ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2792.

Ueber abnorme Fehlervertheilung und Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen.

[Mit 1 Tafel.]

Von R. Lehmann-Filhés.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass viele Beobachtungsreihen ein häufigeres Vorkommen grosser Fehler zeigen, als man nach der von Gauss für die Fehlerwahrscheinlichkeit gegebenen Formel*) erwarten sollte. Diesen Umstand erklärt man vielfach dadurch, dass während der Beobachtungen Störungen eintreten, welche abnorm grosse Fehler hervorzubringen im Stande sind, ja, man hält sich sogar mitunter für berechtigt, jene offenbar stark fehlerhaften Beobachtungen als unbrauchbar zu verwerfen. Um jedoch hierbei nicht nach Willkür zu verfahren, hat man gewisse Regeln aufgestellt, nach denen jene Verwerfung stattfindet, die indess nur als scheinbar wissenschaftlicher Aufputz eines an sich sehr bedenklichen Verfahrens angesehen werden dürfen. Die eine dieser Regeln schreibt vor, diejenigen Beobachtungen zu verwerfen, deren Fehler jenseits einer Grenze liegen, für deren Ueberschreitung dem Gauss'schen Fehlergesetz zufolge die Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{2}$, dividirt durch die Anzahl der Beobachtungen ist.

Das andere mir bekannte Kriterium, welches sich, — wie es scheint, seiner Complicirtheit wegen — eines besonderen Ansehens erfreut, rührt von Prof. Peirce her.***) Dasselbe untersucht, ob das Zustandekommen des gegebenen Fehlersystems wahrscheinlicher ist unter der Annahme normaler Beobachtungsverhältnisse oder unter Voraussetzung von Störungen, welche gewisse Beobachtungen verfälscht haben. Da nun aber die Wahrscheinlichkeit y einer solchen gestörten Beobachtung unbekannt ist, so wird einer gewissen von y abhängigen Function $y^n(1-y)^{n'}$, in welcher n die Anzahl der verdächtigen, n' die der unverdächtigen Beobachtungen bedeutet, ihr Maximalwerth $\frac{n^n \cdot n'^{n'}}{(n+n')^{n+n'}}$ beigelegt, wodurch die Wahrscheinlichkeit, dass Störungen vorgekommen sind, übertrieben gross gefunden wird.

In ähnlicher Weise wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Fehlersystem unter normalen Umständen entstanden ist,

von Peirce etwas zu klein berechnet, beides Umstände, die dahin wirken, dass mehr Beobachtungen ausgeschlossen werden, als selbst in der Absicht des Kriteriums liegt.

Gegen die beiden soeben kurz skizzirten Verfahrensarten kann man ferner noch einwenden, dass sie auf die Unsicherheit der Bestimmung des mittleren Fehlers, der in beiden eine fundamentale Bedeutung hat, keine Rücksicht nehmen, während eine Aenderung desselben innerhalb seines wahrscheinlichen Fehlers*) hinreichen kann, eine verworfene Beobachtung als zulässig erscheinen zu lassen.

Sehen wir aber auch von diesen Mängeln ab, so bleibt immer noch das Bedenken, ob denn überhaupt eine aposteriorische Verwerfung von Beobachtungen berechtigt ist. Im Folgenden werden wir — wenigstens für gewisse Fälle — eine Antwort auf diese Frage zu geben versuchen.

Die Wahrnehmung, dass grössere Beobachtungsfehler häufiger vorkommen, als die Gauss'sche Formel erwarten lässt, ist keine ganz vollständige, denn in gewissen Fällen, die durchaus nicht selten zu sein scheinen, haben die Abweichungen von der Theorie einen eigenthümlichen, regelmässigen Verlauf. Wir theilen die sämmtlichen Fehler in Gruppen mit äquidistanten Grenzen ein, zählen die in jeder Gruppe vorkommenden Fehler und bilden die Unterschiede der so erhaltenen Erfahrungszahlen E und der aus der Gauss'schen Exponentialformel folgenden theoretischen Anzahlen G ; diese Differenzen, im Sinne Erfahrung—Theorie ($E-G$) genommen, tragen wir in beliebigem Maassstabe als äquidistante Ordinaten auf und verbinden sodann die Endpunkte je zweier aufeinanderfolgender durch gerade Linien. Um die charakteristischen Eigenschaften der so entstehenden gebrochenen Linien zu erkennen, wollen wir die erwähnte Construction für einige Beispiele wirklich ausführen. Die drei ersten entnehmen wir Bessel's Fundamenta Astronomiae pag. 19 und 20.

