UN TRASFORMATORE DINAMICO PER CORRENTI ALTERNATE.

Nota di A. G. ROSSI.

(Continuazione e fine).

§ 9 bis. — Autotrasformatore in derivazione e in serie.

A complemento del § 9, aggiungasi quanto segue.

Lo schema dell'inserzione descritto in fig. 15, pag. [43] può dirsi dell'*autotrasformatore in derivazione*, per distinguerlo da un altro, effettuabile secondo la fig. 15 bis., che diremo dell'*autotrasformatore in serie*. Nel primo, uno degli avvolgimenti è in derivazione *sulla linea* e l'altro è in serie. Nel secondo, entrambi gli avvolgimenti sono in serie, l'uno sul filo di andata e l'altro sul filo di ritorno della linea.

Nei due casi, occorre *all'atto pratico* tener conto dei sensi relativi delle correnti nei due avvolgimenti.

Le equazioni (1) e conseguenti del § 9 rappresentano le cose genericamente, senza riguardo alle due possibilità d'inserzione, corrispondenti ai due versi della corrente in una delle spirali rispetto all'altra: s'intende che il termine dell'induzione dinamica cambia di segno se si capovolge l'una delle spirali. Dette equazioni vanno lette:

$$V = J_1 Z_1 \mp j K Y' J_e = J_e Z_e \mp j K Y' J_1.$$

Il *segno inferiore* corrisponde alle connessioni indicate dalla fig. 15 e fornisce i risultati voluti, cioè la tensione secondaria E_2 , l'ammettenza complessiva Y^* , i rapporti di trasformazione, etc. *funzioni crescenti della velocità K*.

Nella espressione simbolica della ammettenza complessiva

$$Y^* = \frac{Z_e + 2(Z_1 - j K Y')}{Z_1(Z_1 + Z_e) + K^2 Y'^2} = \frac{Y_1' + Y' - 2 j K Y' Y_1' Y_1'}{1 + K^2 Y'^2 Y_1' Y_1'}$$

il modulo del numeratore è funzione di K sempre crescente e il modulo del denominatore discende dall'origine verso un

minimo, come quello della impedenza primaria, ciò che conduce y^* a variare secondo curve analoghe a quelle della fig. 16.

Questa osservazione ovvia, riguardante il *segno* del fattore d'induzione $K Y'$ per il caso dello schema in fig. 15, nulla cambia però alla discussione generica fatta sull'autotrasformatore in derivazione e ne lascia intatte le conclusioni.

Fig. 15 (bis).

Interesse offre anche l'autotrasformatore in serie (fig. 15 bis), inserzione analoga a quella proposta dal Kelly per una generatrice asincrona (i tre avvolgimenti dello statore trifase separatamente *inseriti* sulla linea fra il generatore sincrono e gli apparecchi utilizzatori), la quale, trascinata oltre sincronismo da una motrice, genera sulla linea una componente attiva della f. e. m. assorbendone però una componente reattiva. Nel nostro caso, il funzionamento è molto più semplice; a rotore in moto, con qualunque velocità, i due avvolgimenti sono sedi di forze elettromotrici dinamiche della forma $K Y'$, le componenti delle quali si aggiungono o si sottraggono, a seconda delle connessioni, alle componenti delle cadute di tensione sull'impedenza di linea, percorsa dalla corrente I .

L'equazione del circuito è semplicemente

$$V = J [Z_0 + 2 (Z_1' \mp j K Y')] = J Z_*$$

Col segno *inferiore*, che corrisponde alle connessioni indicate in fig. 15 bis, il modulo della *impedenza complessiva*

$$Z_* = r_e + 2(r'_1 - K b') - j[\lambda_e + 2(\lambda'_1 - K g')],$$

è all'origine una funzione decrescente della velocità K :

