ÜBER DIE ZAHLENSYSTEME GEOMETRISCHER GRÖSSEN BIS ZUR BELIEBIGEN ORDNUNG.

Von Jan Arnoldus Schouten (Delft).

Adunanza del 22 marzo 1914.

Die Systeme direkter Rechnung, Vektoranalysis, Ausdehnungslehre, Dyadenrechnung, « Omografie vettoriali », etc. erfreuen sich in stets steigendem Masse dem Interesse der Mathematiker und Physiker. Es wirkt da in hohem Masse störend, dass die verschiedenen direkten Analysen keineswegs eine solche Uebereinstimmung zeigen, als man dies auf mathematischem Gebiet erwarten würde, ja ihre Vertreter sich sogar fortwährend bestreiten. Das Merkwürdige dieses schon mehr als zwanzig Jahren währenden Streites, dessen Ende auch durch eine 1908 eingesetzte internationale Kommission noch nicht herbeigeführt wurde, liegt nun darin, dass es sich dabei nicht, wie vielfach gemeint wird, nur um Fragen der Notation handelt, sondern gerade um Fragen wie: ist eine gegebene Grösse positiv oder negativ, ist eine gegebene und vollständig bekannte Grösse einer anderen ebenso bekannten gleich oder nicht, etc., alles Fragen, auf welche wir, wenigstens auf so elementaren Gebieten der Mathematik gewohnt sind eine eindeutige und sicherbegründete Antwort zu bekommen. Wie MACFARLANE dann auch 1910 sehr richtig bemerkte, sind die Fragen der Notation Nebensache, und werden sie sich bald beantworten lassen, wenn man sich einmal über die tieferliegende Fragen, die die Grundbegriffe betreffen, geeinigt hat ¹⁾.

Es erhebt sich nun die Frage: was ist der Grund dieser ganz ungewohnten Unsicherheit? Systeme hoherer komplexer Zahlen werden angewandt auf geometrische Grössen, Linienteile, Ebenenteile, etc. Die Unsicherheit liegt nicht in den hoheren Zahlensystemen, denn über deren Theorie herrscht vollständige Einstimmigkeit. Auch liegt die Unsicherheit nicht in den geometrischen Tatsachen, denn die mathematischen Gebiete, um welche es sich hier handelt, sind so vollständig bekannt, dass auch hier kein Meinungsunterschied mehr auftreten kann. Die Unsicherheit muss also entstehen *bei der Verknüpfung der Zahlensysteme mit den geometrischen Grössen*. In der Tat ist man nun auch bis jetzt immer so vorgegangen, dass ein Zahlensystem « gegeben », d. h. in irgend

¹⁾ *Notations rationnelles pour le système vectoriel minimum*: 10. *Opinion de M. Alex. MACFARLANE* [L'Enseignement Mathématique, XII^e Année (1910), pp. 45-46].

einer Weise erfunden wurde, und der Erfinder nachher zu zeigen hatte, dass die Rechnungsweise sich in der Tat bis zu einem gewissen Grad den geometrischen Tatsachen anschloss. Es gilt also, den umgekehrten Weg zu gehen, *auszugehen von den genaudefinierten geometrischen Grössen, für die man ein Zahlensystem entwerfen will*, und zu bestimmen, welche Systeme es für diese Grössen überhaupt geben kann. Dieser Weg konnte erst begangen werden, nachdem F. KLEIN das Prinzip der Klassifizierung der Geometrien und geometrischen Grössen nach ihrem Verhalten bei verschiedenen Transformationsgruppen aufgestellt hatte ²⁾, und damit erst die Möglichkeit gegeben war, eine geometrische Grösse genau zu definieren. Nach dem Kleinschen Prinzip ist eine Geometrie Invariantentheorie einer ganz bestimmten Transformationsgruppe, und eine geometrische Grösse der Inbegriff einer Anzahl Bestimmungszahlen, die sich bei einer ganz bestimmten Transformationsgruppe, wie man sagt « in sich » transformieren. Daraus geht hervor, dass eine geometrische Grösse nur existiert bei einer ganz bestimmten Transformationsgruppe, und bei anderen Gruppen, bei denen die Eigenschaft des in sich transformiert werdens nicht besteht, als solche zerstört wird. Ferner erscheint die Weise, wie die Bestimmungszahlen sich bei der zu Grunde gelegten Gruppe transformieren, oder, wie wir kurz sagen wollen, die Orientierungsweise, als charakteristische Eigenschaft einer jeden geometrischen Grösse, und also als besonders dazu geeignet als Merkmal bei der Klassifizierung verwendet zu werden.