1) Die Vertheilung der Fehler von 300 Bradley'schen Bestimmungen der Declinationen der Sterne α Tauri, α Orionis, α Canis majoris, α Canis minoris, α Bootis, α Aquilae wird durch folgendes Täfelchen gegeben.***)

*) Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium art. 177.

**) Astronomical Journal (Cambridge, Mass.) Vol. II, p. 161. Leider kenne ich nicht die Originalabhandlung, sondern nur die von Chauvenet (Manual of spherical and practical Astronomy, fifth edition, Vol. II p. 548 ff.) herrührende Darstellung, die aber nearly in the words of its author, and with only some slight changes of notation gegeben ist.

*) Vergl. Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen; ferner: Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae art. 15.

**) Die theoretischen Zahlen, die von Bessel nur nach einer ziemlich rohen Näherungsformel bestimmt waren, sind hier neu berechnet.

Fehler- grenzen	Anzahl der Fehler		Differenz $E-G$
	Erfahrung	Theorie	
0.0 - 0.4	66	65.1	+ 0.9
0.4 - 0.8	58	60.4	- 2.4
0.8 - 1.2	55	51.9	+ 3.1
1.2 - 1.6	28	41.4	- 13.4
1.6 - 2.0	27	30.6	- 3.6
2.0 - 2.4	23	21.0	+ 2.0
2.4 - 2.8	10	13.4	- 3.4
2.8 - 3.2	15	7.9	+ 7.1
3.2 - 3.6	8	4.3	+ 3.7
3.6 - 4.0	4	2.2	+ 1.8
4.0 - ∞	6	1.8	+ 4.2

m. F. = 1.745, w. F. = 0.98. Vgl. Fig. I.

II) Als zweites Beispiel benutzen wir 300 Bradley'sche Bestimmungen der Rectascensionen der Sterne α Canis minoris und α , β , γ Aquilae.

Fehler- grenzen	Anzahl der Fehler		Differenz $E-G$
	Erfahrung	Theorie	
0.0 - 0.1	114	109.1	+ 4.9
0.1 - 0.2	84	87.6	- 3.6
0.2 - 0.3	53	56.5	- 3.5
0.3 - 0.4	24	29.2	- 5.2
0.4 - 0.5	14	12.1	+ 1.9
0.5 - 0.6	6	4.1	+ 1.9
0.6 - 0.7	3	1.1	+ 1.9
0.7 - 0.8	1	0.2	+ 0.8
0.8 - 0.9	1	0.0	+ 1.0

m. F. = 0.5214, w. F. = 0.1426. Vergl. Fig. II.

III) Das dritte Beispiel betrifft 470 Bradley'sche Bestimmungen der Rectascensionen der Sterne α Canis minoris und α Aquilae.

Fehler- grenzen	Anzahl der Fehler		Differenz $E-G$
	Erfahrung	Theorie	
0.0 - 0.1	94	94.9	- 0.9
0.1 - 0.2	88	88.9	- 0.9
0.2 - 0.3	78	78.1	- 0.1
0.3 - 0.4	58	64.2	- 6.2
0.4 - 0.5	51	49.5	+ 1.5
0.5 - 0.6	36	35.8	+ 0.2
0.6 - 0.7	26	24.2	+ 1.8
0.7 - 0.8	14	15.3	- 1.3
0.8 - 0.9	10	9.1	+ 0.9
0.9 - 1.0	7	5.1	+ 1.9

m. F. = 0.3909, w. F. = 0.2637. Vgl. Fig. III.