$$z^* = \sqrt{z_{ie}^2 - 4 y'^2 K [\lambda' r_{ie} + r' \lambda_{ie} - K]},$$

la quale, partendo da $z_{ie} = \sqrt{(r_e + 2 r'_1)^2 + (\lambda_e + 2 \lambda'_1)^2}$, col gradiente $-2 y_{ie}(b' r_{ie} + g' \lambda_{ie})$, discende ad un minimo $z_{*,\min} = y'(\lambda' \lambda_{ie} - r' r_{ie})$, con la velocità $K' = (r' \lambda_{ie} + \lambda' r_{ie}) / 2$, per poi risalire indefinitamente, ripassando per il valore iniziale z_{ie} con la velocità $2 K'$. Il minimo è tanto più basso, per qualsiasi $r_e = j \lambda_e$, quanto più prossimamente l'apparecchio soddisfa alla condizione limite (21*). Etc.

Però, alla semplicità di questa disposizione, con la quale il T. D. lavorerebbe a guisa di survoltrice asincrona nel modo e nel senso più generale, corrisponde una mediocre utilizzazione delle proprietà dell'apparecchio; non solo perchè gli avvolgimenti di statore vengono eccitati da una piccola parte della totale tensione di linea, ma soprattutto perchè le componenti dinamiche sottrattive $K b'$ e $K g'$, che dipendono solo dal rotore, non possono, a velocità limitate, raggiungere notevoli valori. Invece, quando l'apparecchio funziona veramente in condizioni di trasformatore, la impedenza dinamica dell'avvolgimento è: $Z'_1 + K^2 Y'^2 (Y'_1 + Y_e)$, e le componenti dinamiche dell'impedenza, oltre che dal quadrato della velocità, dipendono anche dal circuito di statore.

§ 11. — Induzione mutua costante nei circuiti degli statori.

a) Nella trattazione del T. D. si è supposto che fra statore primario e statore secondario *non* esistesse induzione mutua diretta, nè in assenza nè in presenza del D rotore in quiete. Questo è invero un caso puramente teorico, poichè è generalmente impossibile costruire i due avvolgimenti, o su due statori distinti o sopra un unico statore, nelle condizioni di identità supposte dalla teoria e fra loro rigorosamente

spostati di un quarto di passo. All'atto pratico, si ritrova sempre una mutua induzione diretta attraverso il D rotore. Tale difetto costruttivo tende a sparire, per via di compensazioni, con l'aumentare del numero delle coppie di poli. Osservazioni sperimentali offerte dal funzionamento di un tipo della macchina costrutta dall'a., il quale comprende due statori equimultipolari separati, spostabili angularmente l'uno rispetto all'altro e affacciati sulle due fronti del D. rotore, suggerirono lo studio analitico del caso più generale che i due statori stessi presentino attraverso il D. in quiete una mutua induzione diversa da zero, supponendo che essa provenga da ciò che i due sistemi di spirali fisse sieno spostati fra loro di un intervallo angolare differente da un quarto di passo. Tale trattazione ¹⁾ fu fatta adottando, per definire la *sregolazione* dell'apparecchio, un coefficiente numerico x , variabile fra $+1$ e -1 , come potrebbe essere il $\cos$ di un angolo misurato su una circonferenza di lunghezza uguale al *passo* dell'avvolgimento; questa ipotesi semplicista si trovò sufficientemente giustificata dalla concordanza fra le deduzioni e le osservazioni sperimentali. Riassumiamo qui brevemente i risultati di questo studio.

Il fattore d'induzione complesso fra i due statori acquista la forma: $\mu (\gamma + j \beta) =$

$$\mu [k u (1 - x) g' - \mu x (b + b') + j (k u (1 - x) b' + \mu x (g + g'))].$$

La corrente secondaria è diversa da zero per $u = 0$, cambia di segno e svanisce insieme ad x . Per $u \gtrless 0$, a seconda dei segni relativi di $k u (1 - x)$ e di μx , l'una delle componenti del fattore d'induzione può essere inizialmente crescente e l'altra decrescente, col crescere della velocità in valore assoluto: il funzionamento viene dunque a dipendere ora anche dal verso della velocità impressa al rotore.

