Dimostrazione d'un teorema sopra i massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti.

[Di CESARE RUSSYAN, a *Kharkoff* (*Russia*).]

Nella presente Nota vien data una dimostrazione del teorema seguente della teoria dei massimi e minimi delle funzioni di più variabili indipendenti: « Se per un sistema di valori $x = a, y = b, \dots, z = c$ delle variabili indipendenti $x, y, \dots, z$ si annullano tutte le derivate della funzione data $f(x, y, \dots, z)$ « fino a quelle dell'ordine $2n - 1$ inclusive; se la forma

$$\ll A_{2n} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)$$

« è definita e se, infine, tutte le derivate parziali $1.^{\circ}, 2.^{\circ}, \dots, 2n.^{\circ}$ sono finite « e continue in un intorno qualunque del punto considerato $x = a, y = b, \dots, z = c$, allora la funzione data $f(x, y, \dots, z)$ ha nello stesso punto un massimo o un minimo. »

La dimostrazione di questo teorema, data dal sig. U. DINI (*), è basata sulla proprietà del polinomio

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k}{h} \frac{\partial}{\partial y} + \dots + \frac{l}{h} \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)$$

di avere il limite inferiore del suo valore assoluto diverso da zero in tutto il campo infinito di valori delle variabili indipendenti $\frac{k}{h}, \dots, \frac{l}{h}$, perciò è possibile di dimostrare l'esistenza dell'intorno del punto $x = a, y = b, \dots,$

(*) *Lezioni di analisi infinitesimale* autografate a Pisa nel 1877 e pubblicate a Pisa nel 1907.

$z = c$ abbastanza piccolo, nei punti del quale il resto

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l)$$

sia diverso da zero per tutti i sistemi di valori di $h, k, \dots, l$, che non siano tutti nulli, ed abbia sempre il segno di A_{2n} .

L'altra dimostrazione, data dal GENOCCHI, è basata sul teorema che il rapporto di due forme qualunque del medesimo grado pari, essendo il denominatore una forma definita, ha ambedue i limiti finiti, sotto la supposizione che le variabili delle forme non siano tutte nulle. Questo teorema è dimostrato per mezzo del cangiamento delle variabili indipendenti delle forme:

$$x = x, \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}, \dots, z = z, \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}.$$

Ma cionondimeno io credo sia utile di dare ancora una dimostrazione dello stesso teorema, perchè questa è, a mio credere, molto semplice.

Si ha così a dimostrare, che se tutte le condizioni del teorema suindicato sono soddisfatte, esiste sempre un numero positivo δ , sufficientemente piccolo, tale che per

$$x - a < \delta, \dots, z - c < \delta$$

la differenza

$$f(x, y, \dots, z) - f(a, b, \dots, c)$$

non muta mai il segno.

A causa delle ipotesi fatte sulle derivate $1.^{\circ}, 2.^{\circ}, 3.^{\circ}, \dots, (2n)^{\circ}$ della funzione data nell'intorno dato del punto $x = a, y = b, \dots, z = c$ esiste per gli stessi valori di variabili $x, y, \dots, z$ la formola di TAYLOR:

$$\begin{aligned} & f(x, y, \dots, z) - f(a, b, \dots, c) = \\ &= \frac{1}{2n!} \left[(x - a) \frac{\partial}{\partial x} + \dots + (z - c) \frac{\partial}{\partial z} \right]^{2n} f[a + \theta(x - a), \dots, c + \theta(z - c)], \end{aligned}$$

o, indicando per brevità le differenze $x - a, \dots, z - c$ con $h, \dots, l$, la formola

$$\begin{aligned} & f(a + h, b + k, \dots, c + l) - f(a, b, \dots, c) = \\ &= \frac{1}{2n!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right]^{2n} f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l). \end{aligned}$$

Esaminiamo il segno del resto

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l)$$

per i valori considerati di $h, k, \dots, l$, che non sono tutti nulli.

Noi abbiamo evidentemente

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} A_{2n} \left(1 + \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} \right).$$

Consideriamo il rapporto

$$\frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}},$$

che è uguale a

$$\frac{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} [f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l) - f(a, b, \dots, c)]}{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)},$$

e cerchiamo il suo valore assoluto.