IV) Im Gegensatz zu diesen langen Beobachtungsreihen führen wir noch eine kurze an, welche deswegen Interesse verdient, weil Prof. Peirce sie als Beispiel der Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen mittelst seines Kriteriums behandelt, wobei er findet, dass zwei Beobachtungen verworfen

werden müssen. Es handelt sich um 15 von Lieutenant Herndon im Jahre 1846 ausgeführte Messungen des Venusdurchmessers.

Fehlergr. in Einh. d. w. F.	Anzahl der Fehler		Differenz $E-G$
	Erfahrung	Theorie	
0.0 - 0.5	5	4.0	+ 1.0
0.5 - 1.0	4	3.5	+ 0.5
1.0 - 1.5	3	2.8	+ 0.2
1.5 - 2.0	1	2.0	- 1.0
2.0 - 2.5	0	1.3	- 1.3
2.5 - 3.0	1	0.7	+ 0.3
3.0 - 3.5	0	0.4	- 0.4
3.5 - 4.0	1	0.2	+ 0.8

m. F. = 0.572, w. F. = 0.3858. Vgl. Fig. IV.

So sehr auch zum Theil der Verlauf der gezeichneten gebrochenen Linien durch unregelmässige Auszackungen entsteht ist, so sind letztere doch nur secundärer Art, indem durchweg ein Minimum unterhalb der Abscissenaxe und weiterhin wieder ein Ansteigen über dieselbe ausgesprochen ist. Denken wir uns die Construction für immer wachsende Fehlerwerthe fortgesetzt, so würden die Erfahrungszahlen schliesslich alle gleich 0, während die theoretischen Anzahlen kleinere und kleinere positive Werthe annehmen. Die Linie würde sich also von der negativen Seite asymptotisch der Abscissenaxe nähern. Natürlich muss die Linie, die in unseren Figuren für grössere Fehler auf der positiven Seite liegt, erst von dieser her die Abscissenaxe erreichen, wovon sich in Fig. I und II deutliche Anzeichen verrathen.

Es liegt nahe, Curven zu zeichnen, welche sich den gebrochenen Linien möglichst gut anschliessen; besonders Fig. II fordert hierzu auf. In der That habe ich dies auch ausgeführt, theile indessen die betreffenden Versuche nicht mit, da gegen dieselben jedenfalls der Vorwurf einer gewissen Willkür erhoben werden kann. Die in den Figuren vorkommenden später zu erörternden Curven haben eine völlig andere Bedeutung.

Wichtiger ist es jedenfalls zu erfahren, welcherlei Ursachen eine so eigenthümliche Fehlervertheilung hervorbringen können. Es sei mir gestattet, eine äusserst nahe liegende Annahme auszusprechen, deren Zulässigkeit nachträglich an den vorliegenden Zahlenbeispielen geprüft werden soll.

Wenn in einer längeren Beobachtungsreihe das Maass der Genauigkeit h wirklich stets denselben Werth beibehielte, so wäre es allerdings schwer zu erklären, warum die Fehlerwahrscheinlichkeit durch eine andere als die Gauss'sche Exponentialfunction ausgedrückt werden sollte, falls im Uebrigen die der Ableitung jener Function zu Grunde liegenden Praemissen erfüllt sind, was wir hier annehmen wollen. Jedoch scheint mir gerade jene Voraussetzung der Constanz von h völlig unhaltbar zu sein.*)

Ohne dass der Beobachter es weiss oder wissen kann, können sich die Genauigkeitsverhältnisse von Beobachtung

*) Dies ist in Uebereinstimmung mit der von Prof. S. Newcomb vertretenen Ansicht (A generalized Theory of the combination of observations so as to obtain the best result, American Journal of Mathematics Vol. VIII).