¹⁾ *Atti della R. Accademia delle Scienze, di Torino.*, Vol. 51; 19 Marzo 1916.

Per ciò che riguarda le componenti della impedenza apparente, in un campo di variazioni di x lontano dal suo valor massimo 1, per ogni dato valore della anomalia x esistono valori di u che annullano la resistenza apparente o la reattanza apparente, riproducendo le vicissitudini del caso normale; e per ciascuna velocità u , esistono valori dell'anomalia x che portano agli stessi eventi.

La tensione secondaria a vuoto (E_2) con V_1 costante acquista, in funzione della velocità, un andamento parabolico, partendo da un valore iniziale > 0 , con gradiente ≥ 0 a seconda del verso della velocità u , ma sempre inferiore in valore assoluto al gradiente $\text{tg } \alpha$ della retta che si ha nel caso normale. Corrispondentemente, la corrente secondaria inizialmente è crescente oppure decrescente. Nel secondo caso, I_2 raggiunge un minimo, dopo di che torna a crescere avviandosi al suo massimo, il quale non è che ritardato; nel primo caso invece, il suo massimo è avanzato, cioè si raggiunge con una velocità minore.

In conclusione, finchè i termini dipendenti da x non superino l'importanza di termini di correzione, i caratteri generali del funzionamento dell'apparecchio rimangono praticamente inalterati. Per valori sensibili o finiti della sregolazione x , la sua influenza si fa sentire nel campo delle velocità più basse, per avanzare oppure per ritardare l'aumento iniziale delle correnti, a seconda del verso della velocità. Quanto maggiore sia la sregolazione x e tanto più alta diviene la velocità alla quale scompare la sua influenza sul valore delle correnti, specialmente della secondaria.

b) Presenta interesse generale il caso che esista *esternamente* nel circuito dei due statori, *nelle condizioni normali*, una mutua induzione costante fra i due circuiti primario e secondario del T. D., procurata da un ordinario trasformatore statico (T. S.).

I due circuiti del T. D. sono, in normali condizioni, fra loro isolati elettromagneticamente, finchè il rotore è in quiete. Per le applicazioni dell'apparecchio, può occorrere di associarlo ad un T. S., affinchè passi energia elettrica dalla linea primaria a quella secondaria anche a rotore fermo, e la rotazione di quest'ultimo intervenga per iniettare nuova energia nella linea secondaria. Disposizioni per questo scopo furono già studiate con l'inserzione del T. D. come *autotrasformatore*.

Un T. D. e un T. S. possono ora venire associati o *in serie*, fig. 18, oppure *in derivazione* (parallelo), fig. 19. Nel primo caso, sulla linea secondaria si sommano le tensioni, nel secondo caso si sommano le correnti generate dai due apparecchi.

Fig. 18.

Fig. 19.

Per conservare simmetria (e semplicità di trattazione), supporremo che il T. S. consista in due eguali avvolgimenti, di resistenza r_0 e reattanza λ_0 , fra i quali regni il « fattore d'induzione » μ_0 costante.

Se il primario e il secondario (r_0 , λ_0 , μ_0) sieno rispettivamente *in serie* nei due circuiti corrispondenti del T. D., le equazioni del sistema sono:

$$\begin{aligned} V_1 &= J_1 (Z_0 + Z_1') - j J_2 (\mu_0 + K Y') \\ 0 &= J_2' (Z_0 + Z_2') - j J_1 (\mu_0 + K Y'), \end{aligned}$$

ove $Z_2' = Z_1' + Z_0$. Il rapporto di trasformazione delle correnti è

$$\frac{J_2}{J_1} = j \frac{\mu_0 + K Y'}{Z_0 + Z_2'} \quad , \quad \angle -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\lambda_0 + \lambda_2'}{r_0 + r_2'} + \arctg \frac{K b'}{\mu_0 + K g'}.$$