Cangiamo perciò le variabili $h, k, \dots, l$ nel modo seguente. Sia p un numero positivo qualunque, dato a piacere; sia poi L il più grande fra i valori assoluti delle variabili $h, k, \dots, l$, e sia, p. es., $L = |l|$. Poniamo

$$h = \frac{L}{p} h_1, \quad k = \frac{L}{p} k_1, \dots, \quad l = \frac{L}{p} l_1.$$

Ne risulta, che

$$|h_1| \leq p, \quad |k_1| \leq p, \dots, \quad \text{con} \quad |l_1| = p,$$

e così uno almeno fra i valori assoluti delle nuove variabili è uguale a p ; gli altri non superano p . Perciò tutto il campo dei valori delle variabili $h_1, k_1, \dots, l_1$ può ottenersi nel modo seguente: ogni variabile $h_1, k_1, \dots, l_1$ considerata separatamente e successivamente riceve i valori $\pm p$, mentre le altre ricevono allora ciascuna un continuo di valori nell'intervallo $(-p, p)$.

Dopo questo cangiamento si avrà:

$$\begin{aligned} & \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} = \\ & = \frac{\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} [f(a + \theta h, b + \theta k, \dots, c + \theta l) - f(a, b, \dots, c)]}{\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + k_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + l_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^{2n} f(a, b, \dots, c)}. \end{aligned}$$

Indichiamo la forma definita nel denominatore con A'_{2n} . Si può dimostrare che esiste un numero positivo P_{2n} tale, che

$$|A'_{2n}| > P_{2n}$$

per tutti i valori considerati delle variabili $h, k, \dots, l$.

Infatti, se la forma A'_{2n} potesse prendere nel campo considerato valori numericamente piccoli a piacere, in virtù della sua continuità essa dovrebbe annullarsi, il che è impossibile, poichè la forma A'_{2n} è definita ed una almeno delle variabili $h, k, \dots, l$ ha il valore $\pm p$ diverso da zero.

Sia allora η il più grande dei valori assoluti dei moltiplicatori dei coefficienti di $h, k, \dots, l$ nel numeratore, che hanno tutti la forma

$$\left(\frac{\partial^{2n} f(x, y, \dots, z)}{\partial x^m \partial y^r \dots \partial z^l} \right)_{\substack{x=a+\theta h \\ y=b+\theta k \\ z=c+\theta l}} - \left(\frac{\partial^{2n} f(x, y, \dots, z)}{\partial x^m \partial y^r \dots \partial z^l} \right)_{\substack{x=a \\ y=b \\ z=c}}.$$

Allora si avrà evidentemente

$$\left| \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} \right| < \frac{\rho^{2n} p^{2n}}{P_{2n}} \eta^2 (*)$$

dove ρ è il numero delle variabili $x, y, \dots, z$; p, P_{2n} sono costanti, ma η è variabile con $h, k, \dots, l$. Ora le derivate dell'ordine $2n$ sono continue e finite nel punto $x=a, y=b, \dots, z=c$; esiste perciò un numero positivo δ , abbastanza piccolo, tale che per

$$|h| < \delta, \quad |k| < \delta, \dots, \quad |l| < \delta$$

si ha

$$\eta < \frac{P_{2n}}{\rho^{2n} p^{2n}}.$$

Allora per gli stessi valori di $h, k, \dots, l$, ma che non siano tutti nulli,

(*) Si potrebbe dimostrare in modo simile che nel caso di due forme qualunque A_{2n}, B_{2n} del medesimo grado pari, dove A_{2n} è la forma definita, si ha sempre

$$\left| \frac{B_{2n}}{A_{2n}} \right| < \binom{2n + \rho - 1}{\rho - 1} \frac{p^{2n}}{P_{2n}} \eta,$$

dove η è il più grande dei valori assoluti dei coefficienti costanti della forma B_{2n} .

avremo che

$$\left| \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} \right| < 1$$

ed il resto

$$R_{2n} = \frac{1}{2n!} A_{2n} \left(1 + \frac{2n! R_{2n} - A_{2n}}{A_{2n}} \right)$$

sarà diverso da zero ed avrà il segno costante, identico con quello della forma definita A_{2n} .

Noi abbiamo dunque dimostrato che esiste un numero positivo δ tale, che per tutti i valori di $x, y, \dots, z$ nell'intorno dato, pei quali

$$|x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta, \dots, \quad |z - c| < \delta,$$

la differenza

$$f(x, y, \dots, z) - f(a, b, \dots, c)$$

sarà diversa da zero quando una almeno della differenza $x - a, y - b, \dots, z - c$ non è zero, ed avrà il segno costante, identico con quello della forma definita A_{2n} , cioè che la funzione data $f(x, y, \dots, z)$ ha per $x = a, y = b, \dots, z = c$ un massimo o un minimo.