde non potesse bagnarsi per effetto della capillarità, in quella parte che stava fuori del liquido e così variare di peso; ed era inoltre molto sottile affinchè immergendo più o meno nel piccolo oscillare della bilancia attorno lo stato d'equilibrio, nell'atto che veniva posta in azione, non disturbasse l'equilibrio stesso con accelerare le oscillazioni. Avendosi equilibrata la bilancia allorchè la reticella stava immersa si ponevano sotto alla medesima le palline da pesarsi, procurando di espeller loro tutta l'aria che le si era alloggiata sulle superficie, e si stabiliva nuovamente l'equilibrio. Dalla variazione che avevano subito i pesi posti nei piattelli nel passaggio a quest'ultimo equilibrio della bilancia da quello precedente, si traeva il valore richiesto. Per equilibrare colla maggior precisione possibile la bilancia ci siamo provveduti di piccolissime misure, le quali

si sono ottenute dividendo in varie parti eguali un sottilissimo filo metallico, e ritenendone il peso equivalente al peso totale del filo diviso per il loro numero.

Tra le palline che abbiamo dovuto pesare ve ne erano parecchie che non producevano effetto sensibile sulla bilancia. Per queste il valore della spinta verticale l'ottenevamo pesandone varie riunite insieme, le quali si costruivano in modo che agissero tutte egualmente sotto la reticella, e dividendo il risultato ottenuto per il loro numero. Affine di riconoscere se le palline che dovevamo preparare per pesarle riunite insieme avevano fra loro eguali le gravità specifiche, si trasportavano per mezzo di un filo metallico convenientemente piegato alla sua estremità destinata a ritenerle, fino a toccare il fondo di un vaso che conteneva dell'acqua in massima quiete ad un'altezza costante di 237^{mm}; quindi lasciate libere a loro medesime, osservavamo con un buono orologio che contava i secondi, i tempi che impiegavano a giungere sulla superficie di livello del liquido. Come le palline erano sfere di raggi eguali dovevano percorrere in tempi eguali la medesima altezza di acqua, perchè le rispettive gravità specifiche non differissero fra loro.

Tutta la difficoltà di questi sperimenti consisteva nella destrezza che dovevasi avere in distaccare il ritegno dalla pallina quando la lasciavamo libera sul fondo del vaso onde non si alterasse con urti la forza motrice propria alla sua spinta verticale, per combinare che le origini de' suoi innalzamenti corrispondessero esattamente con uno scatto di secondo dell'orologio, e per non produrre alcun disturbo alla quiete del liquido. Di questo mezzo di riscontro ci siamo valse ancora all'occorrenza di costruire alcune palline che dovevano sostituirsi ad altre perdute o guaste, e di correggere quelle che avessero subito qualche alterazione di peso.

L'effetto dell'alterazione di peso nelle nostre palline si verificava assai frequentemente, e tanto più quanto le

loro gravità specifiche erano più prossime a quella dell'acqua. Abbiamo osservato che quelle palline che impiegavano a traversare la nota altezza di acqua un tempo minore di $10''$, le loro gravità specifiche si mantenevano costanti circa un giorno, se non più: quelle i di cui tempi erano compresi tra $10''$ e $30''$ circa, variavano di peso con maggior sollecitudine, ma alquanto discretamente: quelle poi che oltrepassavano questo limite, non erano capaci di mantenere costante il peso, che delle frazioni d'ora.

L'espedito di moltiplicare le palline sotto la reticella per ottenere un'azione sensibile sulla bilancia non è più utile quando il loro numero dovesse essere alquanto grande, ed è impossibile a praticarsi quando esso dovesse essere grandissimo. Una prima difficoltà in conferma di ciò sembrerebbe, che dovendosi costruire molte palline è più facile d'incorrere in qualche imperfezione notevole di sfericità e disuguaglianza di volume; e resta altresì molto più difficile di sloggiare tutta l'aria dalle loro superficie, nel porle sotto la reticella della bilancia: ciò che porta a questo — che al diminuire del risultato, crescerebbe l'errore sperimentale che lo affetta — D'altronde però tutti gl'errori che sono indipendenti dai difetti delle palline, come sarebbero, la poca sensibilità della bilancia, l'azione della capillarità sul filo metallico che sostiene la reticella, la mite abilità dell'esperimentatore in pesare; nel dividere il peso ottenuto per il numero delle palline pesate, onde ottenere il risultato finale, vengono anch'essi divisi per questo numero, e perciò diminuisce la loro influenza sul risultato medesimo; e tanto più essa diminuisce quanto più è grande il numero delle palline; o sia quanto più è minore il valore cercato. Ritenendo le due circostanze producenti azioni in tal modo contrarie come compensatrici dei loro effetti, questa prima difficoltà rimarrebbe superata.

Quello però che veramente ne osta si è l'avere incontrata una difficoltà grandissima nell'aggiustare le pal-

line in modo che traversino la notata altezza di acqua in un tempo assegnato assai grande; circostanza che appunto si combina nel caso del bisogno di molte palline per ottenere azione sensibile sulla bilancia. Tale difficoltà incomincia a manifestarsi per quelle palline che devono percorrere la solita altezza di acqua in tempi poco maggiori di 12, e va poi sempre crescendo al crescere del numero dei secondi che le viene assegnato per fare quel tragitto. Ci siamo ritrovati a passare delle lunghe ore dietro qualche pallina alla quale si voleva assegnare un tempo anche compreso fra 30" e 50"; e finalmente giunti all'intento, la pallina ottenuta non è rimasta costante di peso neppure un ora. Molto maggiori poi erano le difficoltà e la spesa di tempo che s'incontravano per costruire palline corrispondenti a tempi maggiori di questi.

Se l'aggiustare una sola pallina di piccolissima gravità specifica porta a tanta spesa di tempo, che sarebbe il dover preparare tutte quelle occorrenti per poterla pesare? E se le palline aggiustate non mantengono costante la loro gravità specifica che delle frazioni d'ora, come mantenere invariabili le palline costruite le prime, per il tempo occorrente onde aggiustarle tutte? Il sussidio della moltiplicazione delle palline non può adunque assolutamente estendersi, come abbiamo asserito in principio, al di là di un certo limite nella determinazione dei loro pesi specifici, ed incomincia ad essere incomodo, noioso, lungo e mal sicuro di precisione quando le palline da pesarsi devono traversare l'altezza di 237^{mm} di acqua in quiete in tempi qualche poco maggiori di 12".

Dei tempi impiegati dalle diverse palline a traversare l'altezza di 237^{mm} di acqua in quiete, e della formula che collega questi tempi colle rispettive spinte verticali.

Nelle nostre sperienze per procedere con sicurezza si è arrestata la determinazione dei pesi specifici alla pallina corrispondente al tempo 12". Dobbiamo però osservare che se non si è saputo giungere alla determinazione sperimentale di pesi piccolissimi, neppure lo esigevano le nostre ricerche. Infatti qual fiducia potrebbesi dare ad un risultato sperimentale proveniente da una pallina la cui gravità specifica fosse vicinissima a quella dell'acqua? la coesione del liquido, le piccole scosse che essa potrebbe risentire nel momento del distacco dall'anello che la trasporta in basso ec. sono tanti forti motivi per renderlo invalido. Le nostre ricerche, relative alla verticale corrispondente al foro d'emissione, le abbiamo limitate alla pallina che traversava la nota altezza di acqua in 32" di tempo, e sebbene da 12" a 32" potessero entrare 20 palline di tempo differente, costruendole in modo da traversare ciascuna la nota altezza di acqua in un numero intero di secondi, non abbiamo creduto poterne adoprare con vantaggio, oltre quella corrispondente a 32", che la sola del tempo 20"; delle quali il peso specifico lo abbiamo dedotto analiticamente, per mezzo di quelli delle altre palline ottenuti colla bilancia.

Nella seguente tavola riportiamo i valori numerici ottenuti per quelle palline, fra le varie adoperate nelle sperienze che si sono potute pesare.

TAVOLA I.

Sulla relazione fra le spinte verticali delle palline, ed i tempi da esse impiegati a traversare l'altezza di 237^{mm} di acqua in quiete.

Tempi in secondi	2	3	4	5	6	7	8	9	12
Forze in diecimilles. di gramma	155,00	80,00	55,00	41,67	29,90	21,67	15,00	11,60	9,10

Affine di ottenere dei valori approssimati ancora per le spinte verticali delle palline, rispettivamente corrispondenti ai tempi 20" e 32", i quali non si sono determinati colla bilancia, conveniva investigare una formola che rappresentasse i valori delle spinte verticali delle palline pesate, ed i rispettivi tempi da esse impiegati a traversare l'altezza dei 237^{mm} di acqua in quiete. A tale oggetto, assumendo le spinte verticali delle palline per ascisse, ed i tempi surriferiti per ordinate, abbiamo costruito graficamente la curva relativa a queste quantità. Essa somigliava un ramo d'iperbola equilatera, di cui gl' assintoti fossero le rette rettangolari che avevamo scelte per assi coordinati: se non che non era simmetrica attorno la retta che divideva per metà l'angolo formato dagli assi medesimi, ma invece accostavasi più all'asse sul quale si contavano i tempi di quello che all'altro su cui contavansi le spinte verticali.

Considerando che al diminuire di queste spinte verticali crescevano i tempi che le rispettive palline dovevano impiegare per trascorrere la nota altezza di acqua, e che annullandosi le medesime spinte verticali questi dovevano diventare infiniti; concludemmo essere realmente un asintoto della curva l'asse sul quale si contavano i tempi. Osservando poi che al crescere delle rammentate spinte verticali diminuivano i tempi, ma che questi non poteva-

no ridursi a zero se le spinte non erano diventate infinite, si dovè ritenere come assintoto della curva l'asse ancora sul quale si contavano le spinte verticali. Così la nostra curva non presentava altra differenza dall'iperbola equilatera che la non simmetria surriferita. Dovevasi adunque assumere per la sua equazione quella stessa dell'iperbola equilatera, così modificata che includesse tal condizione. Noi pertanto si assunse l'equazione seguente

$$t z^b = a$$

in cui t e z rappresentano rispettivamente i tempi impiegati dalle palline a percorrere l'altezza di 237^{mm} di acqua in quiete, e le loro spinte verticali; ed a , b due costanti, da determinarsi in modo che la formola convenga il più possibile ai risultati sperimentali.

Se di questa equazione se ne prendono i logaritmi dei due membri si ha

$$\log t + b \log z = \log a$$

e facendo $\log a = c$

$$\log t + b \log z = c$$

Determinando le costanti b , c col metodo dei minimi quadrati, trovasi

$$b = 0,58; c = 1,60$$

assumendo per unità di tempo il secondo, e per unità di peso il diecimillesimo di gramma.