Betrachten wir nun die geometrischen Grössen von diesem Standpunkte, so ist zunächst klar, dass die Frage nach dem Zahlensystem der Grössen eines bestimmten z. B. des dreidimensionalen Raumes, *ohne Angabe der Transformationsgruppe, die der Betrachtung zu Grunde gelegt werden soll, überhaupt keinen Sinn hat*. Denn, je nachdem dann die eine oder andere Transformationsgruppe im weiteren Verlauf der Rechnung bewusst oder unbewusst zu Grunde gelegt wird, kann man verschiedene Systeme erhalten, und es lässt sich in der Tat zeigen, dass die zur Zeit vorhandenen Systeme sich gerade in der Weise unterscheiden. Wird aber die Transformationsgruppe mitgegeben, so ist die Frage eine ganz bestimmte, wenn zunächst festliegt, was wir unter Addition verstehen wollen. Denn, da eine Multiplikation ja nichts anderes ist als eine zur Addition distributive Verknüpfung, bedeutet die Frage nach dem Zahlensystem der Grössen einer bestimmten Orientierungsweise nichts anderes als die Frage nach der allgemeinsten distributiven Verknüpfung dieser Grössen, in der keine Teile anderer Orientierungsweise enthalten sind. *Da aber die allgemeinste Orientierungsweise eines Produktes immer, auch*

²⁾ F. KLEIN: a) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der Universität zu Erlangen) (Erlangen, A. Deichert, 1872); b) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Mathematische Annalen, Bd. XLIII (1893), S. 63-100]; c) *Einleitung in die höhere Geometrie* (Authogr.) (Göttingen 1893); d) *Zur Schraubentheorie von Sir ROBERT BALL* [Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XLVII (1902), S. 237-265]; e) *Zur Schraubentheorie von Sir ROBERT BALL* [Mathematische Annalen, Bd. LXII (1906), S. 419-448]; f) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil I (1908), Teil II (1909) (Leipzig, Teubner) (Zweite Auflage, 1913).

wenn die Multiplikationsart vollständig unbekannt ist, eben des distributiven Gesetzes wegen, vollkommen gegeben ist durch die Orientierungsweise der beiden Faktoren, lässt sich diese Frage sehr einfach beantworten, und die Beantwortung liefert ein Zahlensystem, das im allgemeinen noch einige Zahlenparameter enthalten wird, und also eigentlich ein Systemkomplex ist. Dieses Systemkomplex umfasst aber sicher sämtliche für die gegebenen Grössen möglichen Zahlensysteme, da, ausser dem distributiven Gesetz, dem ja jede Multiplikation gehorchen muss, keinerlei weitere Voraussetzungen gemacht sind.

Wir gelangen also zu dem verlangten allgemeinen Gesichtspunkte, der uns ermöglicht, zu jeder Klasse genau definierter geometrischer Grössen sofort den zugehörigen Systemkomplex anzugeben, wenn wir das Kleinsche Prinzip nicht nur zur Klassifizierung von Grössen, sondern auch zur Schaffung von Zahlensystemen verwenden.

Wenn wir jetzt diese Prinzipien zum Aufbau des Systems für die geometrischen Grössen in einem Punkt in drei Dimensionen ³⁾ verwenden wollen, so sind also zunächst die Transformationsgruppen anzugeben, die der Betrachtung zu Grunde zu legen sind. Als erste Gruppe bietet sich die der Drehungen, Grössen, die schon bei Drehungen zerstört werden, gehören der Topographie, nicht der Geometrie an, und brauchen deshalb nicht betrachtet zu werden. Je nachdem die Bestimmungszahlen einer Grösse sich nun bei Drehungen transformiren wie:

$$x^0 = y^0 = z^0,$$

$$x, y, z,$$

$$x^2, y^2, z^2, \quad 2yz, \quad 2zx, \quad 2xy$$

wo x , y , und z die Koordinaten eines Punktes, unterscheiden wir Grössen nullter, erster, zweiter, etc. Ordnung. Es sei nur noch die Bedingung hinzugefügt, dass eine Grösse n ter Ordnung keine Grössen niederer Ordnung enthalten darf. Grössen gleicher Ordnung, deren Bestimmungszahlen in Bezug auf dasselbe Koordinatensystem proportional sind, nennen wir *gleicher rotationaler Orientierung*, kommen keine andere Gruppen mehr in Betracht, so sind sie *gleicher Orientierung*, und dürfen bis auf einen Zahlenfaktor identifiziert werden. Wollen wir dagegen noch feinere Unterschiede machen, so ist dazu die Gruppe der linearen homogenen Transformationen mit Determinante 1 besonders geeignet. Bei derselben ist das Volumelement invariant, und herrscht demnach vollständige Dualität zwischen Vektoren und Bivektoren. Die Grössen, die bei dieser umfassenderen Gruppe nicht zerstört werden, stimmen mit GRASSMANN'S Ausdehnungsgrössen überein, die anderen, die nur bei der Gruppe der Drehungen standhalten, nennen wir rechte Winkelgrössen. Bei Einführung der umfassenderen Gruppe betrachten wir nun zwei Ausdehnungsgrössen erst dann als von gleicher Orientierung, und demnach bis auf einen Zahlenfaktor identifizierbar, wenn ihre Bestimmungszahlen sich auch bei

³⁾ Das sind die sogenannten freien Grössen, z. B. freie Vektoren etc., im Gegensatz zu gebundenen Vektoren, etc.

dieser in derselben Weise transformiren, und zwei rechte Winkelgrößen, wenn sie gleicher rotationaler Orientierung und gleicher Stufe sind. Der Begriff der Stufe leitet sich in bekannter Weise mit Hülfe der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen ab.

Das System z. B. der Größen bis zur ersten Ordnung kann jetzt sofort berechnet werden. Die Berechnung geschieht in der Weise, dass man in dem allgemeinsten Produkt alle Größen höherer als erster Ordnung gleich null setzt ⁴⁾. Das erhaltene System enthält noch zwei Zahlenparameter. Man kann aber zeigen, dass, wie auch drei Zahlen Φ , Ψ und Ω beschaffen sind, stets

$$\Phi - |(\Psi - | \Omega) = \alpha(\Phi - | \Psi) - | \Omega,$$

wo α eine von den Faktoren abhängige gewöhnliche Zahl. Die gefundene Multiplikation $-|$ ist also jedenfalls insofern associativ als nur die Orientierung, und noch nicht der Absolutwert der Größen in Frage kommt. Daraus folgt aber, dass wir bei Einführung des vollen associativen Gesetzes keine Größen ungleicher Orientierung identifizieren, diese Einführung also nicht mit dem KLEINSCHEN Prinzip in Streit kommen kann, und nur der Wahl einer Massbestimmung gleichkommt, die gerechtfertigt, und ihrer Einfachheit wegen sogar geboten ist. Damit verschwindet dann aber die Unbestimmtheit der beiden Parameter, und wir gelangen zu folgendem Resultat:

Zu den geometrischen Größen in einem Punkt in drei Dimensionen gehört ein und nur ein associatives Zahlensystem, das ihre sämtlichen distributiven Eigenschaften zum Ausdruck bringt, und das sämtliche überhaupt mögliche Systeme umfasst.

Die Multiplikationsregeln dieses Systemes sind die Folgenden:

$\nearrow$	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m
e_1	$-m^{(2)}$	E_3	$-E_2$	E_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1	$-m^{(1)}$	e_3	$-e_2$	e_1
e_2	$-E_3$	$-m^{(2)}$	E_1	E_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2	$-e_3$	$-m^{(1)}$	e_1	e_2
e_3	E_2	$-E_1$	$-m^{(2)}$	E_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3	e_2	$-e_1$	$-m^{(1)}$	e_3
$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$
E_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1	$-m^{(1)}$	e_3	$-e_2$	e_1	$-m^{(2)}$	E_3	$-E_2$	E_1
E_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2	$-e_3$	$-m^{(1)}$	e_1	e_2	$-E_3$	$-m^{(2)}$	E_1	E_2
E_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3	e_2	$-e_1$	$-m^{(1)}$	e_3	E_2	$-E_1$	$-m^{(2)}$	E_3
$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$
ε_1	$-m^{(1)}$	e_3	$-e_2$	e_1	$-m^{(2)}$	E_3	$-E_2$	E_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1
ε_2	$-e_3$	$-m^{(1)}$	e_1	e_2	$-E_3$	$-m^{(2)}$	E_1	E_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2
ε_3	e_2	$-e_1$	$-m^{(1)}$	e_3	E_2	$-E_1$	$-m^{(2)}$	E_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3
m	e_1	e_2	e_3	$m^{(1)}$	E_1	E_2	E_3	$m^{(2)}$	ε_1	ε_2	ε_3	m

⁴⁾ Für weitere Ausführungen siehe man das im Verlage von B. G. Teubner erschienene Buch des Verfassers: *Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis*.

oder, in Formeln:

Umgekehrt:

$$\begin{array}{lcl}
 e_1 \dashv e_2 = E_3 & - & E_3 \\
 e_1 \dashv e_1 = -m^{(2)} & - & m^{(2)} \\
 e_1 \dashv E_2 = \varepsilon_3 & - & \varepsilon_3 \\
 e_1 \dashv E_1 = -m & - & m \\
 e_1 \dashv \varepsilon_2 = e_3 & - & e_3 \\
 e_1 \dashv \varepsilon_1 = -m^{(1)} & - & m^{(1)} \\
 E_1 \dashv e_2 = \varepsilon_3 & - & \varepsilon_3 \\
 E_1 \dashv E_2 = e_3 & - & e_3 \\
 E_1 \dashv E_1 = -m^{(1)} & - & m^{(1)} \\
 E_1 \dashv \varepsilon_2 = E_3 & - & E_3 \\
 E_1 \dashv \varepsilon_1 = -m^{(2)} & - & m^{(2)} \\
 \varepsilon_1 \dashv e_2 = e_3 & - & e_3 \\
 \varepsilon_1 \dashv E_2 = E_3 & - & E_3 \\
 \varepsilon_1 \dashv \varepsilon_2 = \varepsilon_3 & - & \varepsilon_3 \\
 \varepsilon_1 \dashv \varepsilon_1 = -m & - & m
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{lcl}
 m^{(1)} \dashv e_1 = E_1 & & \\
 m^{(1)} \dashv E_1 = \varepsilon_1 & & \\
 m^{(1)} \dashv \varepsilon_1 = e_1 & & \\
 m^{(2)} \dashv e_1 = \varepsilon_1 & & \\
 m^{(2)} \dashv E_1 = e_1 & & \\
 m^{(2)} \dashv \varepsilon_1 = E_1 & & \\
 m^{(1)} \dashv m^{(2)} = m & & \\
 m^{(1)} \dashv m^{(1)} = m^{(1)} & & \\
 m^{(2)} \dashv m^{(2)} = m^{(2)} & &
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} \varepsilon_1 \dashv e_2 = E_3 \\ \varepsilon_1 \dashv E_2 = E_3 \\ \varepsilon_1 \dashv \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Commut.} \\ \text{Cycl.} \end{array}$$

Von den Grössen e , E , ε , $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ und m sind e , E , und m Ausdehnungsgrössen erster, bez. zweiter, bez. dritter Stufe, eine Grösse in e ist also ein Vektor, eine Grösse in E ein Bivektor, und m ein gewöhnlicher Skalar. Die Grössen in $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ und ε sind rechte Winkelgrössen erster, zweiter und dritter Stufe, Grössen in ε sind rechte Quaternionen.