zu Beobachtung anders gestalten, so dass im Allgemeinen jeder Beobachtung ein anderes h zukommt. Welcher Werth von h einer bestimmten Beobachtung zugehört, kann man nicht sagen; man wird nur annehmen dürfen, dass alle h sich um einen Mittelwerth h_0 gruppieren, und dass die Häufigkeit des Vorkommens der Abweichung $h-h_0$ durch ein gewisses Gesetz geregelt ist. Letzteres mit Bestimmtheit anzugeben, ist freilich nicht möglich, doch liegt es jedenfalls nahe, versuchsweise die Wahrscheinlichkeit, dass h zwischen den Grenzen h und $h+dh$ liegt, auszudrücken durch die Function

$$\psi(h) dh = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(h-h_0)^2} dh$$

wobei k eine positive Constante bedeutet. Man wolle aber nicht vergessen, dass auf diese Annahme keineswegs eine allgemeine Fehlertheorie, sondern nur eine Prüfung einzelner Fälle gegründet werden soll.

Für ein bestimmtes h ist ferner der Gauss'schen Formel zufolge die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers zwischen den Grenzen v und $v+dv$ gleich

$$\varphi(v) dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} dv$$

$$W(v) dv = \frac{e^{-h_0^2 t^2} dt}{\int_{-k}^{+k} e^{-h_0^2 t^2} dt} = \frac{h_0 e^{-h_0^2 t^2} dt}{\int_{-h_0 k}^{+h_0 k} e^{-x^2} dx}$$

Für $k = \infty$ wird das Integral im Nenner $= \sqrt{\pi}$, und $t = v$, so dass in diesem Falle die Gauss'sche Exponentialform gilt, welche hiernach nur ein specieller Fall des soeben abgeleiteten Ausdruckes ist. Dieser Umstand zeigt übrigens, dass sich unsere Formel wenigstens nicht weiter als die Gauss'sche von der Wahrheit entfernen kann, da sich im ungünstigsten Falle eben $k = \infty$ ergeben muss.

Wie man sieht, wird $W(v)$ für unendlich grosse v unendlich klein, jedoch nicht dadurch, dass wie in $\varphi(v)$ die Exponentialgrösse verschwindet, sondern dadurch, dass der Nenner $\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)^{3/2}$ unendlich gross wird. Dieser Umstand ist insofern sehr störend, als es nicht möglich ist, einen theoretischen Werth des mittleren Fehlerquadrates abzuleiten, da das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 W(v) dv$ logarithmisch unendlich wird. Dies liegt hauptsächlich daran, dass es unrichtig ist,

Da nun dem v irgend ein h entsprechen kann, so ist überhaupt die Wahrscheinlichkeit, dass der Beobachtungsfehler innerhalb der Grenzen v und $v+dv$ liegt, gleich

$$W(v) dv = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \psi(h) dh}{\int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \psi(h) dh}$$

Eine leichte Rechnung ergibt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v) \psi(h) dh = \frac{h_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-h_0^2 \frac{v^2}{1 + \frac{v^2}{k^2}}}}{\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right)^{3/2}}$$

Setzt man noch

$$t = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{k^2}}}$$

so wird

von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren; vielmehr mussten hier die wahren Grenzen, die von den Fehlern im Maximum erreicht werden können, eingesetzt werden. Diese Grenzen kennt man aber nicht. Dass die Frage nach dem Maximalfehler bei Benutzung der Function $\varphi(v)$ nicht beantwortet

zu werden braucht, liegt daran, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \varphi(v) dv$ einen end-

lichen Werth behält. Nichtsdestoweniger ist die Function $\varphi(v)$ für alle Werthe von v jenseits jener Grenze ungültig, denn sie giebt stets von Null verschiedene Werthe, während sie an jener Grenze unstetig abbrechen müsste.* Mit Rücksicht auf den erwähnten Uebelstand muss man bei Benutzung der Function $W(v)$ gänzlich von der theoretischen Bildung des mittleren Fehlerquadrates absehen.