Abbiamo però osservato che l'equazione meglio soddisfa prendendo

$$b = 0,61; c = 1,65.$$

Se si sostituiscono questi valori di b , c nell'equazione precedente, si ottiene

$$\log t + 0,61 \log z = 1,65.$$

Per conoscere il grado di fiducia che merita questa formula, abbiamo calcolato i valori di z corrispondenti ai valori di t che si leggono nella tavola 1^a. I numeri che si sono ottenuti li abbiamo registrati nella seguente tavola, di fronte ai rispettivi valori di t ; cui sono aggiunti i valori di z che corrispondono alle due palline che traversano l'al-

tezza di 237^{mm} di acqua in quiete rispettivamente nei tempi 20", e 32", le quali non furono pesate, calcolati colla formola, che specialmente a quest'oggetto abbiamo stabilita; ed in una quarta colonna le differenze degli altri valori di z , o spinte verticali, calcolati colla formola medesima, dagli analoghi ottenuti dall'esperienza.

TAVOLA II.

Sul confronto dei numeri somministrati dall'esperienza con gli analoghi dedotti dalla formola assunta per rappresentarli.

Valori del tempo t in secondi	Spinte verticali z in diecimillesimi di gramma		Differenze del calcolo dall'esperienza
	ottenute dall'esperienza	dedotte dalla formola	
2"	155,00	162,10	+ 7,10
3"	80,00	81,28	+ 1,28
4"	55,00	52,48	— 2,52
5"	41,67	35,48	— 6,19
6"	29,90	26,30	— 3,60
7 "	21,67	19,50	— 2,17
8"	15,00	16,60	+ 1,60
9"	11,60	13,48	+ 1,88
12"	9,10	8,51	— 0,59
20"		3,72	
32"		1,66	

Vedesi che fra le differenze del calcolo dall'esperienza ve ne sono due un pò forti, quelle cioè di 7,10, e di 6,19, ma come esse sono sopra numeri alquanto grandi 162,10 cioè, e 35,48, non restano tanto imponenti, e le altre aberrazioni essendo tutte assai piccole la formola può essere discretamente bene accettata.

Dei risultati sperimentali ottenuti speculando la verticale sul foro d' emissione della massa liquida effluente.

Preparato tutto nel modo che abbiamo esposto si sono intraprese le nostre ricerche. Per avere dei valori più fiduciarîi, abbiamo ripetuto più volte le medesime esperienze e si è poi assunta la loro media per risultato finale. Tali ripetizioni, non si facevano sempre di egual numero; quando i risultati parziali erano assai concordi fra loro c'arrestavamo presto, se al contrario essi differivano molto allora si protraevano più oltre.

Le medesime sperienze si sono poi ripetute relativamente a cinque diversi battenti, per conoscere la legge con cui la variazione dell' altezza del liquido modifica la velocità dell' efflusso. Per operare con più speditezza e precisione si sperimentava prima sopra il battente maggiore, quindi diminuendo l' acqua del vaso, passavamo di mano a mano a quelli più bassi; per cui venivano spesso tutti esplorati colla medesima pallina, senza che neppure abbisognasse correggerne la gravità specifica, specialmente se questa era di quelle meno variabili. Per ottenere poi che il carico potesse riguardarsi costante nei nostri risultati, si è avuto cura che nel momento del distacco della pallina dall' anello che la trasportava in basso, l' acqua fosse sempre, presso a poco, alla medesima altezza.

Non abbiamo però considerato che il caso di un solo foro d' emissione, di figura circolare di raggio eguale a 4^{mm},50; situato nel centro del fondo del vaso prismatico che si adoprava. E le dimensioni del fondo medesimo erano 295^{mm}; 405^{mm}. Nella tavola seguente si riportano tutti i numeri che abbiamo ottenuti non tanto per le medie dei risultati parziali, quanto ancora quelli stessi di ciascheduno di questi risultati, affine di dare maggior conto del nostro operato.

I valori delle spinte verticali delle palline che si leggono in questa tavola sono calcolati colla formula data nel precedente paragrafo. Ad ogni forza corrisponde un certo numero di risultati sperimentali, i quali sono seguiti dalla media rispettiva.

TAVOLA III.

Sulla relazione tra i battenti, le spinte verticali delle palline e le distanze dal foro di emissione delle molecole liquide esplorate.

Distanze in millimetri dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate, per un battente di					Forze delle Palline in diecimilles. di gramma
100.mm	220.mm	340.mm	460.mm	580.mm	
{ 10,25	11,75	12,00	13,25	13,00	162,10
	9,75	11,50	13,50	14,25	
	10,75	12,50	13,75	14,00	
	10,00	11,75	14,50	14,50	
	9,50	10,50	11,50	11,25	
		12,50	13,00		
		13,50			
medio	10,05	11,60	13,04	13,38	
	11,60	15,40	15,00	17,30	
	11,75	15,00	13,50	18,30	
{ 13,10	12,50	15,50	17,00	14,75	81,28
	11,85	12,65	12,50	14,50	
	11,85	13,10	14,30	16,80	
	12,00	15,35	14,50	15,00	
		12,70	14,50	17,00	
medio	12,03	13,81	14,26	16,56	
	14,25	16,75	18,75	21,75	
	13,50	17,50	21,50	21,50	
	14,25	17,50	19,50	19,75	
	14,25	17,50	19,00	21,25	
	14,50		17,50	22,00	
medio	14,15	17,31	19,25	21,06	52,48
	17,75	19,75	22,00	22,25	
	15,10	19,00	19,75	23,25	
	17,00	18,90	20,50	23,10	
	18,00	21,00	23,25	23,75	
	17,75	18,40	22,25	22,75	
		20,50	21,10	23,00	
		22,05		24,00	
medio	17,12	19,59	21,56	23,02	
			23,02	23,04	

Segue la Tavola III.

Distanze in millimetri dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate, per un battente di					Forze delle Palline in diecimilles. di gramma
100.mm	220.mm	340.mm	460.mm	580.mm	
<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	19,00	22,60	23,20	24,60	25,75
	18,40	23,20	23,50	23,70	24,85
	19,45	22,00	24,80	24,00	25,30
	18,80	22,55	24,35	25,00	25,50
	19,20	22,50	23,50	25,00	
			23,00	23,45	
				25,00	
				24,60	
	medio 18,97	22,57	23,73	24,42	25,35
	19,50	21,10	24,10	27,50	27,60
<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	20,00	20,00	21,30	24,60	31,00
	20,40	18,80	21,95	27,20	28,60
	19,90	21,90	25,00	23,70	27,25
	19,45	22,50	25,35	26,20	29,30
	19,30	22,65	25,45	27,20	27,90
		23,10	24,60	26,50	27,20
		22,85	23,60	23,80	
		22,35		24,00	
	medio 19,76	21,69	23,92	25,75	28,41
	17,50	19,00	21,25	25,75	29,00
<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	17,25	20,00	25,75	27,75	29,75
	17,00	20,00	22,75	24,50	22,75
	17,00	18,75	23,00	24,25	26,25
			24,75	28,25	23,25
				25,50	
				27,50	
	medio 17,19	19,44	23,50	26,10	26,29
	24,90	25,10	27,50	30,90	32,70
	23,85	25,20	28,60	30,30	32,60
	23,60	25,00	28,70	30,20	31,80
<div> <div></div> <div></div> <div></div> <div></div> </div>	24,00	25,10	28,50	29,30	32,35
	23,10		27,00	29,60	
	23,80		28,60		
	23,75		29,00		
medio	23,86	25,10	28,27	30,06	32,36
					13,48

Segue la Tav. III.

Distanze in millimetri dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate, per un battente di					Forze delle Palline in decimilles. di gramma
100.mm	220.mm	340.mm	460.mm	580.mm	
24,00	27,40	31,50	32,75	35,10	8,51
23,40	28,40	30,00	34,00	34,50	
23,30	26,40	29,30	33,60	35,50	
24,05	27,50	29,50	32,70	36,50	
24,70	28,50	30,40	33,10	35,90	
	27,00		33,10		
medio 23,89	27,53	30,14	33,21	35,50	
29,40	34,55	36,00	39,40	40,90	
29,60	34,70	36,70	41,00	39,80	
29,65	33,75	37,60	40,00	41,95	
29,40	34,90	37,50		41,50	
	34,40			40,80	
				41,10	
				45,70	
medio 29,51	34,46	37,18	40,13	41,68	3,72
38,40	42,00	46,10	49,00	52,50	1,66

Le sperienze relative alla forza 1,66 non sono state ripetute perchè si eseguivano con moltissima precisione, in grazia della distanza assai grande dal foro d'egresso a cui la pallina si distaccava dall'anello, e della lentezza colla quale si accostava al foro medesimo. In queste sperienze, quando la pallina era giunta al luogo da cui veniva tratta dalla velocità del fluido, si serrava il rammentato foro con un dito, prima che essa uscisse fuori del vaso, e quindi fatta ritornare sotto l'anello si toglieva il dito dal foro con gran lentezza facendovelo scorrere sopra, ed osservavamo se la pallina si distaccava dall'anello stesso nell'istante in cui rimaneva aperto tutto il foro. Se essa movevasi prima, ovvero restava ferma ancora essendo aperto tutto il foro, innalzavamo o abbassavamo un poco l'anello, e quindi si ripeteva la medesima esperienza.

Osservando i numeri di questa tavola ci sembrò scorger in alcuni di loro poca regolarità per cui entrammo in sospetto d'inesattezza nelle esperienze. Fra i numeri meno fiduciarî noi includevamo alcuni di quelli appartenenti alla forza 52,48, i quali si erano ottenuti dai primi sperimenti. Per convalidare il concepito sospetto ci piacque ripetere le sperienze relative a questa forza: e siccome ciò accadde molto tempo dopo che si erano ottenuti tali risultati, non adoperammo neppure la stessa pallina. Eseguito il riscontro si ottennero i numeri seguenti per le distanze relative ai carichi di

100.mm	220.mm	340.mm	460.mm	580.mm
15,40	17,50	19,10	21,10	21,25
14,90	17,25	19,45	20,70	21,70
14,90	17,20	19,30	20,30	
15,45				
medio 15,16	17,32	19,28	20,70	21,47

Essi come vedesi, nel tempo che hanno acquistata la regolarità non discernibile nei primi non si sono notevolmente da questi allontanati. Sembrerebbe pertanto potersi concludere, che il difetto riconosciuto nei risultati meno concordi della tavola III. è totalmente attribuibile alla minore destrezza che in principio del nostro lavoro si aveva nella pratica esecuzione di queste delicatissime esperienze; e così in certo modo resterebbe costatato, che il cangiamento delle palline e le correzioni delle loro gravità specifiche non portano danno notevole ai nostri risultati.