Besonders wichtige Untersysteme sind das *Kernsystem*:

	ε_1	ε_2	ε_3	m
ε_1	$-m$	ε_3	$-\varepsilon_2$	ε_1
ε_2	$-\varepsilon_3$	$-m$	ε_1	ε_2
ε_3	ε_2	$-\varepsilon_1$	$-m$	ε_3
m	ε_1	ε_2	ε_3	m

das nur Quaternionen enthält, und ein sogenanntes *ursprüngliches System zweiter Ordnung* in geometrischer Form darstellt, symbolisch angegeben durch U_{g^2} , und das *Potenzsystem*:

	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	m
$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	m	$m^{(1)}$
$m^{(2)}$	m	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$
m	$m^{(1)}$	$m^{(2)}$	m

eine sogenannte *Hauptreihe dritter Ordnung* in geometrischer Form, H_{g^3} ⁵⁾. Jede ein-

⁵⁾ Ausser der Obenerwähnten vergleiche man die Arbeit des Verfassers: *Zur Klassifizierung der associativen Zahlensysteme* [Mathematische Annalen, Bd. LXXVI (1915), S. 1-66].

fache Zahl des Systems, d. h. jede Zahl, die sich nur aus Grössen derselben Stufe zusammensetzt, (nur solche Grössen haben eine einfache geometrische Bedeutung), ist entweder eine Zahl des Kernsystems, oder eine solche Zahl, multipliziert mit $m^{(1)}$ oder $m^{(2)}$. Jedenfalls findet sie also im Kernsystem ihr Korrelat, und letzteres erscheint dadurch als verkürztes Abbild des ganzen Systems. In der Sprache der Theorie der Zahlensysteme heisst das totale System das Produkt seines Kernsystems mit seinem Potenzensystem, symbolisch: $U_{g^2} H_{g^3}$.

Man kann die Multiplikation $\neg$ zerlegen in zwei andere:

$$\text{die skalare:} \quad \neg = \frac{\neg + \neg}{2}$$

$$\text{und die vektorische:} \quad \times = \frac{\neg - \neg}{2}$$

$$\neg = \cdot + \times = \times.$$

Dadurch entstehen zwei Teilsysteme, die hier kurzweilshalber nur für das Kernsystem angegeben seien:

$$U_{g^{2v}}: \begin{array}{c} + \\ \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ m \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad m \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \epsilon_3 & -\epsilon_2 & 0 \\ -\epsilon_3 & 0 & \epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_2 & -\epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}, \quad U_{g^{2s}}: \begin{array}{c} \begin{array}{c} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ m \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad m \\ \left[\begin{array}{cccc} -m & 0 & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & -m & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & 0 & -m & \epsilon_3 \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & m \end{array} \right] \end{array}.$$

oder in Formeln:

$$U_{g^{2v}}: \quad \epsilon_1 \times \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\epsilon_2 \times \epsilon_1, \quad U_{g^{2s}}: \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \cdot \epsilon_1 = -m \\ m \cdot \epsilon_1 = \epsilon_1 \\ m \cdot m = m \end{array} \right\} \text{cycl.}$$

(Nicht angegebene Produkte sind null). Das totale System zerfällt in $U_{g^{2s}} H_{g^3}$ und $U_{g^{2v}} H_{g^3}$. Im totalen System entspricht

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

einem Vektor,

$$A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3,$$

dem dazu senkrechten Bivektor,

$$\alpha = a_1 \epsilon_1 + a_2 \epsilon_2 + a_3 \epsilon_3,$$

dem rechten Quaternion, der vektorisch multipliziert sämtliche Vektoren in A , sämtliche Bivektoren durch a , und sämtliche rechte Quaternionen, deren Achse in A liegt, um 90° dreht, und ihre absolute Grösse um einen Faktor

$$a_m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ändert. Eine Grösse in ϵ und m ist ein Quaternion, und bewirkt in ähnlicher Weise

eine Drehung um einen bestimmten Winkel, und eine Grössenänderung, eine Grösse in e und $m^{(1)}$ bewirkt eine ähnliche Drehung und Grössenänderung, setzt aber gleichzeitig einen Vektor, Bivektor oder rechten Quaternion in seinen zugehörigen Bivektor, bez. rechten Quaternion, bez. Vektor um. Ähnliches gilt für E und $m^{(2)}$.