Was das Mittel der absoluten Fehlerwerthe betrifft, so ergibt sich hierfür ein convergenter Ausdruck, nämlich

$$2 \int_0^{\infty} v W(v) dv = \frac{p}{h_0 \theta} \left(\chi - \frac{1}{2} \frac{d\chi}{dp} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{d^2 \chi}{dp^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{d^3 \chi}{dp^3} + \dots \right)$$

wo

$$p = h_0^2 k^2$$

$$\chi = \frac{1 - e^{-p}}{2p}$$

*) Vergl. Gauss, Theoria motus c. c. art. 178.

$$\frac{d^m \chi}{dp^m} = (-1)^{m+1} \cdot \frac{e^{-p}}{2p} - \frac{m}{p} \cdot \frac{d^{m-1} \chi}{dp^{m-1}}$$

$$= (-1)^{m+1} \cdot \frac{e^{-p}}{2p} \cdot \left[1 + \frac{m}{p} + \frac{m(m-1)}{p^2} + \dots + \frac{m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{p^m} \right] + (-1)^m \cdot \frac{m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2p^{m+1}}$$

$$\theta = h_0 \int_0^k e^{-h_0^2 t^2} dt = \int_0^{\sqrt{p}} e^{-y^2} dy^*)$$

Wir haben nun zu untersuchen, auf welche Weise wir zur numerischen Kenntniss der in $W(v)$ auftretenden Constanten h_0 und k gelangen können. Eine grobe Annäherung ist bei dem rohen Zahlenmaterial ausreichend. Da man für k von vornherein einen ziemlich grossen Werth erwarten darf, so wird das im Nenner von $W(v)$ auftretende Integral

$\int_{-h_0 k}^{+h_0 k} e^{-x^2} dx$ genähert $= \sqrt{\pi}$ sein, weshalb wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-h_0 k}^{+h_0 k} e^{-x^2} dx = 1 - \alpha$$

wobei α jedenfalls eine sehr kleine Grösse ist, die in erster Approximation ganz vernachlässigt wird. Setzt man

$$r_0 = \frac{0.47694}{h_0}$$

so kann man auch schreiben

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{0.47694 \frac{k}{r_0}} e^{-x^2} dx = 1 - \alpha$$

Bekanntlich kann diese Function mit dem Argumente $\frac{k}{r_0}$ aus Tafeln, die sich vielfach in Handbüchern, z. B. im 2. Bande des schon citirten Chauvenet'schen Werkes finden, entnommen werden.

Hiernach ist

$$\int_{-v}^{+v} W(v) dv - \int_{-v}^{+v} \varphi(v) dv = \frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.47694 \frac{t}{r_0}} e^{-x^2} dx}{1 - \alpha} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.47694 \frac{v}{r}} e^{-x^2} dx$$

wobei r der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen ist. Multipliciren wir die Gleichung weiter mit der Gesamtzahl A der Beobachtungen, so erhalten wir

$$A \int_{-v}^{+v} [W(v) - \varphi(v)] dv = \frac{A}{1 - \alpha} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0.47694 \frac{v}{r}}^{0.47694 \frac{t}{r_0}} e^{-x^2} dx + \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.47694 \frac{v}{r}} e^{-x^2} dx \right]$$

Diese Gleichung ist noch ganz streng. Genähert ist nun

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0.47694 \frac{v}{r}}^{0.47694 \frac{t}{r_0}} e^{-x^2} dx = \frac{0.47694}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(0.47694 \frac{v}{r}\right)^2} \cdot \left(\frac{t}{r_0} - \frac{v}{r}\right)$$

Aber man findet leicht approximativ, wenn $\frac{v}{r} = n$ gesetzt wird,

$$\frac{t}{r_0} - \frac{v}{r} = n \frac{h_0 - h}{h} - \frac{1}{2} n^3 \frac{r^2}{k^2}$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{0.47694}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(0.47694 \frac{v}{r}\right)^2} = f$$

$$\frac{h_0 - h}{h} = x, \quad \frac{r^2}{k^2} = y,$$

so erhalten wir bei völliger Vernachlässigung von α

$$A \int_{-v}^{+v} [W(v) - \varphi(v)] dv = A n f(2x - n^2 y)$$

*) Vergl. für letzteres Integral, wenn p grosse Werthe hat, Laplace, Méc. cél. Livre X, Chap. I, art. 5. ferner Brünnow, Lehrbuch der sphär. Astr., dritte Ausgabe 1871, Seite 35.