Dobbiamo avvertire che dei numeri relativi alla spinta verticale 16,60 sono con evidenza erronei i tre che corrispondono rispettivamente ai battenti 100mm, 220mm, 340mm, perchè minori di alcuni altri risultati numerici relativi ai medesimi battenti ed a forze più grandi, le quali devono essere, senza dubbio, superate dalla velocità del liquido in vicinanze maggiori del foro; e aberra un poco in egual modo il numero 21mm,69, relativo al battente di 220mm, ed alla forza 19,50. L'aberrazione però di quest'ultimo numero, come pure quella del numero dei primi tre sopra indicati relativo al battente di 340mm, possono trascurarsi come assai piccole; ma quelle degli altri due numeri non sono trascurabili, e sembra propriamente esservi corso qualche errore nella pallina, variandola o modificandola dopo di avere esplorati i tre battenti maggiori; perchè i risultati sperimentali di cui questi numeri sono le medie, si vedono assai concordi fra loro specialmente quelli relativi al carico di 100mm, i quali non differiscono fra loro che di frazioni di millimetro. Ma osservando che fra tutti i numeri della tavola si riscontrano queste due sole aberrazioni attribuibili con evidenza ai difetti delle palline, le possiamo ritenere come accidentali e non considerarle. Vedremo in seguito come la formula assunta per rappresentare i valori numerici

della nostra tavola corregge convenientemente queste aberrazioni.

Si riportano qui appresso alcuni risultati numerici ottenuti da palline di piccolissime forze, esplorando sopra il battente di 240mm. Siccome i tempi che queste palline impiegavano a traversare l'altezza di 237mm di acqua in quiete erano molto grandi, non sono state calcolate le forze che gli corrispondono colla formula data nel paragrafo precedente, per timore d'incorrere in gravi difetti, trattandosi di numeri molto al di fuori dei limiti entro i quali quella formula fu stabilita.

Si pongono perciò di fronte alle rispettive distanze dal foro d'emissione dei punti cui sono state tratte le palline dalla velocità del fluido, i tempi surriferiti espressi in secondi

Tempi	Distanze
∞	180mm
140	80
135	80
125	105
120	75.

Il luogo corrispondente alla distanza 180mm è occupato dal segno ∞ perchè la relativa pallina stava equilibrata in qualunque punto ponevasi della massa liquida in quiete. Questa pallina fu collocata nel vaso sulla verticale sul centro del foro d'emissione, alla distanza da questo di 180mm, e tosto che il liquido concepì movimento fu trattata dalla sua velocità. Gli altri numeri mostrano che al di là di un certo limite non è più applicabile il nostro metodo alla ricerca delle velocità nell'efflusso dei liquidi.

Sembra, come è consentaneo alla ragione, che le velocità a qualche distanza dal foro si succedano quasi

eguali, per cui le piccole cause di ritardo o di acceleramento del distacco delle palline dall'anello producono tutto il loro effetto entro spazj molto grandi. Tutto questo comprova ciò che dicemmo nel paragrafo precedente, all'occasione d'incontrare ostacolo nel determinare le forze piccolissime delle palline,

§. VII.

Della formola che vincola i precedenti risultati, e perciò rappresenta il legame tra i battenti, le forze delle palline e le distanze dal foro d'emissione delle molecole liquide situate sulla verticale sul centro del foro stesso, scolpito nel fondo del vaso che contiene il fluido.

Per investigare una formola che col minor numero di costanti potesse rappresentare le quantità variabili delle nostre sperienze si è creduto conveniente la costruzione di alcune curve con varii dei risultati d'esperienza della tavola III., assumendoli per valori particolari di coordinate scorrenti, le quali ridotte a formule analitiche, e le costanti di queste convenientemente combinate cogli altri risultati sperimentali della medesima tavola non concorsero nella costruzione delle rammentate curve, ci somministrassero il legame fra tutti gli elementi della questione, o sia l'equazione cercata. Nelle nostre sperienze gli elementi variabili sono tre; i battenti cioè, le distanze dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate, e le spinte verticali delle palline. Essendo cinque i battenti considerati, se si prendono a combinare fra loro i risultati sperimentali relativi alle distanze e alle forze, dovremo costruire cinque curve distinte, ciascuna delle quali sarà relativa ad un battente particolare. Eseguendo queste costruzioni si riconoscerebbe che la figura delle curve risultanti somiglia

quella delle logaritmiche. Assumiamo dunque per rappresentare questi cinque casi particolari rispettivamente le cinque equazioni seguenti.

$$y = a \log z + b ; 100$$

$$y = a' \log z + b' ; 220$$

$$y = a'' \log z + b'' ; 340$$

$$y = a''' \log z + b''' ; 460$$

$$y = a^{iv} \log z + b^{iv} ; 580$$

nelle quali, y dinota le distanze dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate, z le forze delle palline, e $a, b ; a', b' ; a'', b'' ; a''', b''' ; a^{iv}, b^{iv}$ dieci costanti da determinarsi nel modo più conveniente, onde le rispettive equazioni meglio soddisfino ai risultati sperimentali ai quali si riferiscono; ed i numeri scritti di fronte a ciascheduna equazione, dinotano in millimetri le altezze dei battenti a cui esse rispettivamente convengono. Se si determinano queste costanti col metodo dei minimi quadrati, assumendo per unità lineare il millimetro, e per unità di forza il diecimillesimo di gramma, si otterrà

$$a = -13,26 ; b = 37,19$$

$$a' = -17,48 ; b' = 46,74$$

$$a'' = -17,43 ; b'' = 48,02$$

$$a''' = -18,10 ; b''' = 50,66$$

$$a^{iv} = -19,30 ; b^{iv} = 53,59$$

e sostituendo questi valori nelle equazioni precedenti, si hanno le cinque formole che seguono

$$(1) \quad \dots \left\{ \begin{array}{l} y = 37,19 - 13,26 \log z ; 100 \\ y = 46,74 - 17,48 \log z ; 220 \\ y = 48,02 - 17,43 \log z ; 340 \\ y = 50,66 - 18,00 \log z ; 460 \\ y = 53,59 - 19,30 \log z ; 580 \end{array} \right.$$

Assumendo adesso per ascisse i battenti e per ordinate i moduli di queste logaritmiche, e tracciando la curva a loro relativa, non tarderemmo a riconoscere che questa pure si avvicina ad una logaritmica. Prendiamo dunque per

rappresentare questi elementi l'equazione seguente

$$M = c \log x + d$$

in cui M dinota i moduli, x i battenti, e c , d sono le due costanti da determinarsi. Applicando il metodo dei minimi quadrati alla determinazione di tali costanti, si ottiene

$$c = 6,94; d = 0.$$

Sostituendo questi valori in luogo di c , d nell'equazione precedente, si ha

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad M = 6,94 \log x,$$

il secondo membro della quale è l'espressione analitica dei moduli delle logaritmiche segnate (1), in funzione dei battenti.

Resta ora da esprimere i termini costanti delle medesime logaritmiche; anch'essi in funzione dei battenti. A tale oggetto calcoliamo colla formola (2) i cinque valori di m che corrispondono rispettivamente ai cinque battenti registrati di fronte alle logaritmiche segnate (1), e sostituiamoli in luogo dei moduli nelle logaritmiche medesime. Otterremo così le cinque formule che seguono

$$y = c - 13,88 \log z \quad ; \quad 100$$

$$y = c' - 16,24 \log z \quad ; \quad 220$$

$$y = c'' - 17,56 \log z \quad ; \quad 340$$

$$y = c''' - 18,46 \log z \quad ; \quad 460$$

$$y = c^{iv} - 19,15 \log z \quad ; \quad 580$$

nelle quali abbiamo posto le costanti indeterminate c , c' , c'' , c''' , c^{iv} in luogo dei termini numerici, a cagione della modificazione che questi devono subire in grazia del piccolo cangiamento sofferto dai rispettivi moduli. Determinando queste costanti col metodo dei minimi quadrati, e sostituendo i loro valori nelle rispettive equazioni, si hanno quelle che seguono

$$y = 38,42 - 13,88 \log z \quad ; \quad 100$$

$$y = 44,11 - 16,24 \log z \quad ; \quad 220$$

$$y = 48,17 - 17,56 \log z \quad ; \quad 340$$

$$y = 51,22 - 18,46 \log z \quad ; \quad 460$$

$$y = 53,36 - 19,15 \log z \quad ; \quad 580.$$

Se assumiamo adesso per ascisse i battenti e per ordinate i termini costanti di queste equazioni, e costruiamo una nuova curva, si riconoscerà che è essa pure una logaritmica. Sia pertanto

$$f = g \log x + h$$

la formula relativa a questa curva, in cui f dinota i termini costanti, x i battenti, e g , h le due quantità da determinarsi col metodo dei minimi quadrati. Eseguendo le opportune operazioni, si trova

$$g = 20,51 \quad ; \quad f = 3,43$$

i quali valori sostituiti nella equazione precedente, danno (3) $f = 20,51 \log x - 3,43$.

Sostituendo il 2.^o membro dell'equazione (2) in luogo del modulo, in una qualunque delle formule segnate (1), ed il 2.^o membro dell'equazione (3) in luogo del termine costante, nella stessa equazione, si ha finalmente

$$y = (20,51 \log x - 3,43) - 6,94 \log x \log z$$

che è l'espressione cercata. Alla quale si può dare la forma

$$y = (2,955 - \log z) 6,94 \log x - 3,43.$$

Per verificare sino a qual grado d'esattezza questa formula rappresenta i numeri della tavola III, possiamo sostituire ad x successivamente i cinque valori dei battenti considerati nelle sperienze, ed a z quelli delle forze delle palline calcolati colla formula data nel paragrafo IV, e dedurre i rispettivi valori di y ; quindi confrontare questi valori con i loro corrispondenti ottenuti dalle esperienze. Eseguendo queste operazioni si trovano i risultati della seguente

TAVOLA IV.

Di confronto tra i risultati d'esperienza e quelli della nostra formola, circa le distanze dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate sulla verticale sul centro del foro stesso.