e il rapporto di trasformazione delle tensioni, con $J_2 = 0$,

$$\frac{E_2}{V_1} = j \frac{\mu_0 + K Y'}{Z_0 + Z_1'} \quad ; \quad \frac{E_2}{V_1} = \sqrt{\frac{\mu_0^2 + K^2 g'^2 + 2 \mu_0 K g' \cos \alpha'}{z_0^2 + z_1'^2 + 2 z_0 z_1' \cos (\alpha_0 - \alpha_1')}},$$

funzione che può essere continuamente crescente, il fattore $\mu_0 K$ essendo ≥ 0 a seconda del senso della inserzione o della velocità del rotore. L'impedenza ($Z_0 + Z_1'$) può venir diminuita, se si *deriv*i un condensatore opportuno su z_0 .

Abbreviando con:

$$z_{02}^2 = (r_0 + r_2')^2 + (\lambda_0 + \lambda_2')^2 \quad ; \quad g_{02}' = (r_0 + r_2') / z_{02}^2$$

$$b_{02} = (\lambda_0 + \lambda_2') / z_{02}^2, \text{ e similmente con } z_{01}^2 = r_{01}^2 + \lambda_{01}^2, \text{ etc.,}$$

le componenti della impedenza opposta alla tensione primaria,

$$Z = R - j \Lambda = V_1 / J_1,$$

possono scriversi:

$$\begin{aligned} R &= r_0 + r_1' + g_{02} [(\mu_0 + K g')^2 - K^2 b'^2] - b_{02} [2 K b' (\mu_0 + K g')] \\ &= r_{01} + \mu_0^2 g_{02} + K^2 [g_{02} (g'^2 - b'^2) - b_{02} 2 b' g'] + 2 \mu_0 K (g' g_{02} - b' b_{02}); \\ \Lambda &= \lambda_0 + \lambda_1' - b_{02} [(\mu_0 + K g')^2 - K^2 b'^2] - g_{02} [2 K b' (\mu_0 + K g')] \\ &= \lambda_{01} - \mu_0^2 b_{02} - K^2 [b_{02} (g'^2 - b'^2) + g_{02} 2 b' g'] - 2 \mu_0 K (g' b_{02} + b' g_{02}). \end{aligned}$$

Sono funzioni paraboliche di K , crescenti o decrescenti a seconda dei segni dei coefficienti di K^2 e K , dipendenti dal circuito secondario; $\mu_0 K$ ha un segno variabile ad arbitrio; da quest'ultimo termine dipende il gradiente iniziale; etc. Un maggior numero di elementi influisce dunque sul-

l'andamento dell' *impedenza funzione della velocità*, in confronto al caso del T. D. semplice; ma sempre essa è caratterizzata dall'esistenza di un minimo, a cui consegue un massimo della corrente secondaria, il quale, per effetto del T. S., si può raggiungere con velocità minori e con un gradiente medio aumentato. Questa disposizione offre vantaggi per l'impiego del relais telefonico.

c) Merita un più esteso esame il caso che i due primari e i due secondari sieno rispettivamente congiunti *in parallelo* (fig. 19).

L'importanza di questo caso si può prevedere, se si ammette che la funzione principale del trasformatore dinamico nel circuito primario sia quella di avanzare la fase della corrente sulla tensione applicata, creando, col crescere della velocità, prima una componente reattiva poi una componente attiva, disponibili per il circuito primario esterno. Tali componenti possono ora venire assorbite dal primario del trasformatore statico che gli è accoppiato.

Fig. 19 (bis).

Se, in particolare, il primario del T. D. fornisce, ad una certa velocità, al primario del T. S. tutta la corrente oziosa di cui esso abbisogna, si avrebbe una specie di effetto di risonanza nel « circuito » dei due primari, quale si potrebbe ottenere con un condensatore di capacità opportuna in pa-

rallelo sul primario ($r_o, \lambda_o; \mu_o$). La trattazione seguente è diretta a formulare questa previsione.