Hat man bereits genäherte Werthe von x und y , also auch von h_0 und k , so kann man α finden und auf der rechten Seite der Gleichung noch das Glied

$$+ \alpha A \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.47694 \frac{v}{r}} e^{-x^2} dx$$

hinzusetzen, was indessen eine rein illusorische Genauigkeit giebt. Man wird nun obige Gleichung für gewisse äquidistante Werthe von v berechnen und dann jede Gleichung von der vorhergehenden abziehen. Die linken Seiten werden alsdann die schon in den Zahlenbeispielen erwähnten Differenzen $E-G$, vorausgesetzt, dass die Fehlerhäufigkeit durch die Function $W(v)$ geregelt ist. Aus den so erhaltenen Bedingungsgleichungen hat man dann nach der Methode der kleinsten Quadrate x und y zu berechnen, woraus endlich h_0 und k hervorgehen.

Wir wollen hier noch kurz anführen, wie man, wenn x und y bekannt geworden sind, die zur Berechnung des Integrals $\int_{-v}^{+v} W(v) dv$ nöthigen Argumente $\frac{k}{r_0}$ und $\frac{t}{r_0}$ bildet.

Man findet leicht

$$\frac{k}{r_0} = \frac{1+x}{\sqrt{y}}; \quad \frac{t}{r_0} = \frac{n(1+x)}{\sqrt{1+n^2 y}}$$

wobei wieder $n = \frac{v}{r}$ ist. Setzt man nun $\operatorname{tg} \alpha = n\sqrt{y}$, so wird

$$\frac{t}{r_0} = \frac{1+x}{\sqrt{y}} \cdot \sin \alpha = \frac{k}{r_0} \cdot \sin \alpha$$

Wir wollen jetzt unsere früheren Zahlenbeispiele zum Zweck der Constantenbestimmung durchgehen.

I) Um die secundären Einknickungen, die wohl zufälliger Natur sind, abzuschwächen, sind die Beobachtungsfehler in folgender Weise zusammengefasst:

Fehlergrenzen	$E-G$
0.0 - 0.8	- 1.5
0.8 - 1.6	- 10.3
1.6 - 2.4	- 1.6
2.4 - 3.2	+ 3.7
3.2 - 4.0	+ 5.5

Vergl. Fig. I^a die ausgezogene Linie. Hieraus ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} +113.6x - 37.8y &= -1.5 \\ +30.2x - 153.8y &= -10.3 \\ -42.7x - 111.7y &= -1.6 \\ -54.4x + 54.2y &= +3.7 \\ -31.8x + 124.7y &= +5.5 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} x &= -0.0146 \pm 0.0133 \\ y &= +0.0453 \pm 0.0079 \end{aligned}$$

Mit diesen Zahlen ergibt sich $\alpha = 0.0018$, also so klein, dass seine Vernachlässigung erlaubt ist.

Hiernach kommt also y , welches ein Quadrat ist, richtig mit dem positiven Vorzeichen und ausserdem mit einem w. F. heraus, der weniger grösser als $1/6 y$ ist. Wir dürfen also die Realität von y für gesichert ansehen. Die Quadratsumme der $E-G$ beträgt 155, die der übrigbleibenden Fehler nur 20.

Die gefundenen Zahlen geben, in die strenge Formel für W eingesetzt, folgende Unterschiede von der Gauss'schen Theorie:

$$\begin{array}{r|l} -3.2 & +1.0 \\ -6.9 & +3.7 \\ -4.6 & \end{array}$$

Diese Werthe sind in Fig. I^a als Ordinaten aufgetragen, und die Endpunkte derselben durch punktirte Linien verbunden.