Valori del Battente x , espressi in millimetri	Spinte verticali z in decimillesimi di gramma	Valori delle distanze y : in mm		Differenza tra il calcolo e l'esperienza
		dati dall'esperienza	dedotti dalla formola	
100	162,10	10,05	6,92	— 3,13
“	81,28	12,03	11,08	— 0,95
“	52,48	14,15	13,78	— 0,37
“	35,48	17,12	16,08	— 1,08
“	26,30	18,97	17,88	— 1,09
“	19,50	19,76	19,68	— 0,08
“	16,60	17,19	20,66	+ 3,47
“	13,48	23,86	21,91	— 1,95
“	8,51	23,89	24,68	+ 0,79
“	3,72	29,51	29,68	— 0,17
“	1,66	38,40	34,54	+ 3,86
220	162,10	11,60	8,67	— 2,93
“	81,28	13,81	13,54	— 0,27
“	52,48	17,31	16,63	— 0,68
“	35,48	19,59	19,39	— 0,20
“	26,30	22,57	21,50	— 1,07
“	19,50	21,69	23,61	+ 1,92
“	16,60	19,44	24,75	+ 5,31
“	13,48	25,10	26,21	+ 1,11
“	8,51	27,53	29,46	+ 1,93
“	3,72	34,46	35,30	+ 0,84
“	1,66	42,00	40,99	— 1,01
340	162,10	13,04	9,65	— 3,39
“	81,28	14,26	14,92	+ 0,66
“	52,48	19,25	18,26	— 0,99
“	35,48	21,56	21,24	— 0,32

Valori del Battente x , espressi in millimetri	Spinte verticali z in diecimil- lesimi di gramma	Valori delle distanze y : in mm		Differenze tra il calcolo e l'esperienza
		dati dall' esperienza	dedotti dalla formola	
"	26,30	23,73	23,52	— 0,21
"	19,50	23,92	25,85	+ 1,93
"	16,60	23,50	27,04	+ 3,54
"	13,48	28,27	28,62	+ 0,35
"	8,51	30,24	32,13	+ 1,99
"	3,72	37,18	38,45	+ 1,27
"	1,66	46,10	44,60	— 1,50
460	162,10	13,38	10,32	— 3,06
"	81,28	16,56	15,86	— 0,70
"	52,48	21,06	19,37	— 1,69
"	35,48	23,02	22,51	— 0,51
"	26,30	24,42	24,91	+ 0,49
"	19,50	25,75	27,31	+ 1,56
"	16,60	26,10	28,60	+ 2,50
"	13,48	30,06	30,26	+ 0,20
"	8,51	33,21	33,95	+ 0,74
"	3,72	40,13	40,60	+ 0,47
"	1,66	49,00	47,06	— 1,94
580	162,10	14,15	10,84	— 3,31
"	81,28	16,33	16,58	+ 0,25
"	52,48	21,52	20,22	— 1,30
"	35,48	23,04	23,48	+ 0,44
"	26,30	25,35	25,97	+ 0,62
"	19,50	28,41	28,46	+ 0,05
"	16,60	26,29	29,80	+ 3,51
"	13,48	32,36	31,52	— 0,84
"	8,51	35,50	35,35	— 0,15
"	3,72	41,68	43,24	+ 1,56
"	1,66	52,50	48,95	— 3,55

Tra le aberrazioni del calcolo dall'esperienza si trova il numero $5^{mm},31$, assai grande, di cui da maggiore il risultato la formola del corrispondente sperimento; ma giova osservare che questa aberrazione è appunto relativa alla forza

16,60 ed al battente 220mm, che notammo al paragrafo precedente essere erroneo in difetto il corrispondente risultato sperimentale; onde piuttosto che screditare la nostra formula l'avvalora maggiormente dimostrandola in certo qual modo corretttrice dei difetti delle sperienze. Le aberrazioni relative alla forza 162,00 presentano qualche singolarità; sono tutte quasi eguali e di segno eguale. Potrebbe essere che una piccola modificazione fatta subire alla formula diminuisse queste aberrazioni alquanto forti, e forse ancora rendesse più appagante la successione dei segni di tutte le altre. Tuttavia vedesi che essa dentro i limiti delle sperienze sodisfa assai bene, e la possiamo accettare.

Fermiamoci adesso brevemente a discutere questa formula, per riconoscere quanto sia atta a rappresentare i valori delle sue variabili corrispondenti al di fuori dei limiti delle sperienze. Facendo $z = 0$ risulta $y = \infty$ per qualunque valore di x maggiore di 1, $y = 0$ per $x = 1$, ed $y = -\infty$ per qualunque valore di x minore di 1; ma come non può esservi valore di $z = 0$ in una massa finita di acqua effluente, questa contraddizione non è valutabile per l'uso della formula. Quando $z = 1$ si ha $y = 20,51 \log x - 3,43$, risultato che non apparisce contraddittorio al fatto. Per $z = 902$ abbiamo $\log z = 2,955$, e quindi $y = -3,43$ per qualunque valore di x ; lochè ci dimostra non potersi attribuire a z un valore maggiore di 898,57 qualunque sia x : per quanto si scorga che ad un battente molto grande può un tal valore convenirle. Facendo $x = 0$ si ha $y = \mp \infty$ secondochè sia $z >, 0 < 902$, ed $y = 0 (-\infty) - 3,43$, per $z = 902$; risultato contraddittorio, ma non arreca danno alla formula per il lato della pratica, perchè non può mai aversi $x = 0$: cioè mancare l'altezza del liquido. Se $x = 1$ si ha per y un valore negativo $-3,43$ per qualunque valore positivo di z : dunque la formula non è atta a rappresentare i battenti dell'altezza di 1mm;

ma se si considera che in tal caso tutto varia nell'efflusso dei liquidi, per la grande influenza che il fondo del vaso esercita sulle velocità delle rispettive molecole effluenti, la quale è trascurabile affatto nelle nostre sperienze, possiamo concludere che neppure questa circostanza è dannosa alla formola relativamente alla pratica. Se $x = \infty$, si ha $y = \mp \infty$, secondochè sia $z >$, o $<$ 902, ed $y = 0. \infty - 3,43$ per $z = 902$; ma il battente infinitamente grande non s'incontra mai nella pratica.

Quantunque le notate contraddizioni, eccetto la seconda, si referiscano a casi d'efflusso eccezionali, o non possibili, o che non s'incontrano nella pratica, concorrono però tutte insieme a dimostrare la nostra formola assai discosta dalla vera che vincola fra loro i tre elementi considerati; quindi concludiamo che essa non può con sicurezza estendersi se non poco al di fuori dei limiti delle sperienze. Relativamente ai valori piccoli di z si può osservare che la forza $z = 1,66$ (ultima fra le addotte) è già molto piccola, e le palline che ne avessero una alquanto minore di questa, incomincerebbero ad agire in una maniera incerta nel fluido per le piccole resistenze, urti ec.; onde il limite insino a cui può protrarsi l'esperienza è poco diverso da 1,66, ed è evidente che al di là di questo limite non potrebbesi mai estendere con sicurezza la nostra formola stabilita coi soli dati sperimentali, quantunque non vi manifestasse alcuna contraddizione al fatto.

PARTE SECONDA

§. I.

Sulla natura delle traiettorie descritte dalle molecole liquide nell'efflusso dei vasi.

Per estendere il nostro metodo alla ricerca delle velocità delle molecole che passano per un punto qualunque del vaso nell'efflusso dei liquidi, conviene conoscere le traiettorie che esse percorrono. A quest' oggetto, si riportano le seguenti esperienze.

Un recipiente di forma prismatica a base pressochè quadrata, di lato eguale a 345mm circa, aveva una parete laterale di cristallo divisa da linee nere orizzontali e verticali distanti fra loro di un centimetro, ed un foro tondo di raggio eguale 3mm,8, sulla verticale media di una delle pareti laterali contigue a quella di cristallo suddescritta, col suo centro distante dal fondo 26mm. Al bordo dell'apertura di questo vaso, tenevasi applicata per gl' estremi convenientemente piegati una lastra di latta con più fori sul mezzo della sua larghezza, la quale penetrava nell' interno del vaso ad una certa profondità in posizione orizzontale, e potevasi far corrispondere in una a piacere delle varie sezioni verticali che passavano pel foro. Il vaso riposava sopra di un tavolino e presso di questo era un traguardo che potevasi fare corrispondere con una qualunque delle linee verticali marcate sulla parete di cristallo del vaso stesso. Questo traguardo consisteva in una riga di legno tenuta fissa in posizione verticale ad un piccolo cavalletto per mezzo di una morza, di cui l' estremità superiore presentava un' incavo quadrangolare assai lungo, ai lati orizzontali del quale fissavamo verticalmente in tenzione un filo sottile che serviva per riguardare. Posta

dell'acqua nel vaso fino ad un'altezza qualche poco maggiore di quella a cui era la lastra suddescritta, preparavamo un globettino di cera mista a limatura di piombo e si poneva sulla precitata lastra in prossimità di uno dei suoi fori che meglio si proiettasse su qualche linea verticale della parete di cristallo, quindi adattavasi il traguardo nella direzione del rammentato foro e della verticale che gli corrispondeva sul cristallo, ed un esploratore ponevasi col l'occhio al traguardo. Un'altro osservatore stando presso del vaso ne apriva il foro, e quando il liquido era giunto in prossimità della lastra, faceva cadere con grandissima diligenza (onde non comunicarle urti) il globettino dal foro a cui stava prossimo, per mezzo di un filo metallico, e l'osservatore del traguardo notava sul cristallo i punti nei quali erano rispettivamente intersecate le rette verticali dalla traiettoria che esso descriveva: cosa assai agevole a farsi, in grazia delle rette orizzontali marcate sul cristallo medesimo.

Si è variato più volte il peso ed il volume al globettino, per riconoscere l'influenza di questi elementi sulle rispettive traiettorie. I volumi dei varj globetti posti in opra, si sono ad un di presso calcolati in millimetri e frazioni di millimetro. I loro pesi specifici si concepivano dal numero dei secondi che impiegavano a cadere dalla superficie superiore di livello del liquido in quiete sul fondo del vaso, percorrendo l'altezza di 200mm. Abbiamo sperimentato due sezioni verticali differenti, una normale alla parete che conteneva il foro d'emissione, l'altra inclinata sulla stessa parete di 70.^o. In ambedue le sezioni, i punti delle traiettorie che si osservavano, gli abbiamo riferiti alla rammentata parete del vaso ed al piano orizzontale che coincideva col livello del liquido nel momento di partenza del globettino, il quale era 200mm distante dal fondo del vaso. Per cui, ogni punto viene determinato colla distanza dalla parete del vaso che contiene il

foro d'emissione, la quale per comodo chiameremo x , e con un'altra distanza dal piano orizzontale che coincide col livello del liquido, che rappresenteremo colla lettera y .

Nelle tre tavole seguenti si registrano i valori numerici che si sono ottenuti.

Le prime due, comprendono tutti quelli relativi alla sezione normale alla parete del vaso che contiene il foro di emissione; la terza quelli soli, dei varii che ne abbiamo ottenuti relativi alla sezione inclinata di $70.^{\circ}$ sulla parete stessa, che si sono giudicati più meritevoli di considerazione.

Queste esperienze sono di loro natura troppo delicate, per pretendere noi di dare dei numeri assolutamente esatti con i mezzi pratici mediante i quali si sono ottenuti: d'altronde non è questo l'oggetto nostro. Intendiamo nell'esporre queste tavole, di far concepire soltanto quell'idea generale che noi ci siamo formata sulla natura delle traiettorie delle molecole liquide nell'efflusso dei vasi, dall'insieme dei risultati di tutte le sperienze, considerandoli tali quali sono nel loro grado d'imperfezione.

TAVOLA I.

Esperienze fatte sulla sezione verticale perpendicolare alla parete del foro d'emissione, con un globettino sferico di diametro = $3,^{mm}5$ circa.

Tempi che determinano i pesi specifici	Valori delle distanze x , in (mm)	Valori delle distanze y , in (mm)	Osservazioni
9"	85	0	
"	83	130	
"	76	200	
20"	85	0	
"	83	60	
"	64	200	

Segue la Tav. I.