Für einen Raum von mehr als drei Dimensionen kann das Zahlensystem der Grössen in einem Punkt bis zur ersten Ordnung in derselben Weise berechnet werden. Für n Dimensionen ist das System:

$$\begin{aligned} U_{g^2}^{\frac{n-1}{2}} H_{g^{n(n-2)}} & \quad \text{für } n \text{ ungerade,} \\ U_{g^2}^{\frac{n}{2}} H_{g^{\frac{1}{2}n(n-2)}} & \quad \text{» » gerade.} \end{aligned}$$

Wie gesagt, umfasst das gefundene System sämtliche mögliche Systeme, also auch sämtliche zur Zeit existierende. Lässt man die rechten Winkelgrössen aus, betrachtet man also nur diejenigen Grössen, die auch linearen homogenen Transformationen standhalten, so resultiert die GRASSMANN'sche äussere Multiplikation freier Ausdehnungsgrössen, sieht man von der feineren Unterscheidung mittels der linearen homogenen Transformationen ab, and legt man also der Unterscheidung nur Drehungen zu Grunde, so verschwindet der Unterschied zwischen Vektoren, Bivektoren und rechten Quaternionen, sodass man diese durch denselben Buchstaben i darstellen kann:

$$e = E = \varepsilon = i.$$

Das System geht dadurch zurück auf sein Kernsystem; das jetzt in der Form:

$$\left. \begin{aligned} i_1 \cdot i_1 &= -m \\ m \cdot i_1 &= i_1 & i_1 \times i_2 &= i_3 = -i_2 \times i_1 \\ m \cdot m &= m \end{aligned} \right\} \text{cycl.}$$

erscheint. Für n ungerade lässt sich das selbe Verfahren in höheren Dimensionen anwenden, es resultiert dabei das System

$$U_{g^2}^{\frac{n-1}{2}}$$

und bei Berücksichtigung des Unterschiedes zwischen polaren und axialen Grössen:

$$U_{g^2}^{\frac{n-1}{2}} H_{g^2}^6).$$

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass die Gleichsetzung von e , E und ε genau ebenso berechtigt ist wie die frühere Unterscheidung, da man ja bei der Wahl der zu Grunde zulegenden Gruppe prinzipiell frei ist. Diese Wahl wird nur durch die

⁶⁾ Die Bemerkung auf Seite 62 der « Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis », dass bei gerader Richtungszahl alle Grössen gerader Stufe axial sind, und also keine Verdoppelung des Systems stattfindet, ist unrichtig. Es sei zugleich ein Fehler auf Seite 21 verbessert. Die dort als Beispiel contragredienter Grössen angeführte Grössen $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ sind nicht contragredient, da sie sich nicht linear transformieren. Die Sätze « Giebt man ... zu den a », « In der Tat ist ... invariant » auf S. 21 und die Worte « und contragredient zu ... » auf S. 22 sind also zu streichen.

praktische Zwecke bestimmt, die man mit dem Zahlensystem erreichen will, so ist z. B. für die Physik, die sich im allgemeinen nicht mit linearen homogenen Transformationen der Koordinaten einzulassen braucht, jedenfalls das System in $\mathbf{m}$ und $\mathbf{i}$ angewiesen.

Im Besitze des umfassenden Systemes erscheint uns jetzt das Entstehen des Streites der verschiedenen Schulen begreiflich und die dem Streite zu Grunde liegende Frage leicht zu beantworten. Zunächst war jedes der bisherigen Systeme verkürzt, und konnte also nie das ganze Gebiet beherrschen. Wo dies doch geschehen sollte, entstand notwendig Streit, da sich kein anderes System umfassen lassen wollte, und auch nicht richtig umfasst werden konnte. Legen wir aber das System in $\mathbf{m}^{(1)}$, $\mathbf{m}^{(2)}$ $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{\varepsilon}$, zu Grunde, so kann jeder dasjenige herausnehmen, was seinem Bedarf entspricht, und identifizieren, was zu seinem augenblicklichen Zwecke nicht unterschieden werden soll. In dem umfassenden System vereinigen sich aber alle Teile, Vektoren-, Bivektoren-, und Quaternionenrechnung zu einem widerspruchsfreien Ganzen. Damit ist aber erst der Zeitpunkt eingetreten, wo die von MACFARLANE geforderte begriffliche Einheit vorhanden ist, und über Fragen der Notation wirklich fruchtbar diskutiert werden könnte.