II) Für das zweite Beispiel war auf eine von der oben beschriebenen abweichende Art gefunden worden

$$\begin{aligned} x &= +0.06 \\ y &= +0.04 \end{aligned}$$

wozu nach einer gleichfalls hier nicht erörterten Methode, deren Schärfe mir in Hinblick auf das Zahlenmaterial übertrieben erscheint, sich noch die Correctionen

$$\begin{aligned} \delta x &= -0.0093 \pm 0.0086 \\ \delta y &= +0.00014 \pm 0.0060 \end{aligned}$$

ergaben. Da diese Correctionen jedoch im Verhältniss zu ihren w. F. zu klein sind, wurden sie nicht weiter in Betracht gezogen. Die oben mitgetheilten Werthe von x und y wurden in die strenge Formel für $W(v)$ eingesetzt, wodurch sich folgende Abweichungen von der Gauss'schen Theorie ergeben:

$$\begin{array}{r|l} +5.0 & +1.5 \\ -1.9 & +1.6 \\ -6.0 & +1.2 \\ -3.6 & +0.8 \\ -0.1 & \end{array}$$

Die Quadratsumme der Abweichungen zwischen Erfahrung und Theorie wird so von 89 auf 16 herabgemindert.

Wie im vorigen Beispiel sind auch hier die mitgetheilten Abweichungen als Ordinaten in Fig. II eingetragen, wodurch die Curve entstanden ist, über deren schönen Anschluss an die gebrochene Linie weiter keine Bemerkung nöthig ist.

III) Das dritte Beispiel ergibt

$$\begin{aligned} x &= -0.0126 \pm 0.0102 \\ y &= +0.0111 \pm 0.0062 \end{aligned}$$

Die Quadratsumme der Abweichungen zwischen Erfahrung und Theorie ist nur von 89 auf 39 herabgemindert.

Die Abweichungen von der Gauss'schen Theorie ergaben sich nach der strengen Formel für $W(v)$ folgendermaassen:

—1.3	—0.5
—1.4	+0.2
—1.6	+0.9
—1.5	+1.2
—1.2	+1.2

Vergl. die Curve in Fig. III.

Wie man sieht, ist das vorstehende Beispiel nicht geeignet, die gegebene Theorie zu illustriren, obgleich auch hier die Verbesserung des Anschlusses unverkennbar ist. Man hat es wohl diesem Umstande zuzuschreiben, dass dasselbe so vielfach in Lehrbüchern aufgeführt wird, um den Anschluss der Erfahrung an das Gauss'sche Fehlergesetz darzuthun, wozu allerdings die beiden vorhergehenden Beispiele weniger passend wären. Uebrigens sei hier nochmals daran erinnert, dass der Ausdruck von $W(v)$ keineswegs die Grundlage einer allgemeinen Fehlertheorie sein soll.

IV) Das vierte Beispiel endlich ergibt:

$$x = +0.3103 \pm 0.0660$$

$$y = +0.1348 \pm 0.0391$$

Die Einsetzung in die Formel für $W(v)$ ergab folgende Unterschiede von der Gauss'schen Theorie:

+1.1	—0.5
+0.4	—0.3
—0.3	—0.1
—0.6	0.0

Mit Hülfe dieser Zahlen ist die Curve in Fig. IV construirt, die einen ziemlich guten Anschluss giebt. Fassen wir die Zahlen in ähnlicher Weise zusammen, wie es im ersten Beispiel geschehen war, so erhalten wir:

Fehlergrenzen in Einheiten des w. F.	$E-G$
0.0 - 1.0	+1.5
1.0 - 2.0	—0.8
2.0 - 3.0	—1.0
3.0 - 4.0	+0.4

Berlin 1887 Juni.

während die Abweichungen unserer Theorie von der Gauss'schen folgende werden:

+1.5	—0.8
—0.9	—0.1

Die Quadratsumme der Abweichungen wird hier von 4.0 auf 0.3 reducirt. Vergl. IV^a.