Tempi che de- terminano i pesi specifici	Valori delle distanze x , in (mm)	Valori delle distanze y , in (mm)	Osservazioni
"	85	0	(a) Arrivato a questo punto il globettino si è di- retto al foro, da dove è uscito.
"	83	65	
"	73	115	
"	64	200	
22*	85	0	
"	83	30	
"	73	100	
"	63	150	
"	56	200	
"	85	0	
"	73	60	
"	63	130	
"	44	200	
"	85	0	
"	83	40	
"	73	120	
"	63	150	
"	56	200	
20"	65	0	
"	63	50	
"	53	100	
"	43	130	
"	5	200	
"	65	0	
"	63	30	
"	53	100	
"	43	140 (a)	
18"	65	0	
"	63	40	
"	53	120	
"	43	150	
"	45	200	

TAVOLA II.

Esperienze fatte sulla sezione verticale perpendicolare alla parete che contiene il foro d' emissione, con un globettino sferico di diametro $\approx 0, \text{mm} 20$ circa, che cadeva in $100''$ dalla superficie di livello dell' acqua in quiete sul fondo del vaso, percorrendo l' altezza di 200mm .

Valori delle distanze x , in mm.	Valori delle distanze y , in mm.	Osservazioni
185	0	(a) Il globettino si
175	38	è quindi posato sul
165	60	fondo del vaso.
155	78	(b) È accaduto lo
145	95	stesso che nell' espe-
135	110	rienza precedente ,
125	133	ma questa è un poco
115	150	incerta.
105	165	(c) Quest'esperien-
190	0	za è stata eseguita la-
285	55	sciando prima abbas-
175	100	sare il globetto nel
165	140	mezzo in quiete fino
155	160	a 60mm di profondi-
145	175 (a)	tà, e quindi aprendo
195	0	il foro del vaso.
185	40	
175	75	
165	110	
155	143	
145	165 (b)	
185	60	
175	110	
165	135	
155	1 60 (c)	

TAVOLA III.

*Esperienze fatte sulla sezione verticale inclinata di 70°.
alla parete che contiene il foro d' emissione.*

Diame- tri dei globet- tini, in mm	Tempi che determi- nano i pesi specifici	Valori delle distan- ze x , in mm	Valori delle distanze y , in mm	Osservazioni
3,50	22"	75	0	(a) Il globettino ha quasi toccato il fondo del vaso, ed è poi uscito dal foro solle- vandosi un poco.
"	"	73	20	
"	"	63	60	
"	"	53	120	(b) Si è fermato il globetti- no a questo punto sul fondo del vaso, avendo curvato molto la sua traiettoria do- po il punto precedente.
"	"	43	150 (a)	
"	16"	75	0	(c) È sembrato che il glo- bettino deviasse subito dal- la verticale, ma la devia- zione si è poi resa manifesta a questo punto.
"	"	73	50	
"	"	63	100	
"	"	53	150	(d) Il globettino ha subito deviato grandemente dalla verticale, dirigendosi verso il foro, senza mai uscire dalla sezione in cui si espe- rimentava.
"	"	43	200	
"	21"	55	0	
"	"	53	80	(e) Ha agito il globettino come nell' esperienza prece- dente, ma con minore devia- zione dalla verticale, diri- gendosi cioè in linea del foro.
"	"	43	125	
"	"	14	200 (b)	
0,20	16"	55	0	(e) Ha agito il globettino come nell' esperienza prece- dente, ma con minore devia- zione dalla verticale, diri- gendosi cioè in linea del foro.
"	"	54,8	120	
"	25"	55	0	
"	"	54,8	70	(e) Ha agito il globettino come nell' esperienza prece- dente, ma con minore devia- zione dalla verticale, diri- gendosi cioè in linea del foro.
0,10	34"	55	0	
"	"	54,8	20	
"	moltissimi	55,	0	(e) Ha agito il globettino come nell' esperienza prece- dente, ma con minore devia- zione dalla verticale, diri- gendosi cioè in linea del foro.
"	"	55.	10 (c)	
0,20	"	155	0 (d)	
"	"	95	0 (e)	

Queste tavole ci mostrano

1.^o Più la gravità specifica del globettino si accosta a

quella dell'acqua, più è grande la sua deviazione dalla verticale, o sia più converge verso il foro d'emissione; poichè le traiettorie sono tutte comprese nell'angolo formato dalla verticale del punto di partenza del globettino, e dalla retta che congiunge lo stesso punto col foro.

2.^o Cresce la deviazione dalla verticale dei globettini di eguali gravità specifiche al crescere delle distanze dalla parete del foro d'emissione dei punti di loro partenza.

3.^o Un medesimo globettino cadendo, tanto più diverge dalla verticale quanto più si avvicina al foro d'emissione. Quest'ultimo fatto, che vedesi meglio verificato a misura che il globettino cade a distanza maggiore dalla parete del vaso ove esiste il foro, sembra dipendere dall'azione costante che ha sul medesimo la gravità per trarlo nella direzione verticale, a differenza di quella della forza del liquido che varia per i diversi punti della traiettoria.

4.^o Nei globettini piccolissimi la deviazione dalla verticale si fa più sollecitamente; e quando alla estrema tenuità di volume si unisce anche la piccolezza della forza per cadere in basso, la deviazione dalla verticale incomincia dal punto stesso di partenza, e prosegue quasi in linea retta.

5.^o Questa deviazione non solo comincia dal livello superiore, ma da qualunque strato ove si ritrova il globettino cadente quando principia l'efflusso.

Sembra pertanto che le molecole liquide nell'efflusso dei vasi, dentro i limiti almeno delle nostre esperienze, si dirigano al foro d'emissione per linee rette.

§. II.

Applicazione del metodo esposto nel paragrafo primo della prima parte al caso dell'efflusso per un foro scolpito nel fondo del vaso, per la ricerca delle velocità delle molecole liquide non situate sulla verticale corrispondente al foro medesimo.

Ritenendo che le traiettorie percorse dalle molecole liquide nell'efflusso dei vasi sieno linee rette convergenti al foro d'emissione; ecco come abbiamo applicato il metodo del paragrafo 1.^o della prima parte alla ricerca sperimentale delle varie velocità che ad esse corrispondono nei varii punti. Si è usato un apparecchio per mezzo del quale il globettino ritenuto dall'anello descritto nel paragrafo 2.^o della 1^a parte, potesse essere condotto lungo una linea retta inclinata all'orizzonte a piacere e volta al foro. Per conseguire questo movimento, i pezzi principali della macchina erano due fili metallici, uno dei quali rimaneva fuori del vaso parallelo alla rammentata linea retta, l'altro lungo quanto la distanza fra il primo e questa linea, stava in direzione verticale, e portava entro l'acqua alla sua estremità inferiore il globetto; onde mosso il primo filo, era il globettino medesimo obbligato a percorrere la linea esplorata.

Per dare una più minuta descrizione del nostro apparato, noterò che un vaso prismatico di base pressochè quadrata, equivalente in superficie a 119000^{mm}, aveva un foro circolare di 4^{mm},50 di raggio nel centro del suo fondo. Ad un certo punto del bordo superiore di una delle sue pareti laterali, applicavasi per una delle estremità, una riga di legno di mediocre grossezza e assai larga, per mezzo di una cerniera, in modo che poteva girare attorno alla medesima, volgendo la sua faccia più larga verso il fondo del vaso, e rimanendo sempre nello stesso piano verticale. Que-

sta riga veniva poi fissata sotto un certo angolo coll'orizzonte ad un quadrello di legno che si ergeva verticalmente dalla parte del vaso opposta a quella cui stava essa applicata, per mezzo di una seconda riga connessa ad uno de' suoi bordi longitudinali, in modo che manteneva una delle sue facce più larghe a contatto con una delle facce del quadrello, e di una morza che premeva questa seconda riga contro il quadrello medesimo. Il bordo libero della riga principale, era guarnito di due magliette di metallo circolari convenientemente collocate, i di cui piani erano normali al bordo medesimo, ed i loro centri da esso egualmente distanti. In queste stava infilato un filo metallico di mediocre grossezza che poteva scorrervi comodamente, di cui l'estremità superiore era fissata alla ripiegatura di una molla composta di una lamina metallica ricurva, la quale cingeva e premeva le due larghe facce della riga con moderata forza, e poteva farvisi scorrere di moto lento e regolare. Ad un certo punto della parte del filo intermedia alle due magliette, stava applicato nella direzione stessa del filo, un dado metallico munito di una vite che portava infilata tra la sua testa ed il dado una piccola lastra metallica di figura quadrata, di cui un bordo era ripiegato a guisa di cilindro, la quale fissavasi a contrasto fra il dado e la testa della vite, in modo che il detto cilindro rimaneva verticale. In questo, passava con forza ed era sostenuto dall'attrito, un secondo filo metallico che veniva a rimanere in direzione verticale, ripiegato pressochè ad angolo retto verso la sua estremità inferiore, la quale era guarnita di un anello tondo, di raggio poco più piccolo di $3^{mm},50$, di finissimo filo metallico, che vi stava applicato in posizione orizzontale per un gambo molto sottile, in modo che era interamente libero e da essa distante 2^{mm} circa; il quale aveva un'apertura poco maggiore di un millimetro dalla parte opposta al punto di sua applicazione, e che in ogni esperienza rimaneva diretta verso il foro.

Disposto l'apparecchio in modo che il filo scorrevole lungo il bordo della riga principale entro le magliette si trovasse in uno dei piani verticali corrispondenti al foro d'emissione, si conduceva l'anello col suo centro sulla verticale del centro di questo foro, e quindi facendo scorrere in basso il filo metallico verticale che lo riteneva, lo trasportavamo a contatto col foro stesso. Così l'apparecchio era ben preparato per procedere alle esperienze. Infatti facendo scorrere lungo la riga principale la molla che regolava il filo infilato nelle magliette, l'anello era costretto a dirigersi al foro d'emissione per una linea retta parallela alla riga stessa, e l'apertura che aveva l'anello in faccia del foro sopra rammentato, lasciava libera la pallina da trasportarsi in basso nella direzione del movimento del liquido.

Per misurare la distanza dal foro del vaso dei punti ai quali si partivano le palline, eravi una piccola riga divisa in millimetri che stava applicata per un punto di una delle sue estremità (attorno a cui potevasi far girare o nò a piacere) alla ripiegatura di una lastra metallica, la quale cingeva il bordo della riga principale dell'apparecchio, potendo scorrervi sopra senza impedire il movimento al filo ad essa parallelo, che le stava d'innanzi. Stabilita la suddetta riga nella debita inclinazione, disponevasi la scala in linea orizzontale, e poi si faceva scorrere lungo la riga stessa la lastra a cui essa si applicava, finchè la divisione zero non fosse giunta sulla verticale del centro del foro d'emissione, ciò che si verificava per mezzo di un pendolino, quindi si poneva la scala medesima in linea orizzontale. Quando poi era partita la pallina nelle successive esperienze, si portava il rammentato pendolino sul centro dell'anello: così il numero ad esso corrispondente sulla scala, esprimeva in millimetri la proiezione orizzontale della distanza cercata, dalla quale si ricavava facilmente il valore di questa distanza.