Wollen wir statt des $\mathbf{m}$ die $\mathbf{i}$ einführen, wie das in der Vektoranalysis gebräuchlich ist, so haben wir zu beachten, dass die Multiplikation gewöhnlicher Zahlen mit Zahlen des Systems, für die einen Augenblick das Zeichen $\circ$ eingeführt sei, *nicht identisch ist mit* $\cdot$. Es ist also wohl:

$$\mathbf{m} \cdot = \mathbf{i} \circ$$

aber nicht ohne weiteres:

$$\mathbf{m} = \mathbf{i}.$$

Wollen wir letztere Gleichsetzung nun doch einführe, so bedeutet dieselbe, dass wir alle gewöhnliche Zahlen als Zahlen des Systems betrachten, und wir sind demnach dann auch gerechtfertigt, überall $\circ$ durch $\cdot$ zu ersetzen. Wir brauchen also nicht mehr, wie in der Vektoranalysis gebräuchlich, mit drei Multiplikationen, $\circ$, $\cdot$, und $\times$ zu arbeiten, was die Symmetrie der Formeln und damit die Brauchbarkeit der Analysis erhöht.

Das System erscheint also jetzt in der Form:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 &= -1, \\ \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 &= -\mathbf{i}_1, \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 \end{aligned} \right\} \text{cycl.}$$

Bekanntlich schreibt die herkömmliche Form der Vektoranalysis hier $+1$ statt -1 , allerdings ohne dieses $+$ Zeichen in irgend einer Weise zu begründen. Erklären lässt sich das Auftreten dieses Zeichens dadurch, dass es innerhalb des Anwendungsgebiets der Vektoranalysis, sofern wir uns ganz ausdrücklich nur auf die Betrachtung von Grössen bis zur ersten Ordnung beschränken, keine physikalischen Grössen giebt, die aus einem Vektor und einem Skalar zusammengesetzt sind, und das associative Gesetz der Multiplikation $\times$ also wenig praktische Bedeutung hat. Obwohl nun die Einführung des $+$ Zeichens, bei welcher die associative Eigenschaft verloren geht, für die Analysis keinerlei Gewinn bringt, ja sogar die bestehende vollständige Symmetrie der Formeln aufhebt, so haben doch die Urheber der Vektoranalysis, als sie den Schritt taten zur Anerkennung der beiden Teile der Quaternionmultiplikation $\times$ als selbststän-

dige Multiplikationen, gleichzeitig, und im Grunde ganz unabhängig davon, das — Zeichen in ein + Zeichen verwandelt. Der eigentliche Grund ist dabei wohl der gewesen, dass das — Zeichen in den Voraussetzungen, dessen Bedeutung in der eigentlichen Vektoranalysis nicht sofort zu Tage tritt, dem Anfänger unerklärlich bleibt, und, so nicht geeignet erscheint, die Popularität der neuen Rechnungsweise zu fördern.

Beim Gebrauche des — Zeichen tritt vollständige Symmetrie auf zwischen $\cdot$ und $\times$ bez. conv und rot. So ist z. B.:

$$\nabla^2 a = \text{conv conv } a + \text{rot rot } a \quad (\text{conv } p = \text{grad } p, \text{ da } \circ = \cdot)$$

statt:

$$\nabla^2 a = \text{grad div } a - \text{rot rot } a$$

und die Zerlegung eines endlichen Vektorfeldes lautet:

$$v = \text{conv} \int_{\tau} \frac{\text{conv } v}{4\pi a_m} d\tau + \text{conv} \int_{\sigma} \frac{n \cdot v}{4\pi a_m} d\sigma + \text{rot} \int_{\tau} \frac{\text{rot } v}{4\pi a_m} d\tau + \text{rot} \int_{\sigma} \frac{n \times v}{4\pi a_m} d\sigma,$$

statt:

$$v = -\text{grad} \int_{\tau} \frac{\text{div } v}{4\pi a_m} d\tau - \text{grad} \int_{\sigma} \frac{n \cdot v}{4\pi a_m} d\sigma + \text{rot} \int_{\tau} \frac{\text{rot } v}{4\pi a_m} d\tau + \text{rot} \int_{\sigma} \frac{n \times v}{4\pi a_m} d\sigma.$$