§ 12. — **Un T. D. in parallelo con un T. S.**

Sieno dunque: $\mathbf{J}_{o1}$ e $\mathbf{J}_{o2}$ le correnti negli avvolgimenti del T. S., d'impedenza originaria $\mathbf{Z}_o = r_o - j\lambda_o$; $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$ le correnti negli avvolgimenti del T. D., d'impedenza originaria $\mathbf{Z}_1' = r_1' - j\lambda_1'$; $\mathbf{J}_p$ la corrente totale primaria, che porta la tensione $\mathbf{V}$ alla coppia degli avvolgimenti primari derivati; $\mathbf{J}_e$ la corrente nel circuito secondario esterno, o di linea, d'impedenza $\mathbf{Z}_e = r_e - j\lambda_e$; $\mathbf{V}_e$ la tensione ai nodi secondari (fig. 19 bis).

L'impedenza apparente di ciascun avvolgimento del T. S., in quanto costituisce un ramo derivato fra due nodi a tensione costante, è:

$$\mathbf{Z}_o' = r_o' - j\lambda_o' = r_o(1 + \mu_o^2 y_o^2) - j\lambda_o(1 - \mu_o^2 y_o^2) = 1 / \mathbf{Y}_o',$$

e quindi l'ammettenza apparente:

$$(35) \quad \mathbf{Y}_o' = \frac{\mathbf{Y}_o}{1 + \mu_o^2 \mathbf{Y}_o^2} = g_o' + j b_o'.$$

L'impedenza originaria $\mathbf{Z}_o$ può venir diminuita se si inserisca un condensatore opportuno nel ramo del T. S.

L'impedenza apparente di ciascun avvolgimento del T. D., a rotore in moto, è, secondo le (13), § 3,

$$\mathbf{Z}_{1k} = r_{1k} - j\lambda_{1k} = 1 / \mathbf{Y}_{1k},$$

ove:

$$\frac{\lambda_{1k}}{r_{1k}} = \frac{\lambda_1' - K^2[b_1'(g'^2 - b'^2) + g_1'2b'g']}{r_1' + K^2[g_1'(g'^2 - b'^2) - b_1'2b'g']} = \frac{\sin \alpha_1' - P^2 \sin(2\alpha' + \alpha_1')}{\cos \alpha_1' + P^2 \cos(2\alpha' + \alpha_1')};$$

quindi, l'ammettenza apparente (dinamica)

$$(36) \quad \mathbf{Y}_{1k} = \frac{\mathbf{Y}_1'}{1 + K^2 \mathbf{Y}'^2 \mathbf{Y}_1'^2}.$$

Le espressioni simboliche $\mu_o \mathbf{Y}_o$ e $K \mathbf{Y}' \mathbf{Y}_1'$ dei rapporti di trasformazione nei due singoli apparecchi,

$$\mu_o \mathbf{Y}_o = \rho_o (\cos \alpha_o + j \sin \alpha_o) \quad , \quad K \mathbf{Y}' \mathbf{Y}_1' = P (\cos a + j \sin a),$$

hanno i moduli: $\rho_0 = \mu_0 y_0 < 1$, $P = K y' y'$;

e gli argomenti :

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{b_0}{g_0} , \quad (\alpha'_1 + \alpha') = a = \operatorname{arctg} \frac{(b'_1 g' + g'_1 b')}{(g' g_1 - b' b'_1)} ,$$

i quali, aumentati di $\pi/2$, rappresentano i ritardi delle f. e. m. indotte secondarie sulla V primaria.