Dobbiamo però avvertire, che varie circostanze possono scemare la fiducia dei valori numerici che si sono ottenuti. La prima consiste che i membri dell'apparecchio suddescritto erano troppo sottili, per cui le palline stavano soggette a dei tremolamenti accostandosi al foro. La gran diligenza però con cui furono condotte le esperienze diminuisce l'entità di questo difetto. La seconda dipende dal non aver considerata che una sola esperienza per ciascuna pallina, ciò che dopo l'esame dei risultati parziali della tavola III^a della prima parte giudichiamo di grande imperfezione: molto più che accadeva spesso che le palline le di cui spinte verticale erano assai piccole, si partivano dall'anello prima di giungere al punto conveniente. Questo caso però ci veniva avvertito dalla natura delle traiettorie percorse dalle palline, le quali erano molto ricurve verso la superficie di livello del liquido, a differenza di quelle che avevano origine ai luoghi veramente corrispondenti alle rispettive forze, le quali poco o niente differivano dalla linea retta vergente al foro d'emissione: onde potevansi ripetere le sperienze.

La terza circostanza si è che abbiamo indifferentemente adoprato in varie sperienze per trasportare in basso la pallina, un anello alcune volte chiuso ed altre aperto dalla parte del foro d'emissione; mentre la forza del liquido agendo obliquamente al piano dell'anello obbliga la pallina ad urtare contro di questo, quando sia chiuso: onde la forza medesima non può vincere quella della pallina se non la supera della resistenza che gli produce l'anello. La quarta finalmente, che le palline si costruivano senza sussidio dell'anello metallico rammentato nel paragrafo 3.^o della prima parte; per cui era facile d'incorrere in qualche notevole difetto di sfericità e di volume.

§. III.

Resultati sperimentali sulle velocità esplorate col precedente apparecchio.

Si sono sperimentate due sezioni differenti per riconoscere l'influenza della forma del vaso sulle velocità. Una di queste era parallela a due delle pareti laterali, l'altra diagonale al vaso. In ambedue le sezioni non abbiamo considerato che un solo battente eguale a 240mm, e si sono esplorate tre differenti traiettorie, di cui le rispettive inclinazioni all'orizzonte sono dei gradi seguenti 22,°50; 45°00; 67°50. Queste, unite alla verticale del foro di già esplorata, possono essere sufficienti a far conoscere la legge di loro successione.

Ad onta delle imperfezioni notate nel paragrafo precedente, i valori numerici che si sono ottenuti, mostrano una tal regolarità che molto sodisfa; forse dovuta alla gran cura che si ebbe nell'eseguire le sperienze. Noi perciò si riportano ordinati nella seguente

TAVOLA IV

Che contiene i risultamenti d'esperienza relativi alle molecole liquide non situate sulla verticale del centro del foro d'emissione, per un battente di 220mm.

Angoli d'inclinazione coll'orizzonte delle linee esplorate	Forze in 10, milles. di gra., che anim. le pallin. lung. le linee esplorate	Distanze, in (mm), dei punti esplorati sulla sezione	
		parall. a 2 delle pareti del vaso	diagonale al vaso
22. ^o $\frac{1}{2}$	22,55		16,27
"	14,23	22,80	21,65
"	10,55	26,06	25,96
"	8,38	27,14	28,68
"	6,81	29,86	29,76
"	1,24	35,83	40,04
"	0,64	48,84	43,29
"	203" (*)	76,00	
45. ^o	19,47	26,87	24,75
"	14,44	30,41	27,58
"	12,57	30,41	30,41
"	10,22	33,95	30,41
"	6,02	36,07	31,82
"	0,26	45,26	60,82
"	0,21 (**)	66,48	
"	300" (*)	71,60	
67. ^o $\frac{1}{2}$	20,22	30,03	
"	16,43	32,64	
"	13,35	35,25	31,33
"	11,63	35,25	31,33
"	1,50	52,22	
"	0,30	75,72	
"	130" (*)	78,33	
"	140" (*)	82,25	
"	quasi stazio- naria	95,30	

Attribuendo alle inesattezze degli esperimenti le piccole differenze che si riscontrano nei numeri corrispondenti per le due sezioni, sembra potersi concludere che la forma del vaso, quando le sue dimensioni in confronto di quelle del foro d'emissione sono molto grandi, e l'efflusso ha luogo dal fondo, non influisce sulle velocità; ed in tal caso tutto essendo simmetrico attorno al foro, le velocità medesime si troverebbero eguali sui varj involucri di una certa figura di rivoluzione, il di cui asse sarebbe la verticale del centro del foro medesimo. I numeri delle nostre esperienze mostrerebbero che la detta figura somiglia quella di un ellissoide compressa sul diametro verticale.

Nell' eseguire le surriferite sperienze si è osservato che le palline che sono tratte dalla velocità del liquido ad una certa distanza dal foro d'emissione alquanto piccola, si dirigono per un cammino qualche poco convesso verso la superficie superiore di livello, nei primi tratti del loro movimento, ancora che il punto del distacco dall'anello sia quello che propriamente le compete; ed in seguito convergono sempre più verso il foro. La causa di ciò sembra essere la più rapida variazione di velocità con cui le molecole liquide si accostano al foro, nei punti ad esso più prossimi. Infatti le spinte verticali delle palline agendo con valore costante di basso in alto, e le velocità del liquido in modo molto variato nella direzione del foro; necessariamente le palline devono percorrere delle linee convesse verso la superficie di livello del liquido, nei primi tratti dei loro movimenti, ma in seguito le azioni delle velocità esuberando sempre più quelle delle spinte verticali, le rammentate linee devono sempre più accostarsi a quelle che le palline descriverebbero per la sola velocità comunicatale dalle molecole liquide effluenti. Che se si considerino i punti molto distanti dal foro, in confronto coll'ampiezza del foro stesso; ivi le velocità succedendosi molto meno rapidamente, nel principio del loro movimen-

to le palline rimangono soggette all'azione di due forze entrambi quasi costanti, ed in seguito, quando le velocità del liquido incominciano a variare più rapidamente, le azioni di queste sulle palline esuberano già molto le azioni delle loro spinte verticali; onde le traiettorie che le palline percorrono devono accostarsi sempre molto, in ogni loro punto, alle linee rette vergenti al foro d'emissione. E realmente abbiamo avuto luogo di osservare che trasportando una pallina di minimissima spinta verticale in qualunque punto della massa fluida, o vicino o lontano al foro d'emissione (entro però quei limiti nei quali la forza di velocità è capace di trarla seco) essa si dirige sempre al foro in linea retta, e passandovi, ne percuote il bordo nel punto più prossimo alla direzione del suo movimento.

§. IV.

Considerazioni analitiche relative ai resultamenti d'esperienza notati nella tavola del paragrafo precedente.

Come relativamente alla traiettoria verticale, la legge ancora che regna tra le distanze dal foro d'emissione delle molecole liquide che decorrono linee diversamente inclinate, e le rispettive forze che le animano al moto, viene rappresentata da delle logaritmiche. Le formole particolari che appartengono alle varie linee che abbiamo esplorate, sono le seguenti

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} y = 44,56 - 18,62 \log ; 22^{\circ}. \frac{1}{2} \\ y = 44,56 - 12,96 \log ; 45^{\circ}. \\ y = 44,56 - 11,61 \log ; 67^{\circ}. \frac{1}{2} \\ y = 44,56 - 16,24 \log ; 90^{\circ}. \end{array} \right.$$

dinotando y le surriferite distanze, z le forze; ed i numeri segnati al lato di ciascheduna formola, i gradi d'inclinazione sull'orizzonte delle traiettorie cui esse si riferiscono. Le rispettive costanti si sono prima determinate

col metodo dei minimi quadrati, quindi le abbiamo modificate un poco, affine di rendere eguali (giacchè era possibile senza produrre disturbo notevole nelle formole) i termini costanti, eccetto però quelle della equazione relativa alla verticale, le quali risultano dal paragrafo VII della prima parte.

Per vincolare fra loro in una formula le quattro precedenti, dobbiamo combinare i loro moduli coi gradi dei rispettivi angoli d' inclinazione sull' orizzonte delle traiettorie cui si riferiscono. A tale oggetto osserviamo che se si assumano questi elementi per coordinate polari, e costruiscasi la curva a loro relativa ne risulterà una figura che potrebbesi far coincidere con una logaritmica.

Prendiamo quindi per rappresentare i moduli in funzione degl' angoli sopra rammentati la formula seguente

$$r \operatorname{Cos} \varphi = p \log \frac{r \operatorname{sen} \varphi}{q}$$

in cui r dinota i moduli, φ gl' angoli, p, q due costanti da determinarsi convenientemente per il nostro caso. Onde procedere alla determinazione delle costanti q , osserveremo che quando $\varphi = 90^\circ$ si ha, dinotando con r_{90} il

corrispondente valore di r , $p \log \frac{r_{90}}{q} = 0$, e non poten-

do essere $p = 0$, deve aversi $\log \frac{r_{90}}{q} = 0$, o sia

$r_{90} = q$, e quindi

$$r \operatorname{Cos} \varphi = p \log \frac{r \operatorname{sen} \varphi}{r_{90}}.$$

Calcolando adesso con questa equazione i tre valori di p , che corrispondono rispettivamente alle tre formule segnate (1) relative alle traiettorie inclinate all' orizzonte, dopo di avere successivamente sostituiti nella medesima i rispettivi valori di r , e di φ , e prendendo il medio dei risultati, otterremo

$$p = -15,54$$

Sostituendo questo valore in luogo di p nella precedente equazione, si ha in fine

$$r \cos \varphi + 15,54 \log \frac{r \sin \varphi}{r_{90}} = 0$$

da cui potremo dedurre il valore di r corrispondente ad un valore qualunque di φ , per sostituirlo nella equazione

$$y = 44,56 - r \log z$$

che è quella cercata.