Nun sei sofort zugegeben, dass die Symmetrie der Formeln zwar sehr angenehm, aber für die praktische Rechnung nicht unbedingt erforderlich ist ⁷⁾. Es lässt sich mit der Vektoranalysis auch in ihrer heutigen unsymmetrischen Gestalt immer noch sehr gut rechnen, d. h. so lange man sich ausdrücklich nur mit Grössen bis zur ersten Ordnung befasst. Aber auch nur so lange. Betrachtet man auch Grössen zweiter Ordnung, und dies wird sofort nötig, wenn man auch die Differentialrechnung der Vektoren aufbauen will, so kann man genau in derselben Weise wie oben fragen nach dem Zahlensystem der Grössen bis zur zweiten Ordnung, etwa unter Zugrundelegung der Gruppe der Drehungen. Wir erhalten dann wiederum ein und nur ein associatives System, mit 9 Einheiten ⁸⁾. Vier derselben sind die schon bekannten: $1, i_1, i_2, i_3$ und es gesellen sich sechs andere: $L_1, L_2, L_3, I_1, I_2, I_3$ mit der Bedingung $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ hinzu. Letztere bestimmen reine Grössen zweiter Ordnung, die wir *Deviatoren* nennen wollen. Die allgemeinsten Grössen des Systems bestehen aus einem Skalar, einem Vektor, und einem Deviator, und heissen *Affinoren* ⁹⁾, die Analysis selbst demnach *Affinoranalysis*. Neben den schon bekannten zwei Grundmultiplikationen tritt in der Affinoranalysis eine dritte $\times$, die *deviatorische*, auf, und die Analysis baut sich ebenso auf $\cdot$, $\times$ und $\times$ auf, wie die Vektoranalysis auf $\cdot$ und $\times$. Diese Uebereinstimmung, und damit der richtige organische Zusammenhang der Analysen erster und zweiter Ordnung ist nun aber nur dann vorhanden, wenn die Multiplikation $\cdot$ in unserem Sinne, also mit dem —

⁷⁾ Indessen mag immerbin bemerkt werden, dass der Physiker gewissermassen in demselben Verhältniss steht zum Mathematiker, wie der Astronom zum Optiker, beide haben das vollste Recht zu verlangen, dass das Ihnen überlieferte Instrument das Bild des betrachteten Gegenstandes nicht in unnötiger Weise verzerrt.

⁸⁾ Das System ist ein U_{g3} .

⁹⁾ Dieses Wort rührt von F. JUNG her.

Zeichen und bei Identifizierung von $\circ$ und $\cdot$ gedeutet wird. Da für die Analysis der Grössen bis zur dritten Ordnung und für die noch hoeheren Analysen ähnliches gilt ¹⁰⁾, können wir also folgendes Resultat aussprechen:

Die Vektoranalysis ist in der heutigen Form, mit dem $+$ Zeichen, zwar ein recht brauchbares Instrument, sie enthält aber unnötige Asymmetrien, und steht nicht in organischem Zusammenhang mit den Systemen hoeherer Ordnung. Mit dem $-$ Zeichen dagegen, wie sie sich von selbst unter Anwendung des Kleinschen Prinzips der Klassifizierung zur Systembildung ergibt, gestaltet sie sich vollkommen symmetrisch, wodurch sich ihre praktische Bedeutung noch erhöht, und bildet sie das erste Glied einer genau angebbaren Reihe von Analysen, die sich mit Grössen bis zur beliebigen Ordnung befassen, und die alle im engsten Zusammenhang stehen.

In der Affinoranalysis stellen sich aus den drei Grundmultiplikationen zwei Hauptmultiplikationen zusammen, die dyadische, und die affinorische. Erstere steht in naher Beziehung zur skalaren Multiplikation, letztere, die associativ ist, zur vektorischen. Mit Ihnen bilden sich zwei Differentialoperatoren Conv und Rot, die für Affinorfelder eine ähnliche Bedeutung haben wie conv und rot für Vektorfelder ¹¹⁾.

Delft, März 1914.

J. A. SCHOUTEN.

¹⁰⁾ Das System enthält 16 Einheiten und 4 Grundmultiplikationen, und ist ein U_{g_4} .

¹¹⁾ Für nähere Ausführungen sowie für die Beziehungen der Affinoranalysis zu den Systemen hoeherer Ordnung anderer Autoren siehe man das schon oben erwähnte Buch [loc. cit. 4)].