Die gegebenen Entwicklungen zeigen, dass, wenn auch durchaus nicht in allen, so doch in gewissen Fällen unser Ausdruck für die Fehlerwahrscheinlichkeit der wahren Vertheilung ziemlich gut entspricht. Man sieht, dass in diesen Fällen das zu häufige Auftreten grosser Fehler meist ein nur scheinbares ist, so dass an eine Verwerfung von Beobachtungen hier nicht zu denken ist. Was das letzte Beispiel betrifft, so ist allerdings das Ueberwiegen grösserer Fehler nicht beseitigt, allein eine bessere Uebereinstimmung von einer Reihe von nur 15 Beobachtungen zu erwarten, ist völlig unberechtigt. Durch eine Aenderung der Constanten x und y könnte man leicht diesen störenden Umstand beseitigen, wenn man dafür etwas von der Genauigkeit des Gesamtanschlusses aufgibt. Dass das Gesetz, nach welchem wir h variiren liessen, ein hypothetisches ist, darf freilich nicht vergessen werden, und aus diesem Grunde wird man selten eine derartige Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung finden, wie in unserem zweiten Beispiel.

Gesetzt aber auch, dass sich derartige Gesetzmässigkeiten, wie wir sie untersucht haben, nicht entdecken lassen, so wird doch die Verwerfung von Beobachtungen immer eine sehr bedenkliche Sache bleiben, da ja eine regellos eingetretene Störung den Beobachtungsfehler ebenso gut verkleinern wie vergrössern kann. Es wird aber offenbar Niemand einfallen, Beobachtungen mit kleinen Beobachtungsfehlern zu verwerfen, die, ohne dass man es weiss, demselben Genauigkeitsgrade angehören können, wie sehr fehlerhafte. Etwas Anderes wäre es allerdings, wenn in einer sonst gut übereinstimmenden Beobachtungsreihe einige Beobachtungen vorkämen, deren Fehler von einer ganz anderen Ordnung sind als die übrigen.

Beobachtungen des Cometen 1881 III

in der unteren Culmination am Repsold'schen Meridiankreise der Universitäts-Sternwarte zu Kasan.

1881	M. Z. Kasan	α app.	δ app.	$\log p.A$	1881	M. Z. Kasan	α app.	δ app.	$\log p.A$
Juni 24	11 ^h 25 ^m 40 ^s	5 ^h 38 ^m 6 ^s 94	+48° 49' 25".5	0.932	Juli 9	12 ^h 51 ^m 18 ^s	8 ^h 3 ^m 7 ^s 20	+80° 1' 45".2	0.790
25	11 25 52	5 42 15.21	+52 49 34.0	0.923	10	13 5 14	8 21 2.50	+80 37 52.8	0.786
29	11 32 12	6 4 22.50	+65 27 19.1	0.879	11	13 19 57	8 39 44.55	+81 7 24.5	0.782
Juli 1	11 39 39	6 19 43.84	+69 58 38.2	0.856	12	13 35 9	8 58 55.49	+81 30 57.8	0.779
5	12 6 14	7 2 9.40	+76 19 55.6	0.817	13	13 50 34	9 18 18.99	+81 48 57.9	0.776
8	12 38 19	7 46 9.68	+79 18 24.0	0.796	14	14 5 50	9 37 34.52	+82 2 3.2	0.774

Juli 8 und 14 Comet in Wolken; Juli 9 Bild unruhig; Juli 12 δ app. ist vergrössert um 2'. Die Oerter der Vergleichsterne sind dem Fundamental-Catalog der AG. von Auwers entnommen. Den $\log p.A$ habe ich mit der Parallaxe = 8".85 berechnet.

Kasan 1887 Mai 11.

Dr. P. Poretzki, Observator der Sternwarte.