Questa formula non conviene però che al solo battente di 220^{mm}, sul quale si sono eseguiti gli esperimenti: ma se vogliamo estenderla a rappresentare le forze che animano le molecole liquide di un battente qualunque, potremo procedere nel modo che segue.

$$y = 20,51 \log x - 3,43 - 6,94 \log z \log x$$

è la formula data nel paragrafo VIII della prima parte che si riferisce ad un carico qualunque per la verticale corrispondente al centro del foro d'emissione; nella quale x dinota il carico, e z, y hanno lo stesso significato che nelle formule precedenti. Se confrontiamo questa formula rispettivamente con quelle segnate (1) relative alle linee inclinate all'orizzonte, si deducono con facilità le seguenti

$$y = 20,51 \log x - 3,43 - 6,94 \log x \log z ; \quad 90.^{\circ} -$$

$$y = 20,51 \log x - 3,43 - 4,96 \log x \log z ; \quad 67.^{\circ} \frac{1}{2}$$

$$y = 20,51 \log x - 3,43 - 5,53 \log x \log z ; \quad 45.^{\circ} -$$

$$y = 20,51 \log x - 3,43 - 7,96 \log x \log z ; \quad 22.^{\circ} \frac{1}{2}$$

Queste formule non differiscono fra loro che per i coefficienti dei soli termini che contengono la variabile z ; e tali coefficienti sono quelli stessi delle equazioni segnate (1) divisi per $\log 220$, essendo 220^{mm} il valore del battente relativo alle equazioni medesime. Ritenendo le stesse denominazioni che precedentemente, la formula atta ad esprimere questi coefficienti in funzione degli angoli φ , sarà quindi

$$\frac{r \cos \phi}{\log 220} + 15,54 \log \left(\frac{r}{\log 220} \frac{\sin \phi}{r_{90}} \right) = 0;$$

Sostituendovi rispettivamente in luogo di r_{90} , e $\log 227$ i loro valori, ed eseguendo i calcoli opportuni, riducesi a
 (2) $r \cos \phi + 15,54 \log (0,144 r \sin \phi) = 0$
 che unita alla seguente

(3) $y = (20,51 - r \log z) \log x - 3,43$
 somministra la relazione cercata.

Per comprendere il grado di fiducia che possiamo accordare a questa formola, sostituiamo in luogo delle tre variabili ϕ , x , z successivamente i rispettivi valori che le competono nelle varie sperienze che si sono eseguite; tratti quindi i corrispondenti valori di r dalla (2), deduciamo quelli di y dalla formola (3), e confrontiamoli cogli analoghi ottenuti dall'esperienza. I resultamenti di tali operazioni si leggono nella seguente

TAVOLA VI.

Di confronto tra i risultati di esperienza e quelli della stabilita formula, circa le distanze dal foro d'emissione delle molecole liquide esplorate su varie traiettorie di una sezione verticale, per un battente di 220^{mm}.

Inclinazio- ni delle traiettorie sull'oriz- zonte	Spinte ver- ticali z, in dieci mille- simi di gramma	Valori delle distanze y, in (mm)		Differenze tra il calcolo e l'esperienza
		dati dall'e- sperienza	dedotti dalla for.	
22 ¹ / ₂	14,23	22,23	25,78	— 3,55
"	10,55	26,01	27,90	— 1,89
"	8,38	27,91	29,54	— 1,63
"	6,81	29,81	31,01	— 1,20
"	1,24	37,94	43,10	— 6,16
"	0,64	46,07	47,66	— 1,59
45°	19,47	25,81	27,90	— 2,09
"	14,44	29,00	29,58	— 0,58
"	12,57	30,41	30,35	+ 0,06
"	10,22	32,18	31,51	+ 0,67
"	6,02	33,75	34,48	— 1,27
"	0,26	53,04	52,18	+ 0,86
"	0,21	16,48	53,34	+ 13,14
67° ¹ / ₂	20,22	30,03	27,70	+ 2,33
"	16,43	32,64	28,86	+ 3,78
"	13,35	33,29	30,02	+ 3,27
"	11,63	33,29	30,79	+ 2,50
"	1,50	52,22	42,24	+ 9,98
"	0,30	75,72	51,25	+ 24,47
90°	162,10	11,60	8,67	+ 2,93
"	81,28	13,81	13,54	+ 0,27
"	52,48	17,32	16,63	+ 0,69
"	35,48	19,59	19,36	+ 0,20
"	26,30	22,57	21,50	+ 1,07
"	19,50	21,69	23,61	— 1,92
"	16,60	19,44	24,75	— 5,31
"	13,48	25,10	26,21	— 1,11
"	8,51	27,53	29,46	— 1,93
"	3,72	34,46	35,30	— 0,84
"	1,66	42,00	40,99	+ 1,01

Tra le differenze della formola dall'esperienza ve ne sono cinque non punto trascurabili; cioè le seguenti 5,31; 6,16; 9,98; 13,14; 24,47. Relativamente a quella di 5,31 dobbiamo osservare che è la medesima già notata nella tavola III della prima parte, a cui non può darsi alcun peso. Quanto alle altre, non sono sufficienti a dare criterio d'inesattezza della formola, perchè si riferiscono, specialmente le più imponenti, a forze piccolissime e molto al di fuori dei limiti entro cui fu stabilita la equazione del paragrafo VI della prima parte relativa ai tempi impiegati dalle palline a traversare l'altezza di 237^{mm} di acqua in quiete, ed alle loro rispettive spinte verticali colla quale furono calcolate. Che anzi, tali aberrazioni sarebbero una conseguenza necessaria di ciò che si disse relativamente alle forze piccole delle palline, nei paragrafi V, e VII della prima parte.

L'insieme di tutte le molecole fluide che si trovano animate di eguali velocità, costituisce delle superficie di rivoluzione attorno la verticale corrispondente al centro del foro di egresso, la di cui equazione è facile ad ottenersi. Infatti eliminando r dalla formola (2), colla (3) si ottiene

$$(m-y) \cos \varphi + n \log (m-y) \sin \varphi - p = 0 \dots (2)$$

in cui

$$m = 20,51 \log x - 3,43$$

$$n = 15,54 \log x \log z$$

$$p = \left\{ 13,075 + 15,54 \log (\log x \cdot \log z) \right\} \log x \cdot \log z \\ = n (0,8414 + \log 0,0643 n)$$

la quale è l'equazione di un meridiano della superficie relativa ad un valore qualunque di x e di z , o sia l'equazione della superficie stessa. La natura della curva rappresentata da questa formola non si riconosce con facilità dalla semplice ispezione della formola stessa; ma volgendo l'occhio sulle equazioni segnate (1), che essa

comprende come casi particolari dei battenti x e degl'angoli φ si vede, che per dei valori eguali di z , le distanze y sono più grandi per le traiettorie intermedie, e specialmente poco al di sopra dell'inclinazione di 45° , che per quelle assai prossime alla verticale e le altre molto inclinate all'orizzonte; da cui si deduce che la nostra curva rivolge la sua concavità verso l'asse di rotazione, o sia verso il foro d'egresso del fluido, è alquanto compressa nei punti sovrastanti al foro stesso, rigonfiata poco superiormente al punto che corrisponde a $\varphi = 45^\circ$, e nuovamente compresa nei punti prossimi al fondo del vaso. Probabilmente la cagione fisica di tal forma è che le particelle fluide di queste superficie, molto prossime alla verticale, essendo le più elevate, risentono minor pressione idrostatica di tutte le altre, e quelle vicine al fondo del vaso sono trattenute dal fondo stesso. Facendo $(m - y) = \rho$ nell'equazione (2), si ha

$$(3) \dots \rho \cos \varphi + n \log \rho \sin \varphi = n (0,8414 + \log 0,0643.n)$$

È facile dimostrare che tutte le curve rappresentate da questa equazione sono simili. Infatti moltiplicando il raggio vettore ρ per una costante qualunque k , ed eseguendo le opportune riduzioni, si ottiene

$$(\dots \cos \varphi + n' \log \rho \sin \varphi = n' (0,8414 + \log 0,0643.n'))$$

in cui si è posto $n' = \frac{n}{k}$

la quale non differisce dalla precedente che per il solo parametro n .

Dinotino ρ' , ρ'' due valori di ρ rispettivamente corrispondenti a due valori diversi di z , per un medesimo angolo φ , e ρ_1' , ρ_1'' due altri valori di ρ corrispondenti ai medesimi valori di z , e ad un altro angolo φ ; si avrà per la condizione di similitudine

$$\frac{\rho'}{\rho''} = \frac{\rho_1'}{\rho_1''},$$

e poichè m è indipendente da z

$$\frac{m-y'}{m-y''} = \frac{m-y_1'}{m-y_1''}$$

rappresentando con y', y'', y_1', y_1'' i valori di y rispettivamente corrispondenti a quelli di $\rho', \rho'', \rho_1', \rho_1''$

Dunque se s'immagina una sfera di raggio m col suo centro nel foro di emissione, che è l'origine delle coordinate, le porzioni dei raggi vettori intercette tra la superficie di tale sfera, ed una qualunque delle varie superficie rappresentate dall'equazione (2), sono divise da ciascuna delle altre di queste superficie che vi passano, in parti rispettivamente proporzionali. Quindi le varie superficie costituite dall'insieme delle molecole fluide che hanno egual velocità, non si succedono equidistanti in tutti i singoli punti, ma si discostano più fra loro nelle parti le cui distanze dalla superficie sferica surriferita sono maggiori, che nelle altre in cui le distanze stesse sono minori. Accostandosi a tal superficie sferica, tendono così continuamente a prendere esse pure la forma sferica, e l'assumono infine quando la raggiungono.

Facendo $z = 1$ si ha $n = 0$, $p = 0$; quindi $y = m$, qualunque sia φ .

Dunque la superficie che corrisponde ad un diecimillesimo di gramma è sferica, e coincide con quella sopra rammentata, a cui tendono tutte le superficie corrispondenti agl'altri valori di z . Il raggio di tale sfera è

$$m = 20,51 \log x - 3,43$$

Facendo $z < 1$ si ha n negativo, e quindi $\log n$ immaginario. Dunque la nostra formola non è atta ad esprimere le superficie che corrispondono a forze minori di un diecimillesimo di gramma. Ma se si riflette che tali forze non possono essere comprese nel numero di quelle determinabili con sicurezza coll'esperienza, concluderemo di riguardarle come di quella parte di fluido alla quale non appartengono che forze piccolissime e pochissimo fra loro differenti, di cui non si può occupare che la sola teoria.

Per un valore qualunque di $z > 1$, y non può essere che minore di m . La sfera sopra considerata, comprende dunque entro di se tutte le molecole animate da forze maggiori di un diecimillesimo di gramma. Essa è il limite di tutte le velocità che sono bastantemente grandi per essere determinate coll'esperienza, o sia il limite insino a cui può sicuramente estendersi la teoria che segue l'ipotesi del parallelismo degli strati.

Si comprende facilmente come trattandosi di formole empiriche per un'altra unità di misura, con maggiore o minor grado di approssimazione si sarebbero ottenuti i medesimi risultamenti che relativamente al diecimillesimo di gramma. Quindi la superficie di egual velocità che corrisponde al valore di z eguale ad un diecimillesimo di gramma, non è propriamente sferica; ma è sferica quella solo che corrisponde ad una velocità piccolissima quanto si vuole, o sia alla velocità zero, che è il limite di tutte le unità di misura assumibili. Si può dunque stabilire, che nell'efflusso dei vasi le molecole fluide animate di eguali velocità costituiscono delle superficie di figura sferoidale, le quali si accostano sempre più alla forma sferica al diminuire della velocità comune delle particelle liquide che le costituiscono, e sono perfette sfere quelle di cui tal velocità è zero. Questo però non porta che si debbano ritenere erronei i nostri risultati, perchè l'esperienza non può dar valore che alle quantità suscettibili di una misura fisica; quindi per essa sono effettivamente zero le velocità prodotte da forze minori di un diecimillesimo di gramma, e la sfera da noi determinata è appunto la superficie che si trova al limite delle velocità che entrano nel dominio dell'esperienza.