Si avranno le *equazioni del sistema*, scrivendo le espressioni simboliche delle cadute di tensione nelle impedenze dei quattro avvolgimenti, in funzione delle due tensioni terminali e dei rapporti di trasformazione singoli:

Nei primari :

$$(37) \quad J_{01} Z'_0 = V - j \mu_0 Y_0 \cdot V_e ; \quad J_1 Z_{1k} = V - j K Y' Y'_1 \cdot V_e ;$$

nei secondari :

$$(38) \quad J_{02} Z'_0 = j \mu_0 Y_0 \cdot V - V_e ; \quad J_2 Z_{2k} = j K Y' Y'_2 \cdot V - V_e .$$

Da ne ricavano: le quattro correnti interne; le correnti esterne di linea

$$J_p = J_{01} + J_1 , \quad J_e = J_{02} + J_2 ,$$

e la tensione secondaria :

$$(39) \quad V_e = J_e Z_e = V \frac{j \mu_0 Y_0 \cdot Y'_0 + j K Y' Y'_1 \cdot Y_{1k}}{Y_e + Y'_0 + Y_{1k}} .$$

Il *rapporto di trasformazione delle tensioni a vuoto risultante* $(V_e / V)_0$ è il modulo della (39), postavi uguale a zero l'ammettenza esterna $Y_e = g_e + j b_e$, che influisce d'altra parte sul solo denominatore.

Il calcolo di esso si eseguisce sostituendo la (36) e le abbreviazioni seguenti :

$$\begin{aligned} g_0 g'_0 - b_0 b'_0 &= G_0^2 & g'_1 g'_1 - b'_1 b'_1 &= G_1^2 & g'_0 g'_1 + b'_0 b'_1 &= \sigma^2 \\ g_0 b'_0 + g'_0 b_0 &= B_0^2 & g'_1 b'_1 + g'_1 b'_1 &= B_1^2 & g'_0 b'_1 - g'_1 b'_0 &= +\delta^2 \\ G_0^4 + B_0^4 &= y_0^2 y_0'^2 & G_1^4 + B_1^4 &= y'^2 y_1'^2 & \sigma^4 + \delta^4 &= y_0'^2 y_1'^2 \\ \operatorname{tg}(\alpha_0 + \alpha'_0) &= B_0^2 / G_0^2 & \operatorname{tg}(\alpha'_1 + \alpha') &= B_1^2 / G_1^2 & \operatorname{tg}(\alpha'_1 - \alpha'_0) &= \delta^2 / \sigma^2 . \end{aligned}$$

Si realizza così l'espressione :

$$(40) \quad \left(\frac{V_e}{V} \right) = \sqrt{\frac{P^4 \rho_0^2 y_0'^2 + 2\mu_0 K^3 \cdot \alpha + P^2 \cdot \bar{\rho} + 2\mu_0 K \cdot \bar{\gamma} + \rho_0^2 y_0'^2}{P^4 y_0'^2 + 2P^2 \cdot \eta + (g_0' + g_1')^2 + (b_0' + b_1')^2}},$$

ove si è posto :

$$\bar{\alpha} = y'^2 y_1'^4 (g' G_0^2 - b' B_0^2) = y'^2 y_1'^4 y_0 y_0' y' \cos s;$$

$$\bar{\gamma} = G_1^2 (g_1' G_0^2 + b_1' B_0^2) - B_0^2 (b_1' G_0^2 - g_1' B_0^2) = y_1'^2 y_0 y_0' y' \cos(2a - s);$$

$$\bar{\rho} = y_1'^2 + 2\rho_0^2 y_0'^2 \frac{G_1^4 - B_1^4}{G_1^4 + B_1^4} = y_1'^2 + 2\rho_0^2 y_0'^2 \cos 2a > 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta} = \frac{G_1^4 - B_1^4}{G_1^4 + B_1^4} (y_0'^2 + \sigma^2) + \frac{2B_1^2 G_1^2}{G_1^4 + B_1^4} \delta^2 = y_0'^2 \cos 2a + \\ + y_0' y_1' \cos(2a - d) < 0; \end{aligned}$$

abbreviando con :