§. V.

Di alcune sperienze relative alle direzioni delle molecole liquide nell'efflusso dei vasi, per fori in pareti verticali.

Si sono eseguite alcune sperienze relative al foro in parete verticale. Il vaso che conteneva il liquido lo abbiamo scelto di figura prismatica con base quadrata, di 330mm per lato. Il foro d'emissione era di figura circolare di 7mm,8 di raggio, ed era scolpito sulla verticale media di una delle pareti laterali del vaso, alla profondità sotto la superficie di livello, alcune volte di 220mm, ed altre di 170mm. L'altezza del liquido era di 240mm.

Trasportando una pallina sferica, di gravità specifica un quarto di grano maggiore di quella dell'acqua nei varii punti della massa fluida, per mezzo di un filo che tenevasi sospeso alle maglie di una piccola rete intessuta in un telaio di legno, il quale riposava sul bordo dell'apertura del vaso, abbiamo osservato, o ad occhio libero, o per mezzo di un traguardo, che la pallina negl'istanti in cui si apriva il foro, concepiva dei movimenti più o meno grandi secondo era più o meno vicina al foro stesso. E stabilitosi poi il moto permanente nella massa fluida, essa si equilibrava di nuovo; ma se trovavasi a certe distanze dal foro la nuova posizione d'equilibrio compariva sensibilmente diversa da quella che aveva stando il liquido in quiete. Sisono esplorate con più minutezza tre sezioni orizzontali; una che corrispondeva al centro del foro d'emissione, il quale era discosto dal fondo 20mm, o sia 220mm al di sotto della superficie di livello del liquido, e le altre due al di sopra di questa rispettivamente di 30mm e 60mm; ed abbiamo riscontrato che il moto istantaneo della pallina nell'aprire il foro, ha luogo per tutta la loro estensione eccetto nei punti molto prossimi alla parete opposta

a quella del foro, e negl' altri assai vicini alle costole degli angoli diedri formati dalla parete del foro rispettivamente con quelle ad essa contigue: e ci è sembrato che la sezione corrispondente al foro abbia dei limiti di moto un poco più ristretti.

Abbiamo eseguite delle esperienze analoghe ancora con una pallina di peso specifico minore di quello dell' acqua, tenendola applicata ad un filo sottile e flessibile, che si fissava all' estremità di un secondo filo metallico, in modo che tra questa e la pallina corressero circa 20mm; il quale aveva all' altra estremità un piccolo dado di piombo, per di cui mezzo poteva riposare in posizione verticale sul fondo del vaso. Trasportando questa pallina nei diversi punti di una medesima circonferenza di circolo di cui il piano fosse orizzontale, ed il centro situato sulla verticale del foro d' emissione, si è veduto che i suoi devianti nell' aprire il foro stesso e durante l' efflusso del fluido, erano tutti eguali fra loro. Abbiamo inoltre benissimo riconosciuto, traguardando le palline con un filo che passava per la verticale del foro d' emissione e per quella delle rispettive palline, che tutti i movimenti surriferiti si eseguivano nei piani verticali corrispondenti al foro stesso.

Costruendo due palline di eguali raggi, e di eguali spinte verticali, ma queste agenti in senso contrario, e trasportandole applicate rispettivamente a due fili di eguali lunghezze nell' interno del nostro vaso, per modo che fossero ritenute dai fili sovra una medesima verticale ed equidistanti dal foro, stando quella di forza traente in alto al di sotto di questo, e quella di forza traente in basso al di sopra, abbiamo veduto che all' incominciare dell' efflusso esse si movevano verso il foro, traversando contemporaneamente le medesime verticali, e quando l' efflusso aveva acquistato il movimento permanente si riequilibravano, ma sempre ambedue in corrispondenza della me-

desima verticale; cioè rimanevano ambedue egualmente inclinate verso il foro.

Facendo pendere una pallina simile a quella sopra rammentata, di gravità specifica maggiore dell'acqua, per un sottil filo, da uno dei bracci di una bilancia convenientemente collocata e mantenuta in equilibrio, si è scoperto che a grandissima prossimità del foro di emissione scolpito nel fondo del vaso, la legg e di acceleramento di moto delle molecole fluide subisce una molto marcata discontinuità, la quale sembra essere prodotta dall'urto dei filetti contro i bordi del foro, ma la distanza da questo a cui essa ha luogo è così tenue, che sebbene varii alquanto col carico, e forse anche coll'ampiezza del foro, crediamo che non perverrà mai a meritare l'attenzione degli scienziati. Per i battenti 100mm, 150mm, 480mm, essa è rispettivamente circa 0mm; 3mm,50; 5mm,50, contando dal piano del foro al centro della pallina la quale aveva 3mm,50 di raggio circa. La forza che corrisponde a queste discontinuità di moto sembraci costante per tutti i carichi da noi considerati, ed eguale ad un di presso a 245 grammi. Tal forza è così violenta, che all'istante che investe la pallina, l'obbliga a muoversi con impeto grandissimo.

CONCLUSIONI

Noi siamo ben lungi dal credere che con questi soli sperimenti possa stabilirsi la dottrina dell'efflusso dei vasi, per le molecole liquide prossime al foro di emissione. Tuttavia presentando il nostro lavoro come semplice saggio su tal difficile ricerca, si stima utile a far comprendere tutti i nostri risultati, riassumere in breve le seguenti conclusioni.

1.^o Fino da una certa distanza dal foro esiste una legge continuata di acceleramento nelle particelle liquide

che sembra potersi sottoporre a calcolo, ma quando le particelle sono a grandissima prossimità del foro la legge varia, e probabilmente nè il calcolo nè l'esperienza potrà indicare come prosegua il fluido sino all'egresso del vaso. Dentro a questi due limiti conviene fare esperimenti, e noi ve ne abbiamo tentati.

2.^o Questi limiti variano col battente, e credesi ancora coll'ampiezza del foro. Il primo segue la ragione dei logaritmi dei battenti; il secondo non sappiamo con qual legge varii, ma si ritiene che non possa mai allontanarsi dal foro, di tanto da meritare l'attenzione degli scienziati. Le particelle liquide che corrispondono a questo limite son sollecitate dalla medesima forza (P. 2. §. V.), ancorchè il carico dell'acqua sovrastante varj da 100mm a 480mm.

3.^o Le molecole fluide percorrono (P. 2. §. I.) linee rette vergenti al foro d'emissione con una legge di acceleramento continuata (P. 2. §. IV. V.) insino a grandissima vicinanza del foro stesso. Non vi è dunque distinzione tra quella parte che si diceva il gorgo e l'altra nella quale si riteneva esistere il moto lineare. Soltanto le velocità non si rendono assai sensibili che a certe distanze dal foro, dalle quali in poi crescono con rapidità sempre maggiore. Quest'ultima parte di fluido, a cui non può convenire la teoria del parallelismo degli strati, dovrebbe coincidere col surriferito gorgo, i limiti del quale servivano d'arresto a tal teoria. Ma le nostre sperienze ci dimostrano che gli acceleramenti di moto assai sensibili hanno luogo a distanze molto maggiori dal foro di emissione di quelle che soglionsi attribuire ai citati limiti. Il battente p. es. di 580mm dà, per un foro tondo di raggio eguale a 4mm,50, acceleramento di moto sensibile alla distanza dal foro stesso di 52mm,50, ed il gorgo suole ritenersi esteso tre raggi circa del foro d'emissione. Dobbiamo dunque conchiudere che la teoria dell'efflusso

dei vasi, seguendo l'ipotesi dei filetti paralleli, non può protrarsi insino ai limiti del gorgo, e deve arrestare a distanze molto più grandi dal foro di emissione di quelle che competono ai limiti stessi. Saremmo di sentimento di bandire totalmente dalla scienza l'idea di gorgo, giacchè non giova più e proviene da una maniera inesatta di riguardare l'andamento delle molecole fluide in moto; e di sostituirle invece quella dei filetti rettilinei, concorrenti al foro d'emissione, cui corrispondono velocità accelerate in modo che non diventano assai sensibili fino a certe distanze dal foro stesso, quindi vanno aumentandosi molto sollecitamente, e finiscono col crescere con grandissima rapidità.

4.^o La legge di acceleramento nelle rispettive traiettorie percorse dalle molecole fluide, è rappresentata (P. 2.a §. IV) da una formola empirica dalla seguente forma

$$y = (a - r \log z) \log x - b$$

in cui x dinota i battenti, y le distanze dal foro d'emissione delle rispettive molecole fluide, z le forze che animano le stesse molecole al moto, ed a, b, r tre costanti, di cui a, b rimangono le stesse per tutte le traiettorie ed r assume dei valori differenti che convengono alla seguente formola

$$r \cos C \log (d r \sin \phi) = 0$$

nella quale ϕ rappresenta gl'angoli d'inclinazione coll'orizzonte delle rispettive traiettorie, e c, d due costanti,

5.^o L'insieme delle molecole fluide che sono animate da eguali forze, costituiscono delle particolari superficie di rivoluzione attorno alla verticale del centro del foro d'egresso, che rivolgono la concavità verso il foro medesimo. Di tali superficie quelle che corrispondono al foro nel fondo del vaso, rassomigliano un'ellissoide compressa sulla verticale, col centro alquanto al di sopra del foro; e con precisione sono rappresentate (P. 2. §. IV.) dalla seguente formola

$$(m - y) \cos \varphi - n \log (m - y) \sin \varphi = p$$

in cui y dinota le distanze dal foro dei rispettivi loro punti, φ gl' angoli che le rette su cui si contano queste distanze fanno coll' orizzonte, ed m , n , p tre costanti, che dipendono dal carico e dal valore della forza che anima le molecole fluide appartenenti alle rispettive superficie. Non abbiamo espresse con formola le superficie relative al foro in parete verticale, ma dalle poche sperienze registrate nel §. V della 2.^a parte, si rileverebbe che sono simmetriche al di sopra e al di sotto del foro.

6.^o Le cagioni fisiche della riscontrata forma, nelle suindicate superficie, relative al foro nel fondo del vaso, sembrerebbe che fossero, la pressione idrostatica esercitata dal liquido sulle molecole più elevate, in grado minore che su quelle più prossime al fondo del vaso e l'azione del fondo stesso sulle particelle che le sono vicine.

7.^o Abbiamo trovato sferica la superficie di egual velocità che corrisponde al valore di una forza di un diecimillesimo di gramma, perchè questa era il più piccolo peso che si potesse sottoporre all'esperienza. Perciò crediamo doverne stabilire che tali superfici sono sferoidali col centro alquanto elevato dal foro che supponiano esistere nel fondo del vaso; e queste si accostano sempre più alla forma sferica all'ingrandirsi del raggio vettore o al diminuire della velocità comune che anima le particelle liquide che le costituiscono; e sono perfette sfere con il centro al foro quelle che han le particelle con zero di velocità.

Dott. GAETANO NICCOLI