$a = \alpha_1' + \alpha' =$ ritardo della corrente dinamicamente indotta sul rotore, rispetto alla tensione primaria applicata; a più prossimo a $3\pi/2$ che a π ; $2a$ congruente a π ;

$$s = \alpha_0 + \alpha_0' + \alpha' = (\alpha_0 + \pi/2 + \alpha_0') - (\pi/2 - \alpha');$$

$$2a - s = (2\alpha_1' + \alpha' + \pi/2) - (\alpha_0 + \pi/2 + \alpha_0');$$

$$d = \alpha_1' - \alpha_0' = \arctg \delta^2 / \sigma^2 = \arctg b_1' / g_1' - \arctg b_0' / g_0' > 0.$$

Il rapporto di trasformazione (40) pertinente al sistema dei due trasformatori in parallelo, per K (o P) crescente da zero, parte dal valore

$$(40)_0 \quad P_0' = \frac{\rho_0 y_0'}{\sqrt{y_0'^2 + y_1'^2 + 2\sigma^2}} < \rho_0,$$

con un gradiente avente il segno di $\mu_0 K \cdot \bar{\gamma}$. Supposto $\mu_0 K > 0$, — ciò che si può sempre ottenere, per un collegamento qualunque dei due apparecchi, scegliendo il verso della velocità, — il gradiente iniziale ha il segno del coefficiente $\bar{\gamma}$. Allora, per $\bar{\gamma} \geq 0$, la funzione (40) è inizialmente crescente, oppure comincia col diminuire fino ad un minimo per poi risalire verso un massimo, e in seguito decresce assintoticamente verso ρ_0 ; (fig. 20, curva punteggiata).

Per lo scopo che perseguiamo, interessa fissare le condizioni che rendono questo rapporto di trasformazione crescente fin dall'origine. Affinchè γ sia positivo, richiedesi che l'angolo $(2a - s)$ cada nel primo o nel quarto quadrante:

$$(40^*) \quad h\pi + \pi/2 > (2\alpha_1' + \alpha' + \pi/2) - (\alpha_0 + \alpha_0' + \pi/2) > 3\pi/2 + 2h\pi.$$

Ad interpretare questa condizione, giova trasformare la (40) sostituendovi i valori dei coefficienti in funzione degli angoli, il che permette di conglobare insieme i due termini di grado dispari al numeratore, nonchè i vari termini di grado pari, ottenendo dapprima: $P_e =$

$$\sqrt{\frac{\rho_0^2 y_0'^2 [\sin^2 2a + (P^2 + \cos 2a)^2] + P^2 y_1'^2 + 2\rho_0 y_0' P y_1' [P^2 \cos s + \cos(2a - s)]}{y_0'^2 [1 + P^2 + 2P^2 \cos 2a] + y_1'^2 + 2y_0' y_1' [\cos d + P^2 \cos(2a - d)]}}.$$

Dividendo allora sopra e sotto per il fattore d'impegnanza, (16*),

$$\sqrt{1 + P^2 + 2P^2 \cos 2a} = z_{1k} / z_1' = y_1' / y_{1k},$$

si giunge alla forma più generale di $(V_e / V)_0$:

$$(40') \quad P_e = \sqrt{\frac{\rho_0^2 y_0'^2 + P^2 y_{1k}^2 + 2\rho_0 y_0' P y_{1k} \cos \left(\arctg \frac{\sin 2a}{P^2 + \cos 2a} - s \right)}{y_0'^2 + y_{1k}^2 + 2y_0' y_{1k} \cos \left(d - \arctg \frac{P^2 \sin 2a}{1 + P^2 \cos 2a} \right)}}.$$

quoziente della somma vettoriale delle correnti indotte (per un Volt efficace applicato ai primari) alla somma vettoriale delle ammettenze dei singoli secondari, (cfr. pag. 35).

L'angolo, di cui il $\cos$ è al numeratore, è la differenza di fase con la quale le due correnti indotte, $V \rho_0 y_0'$ e $V P y_{1k}$, si presentano ai nodi secondari: $(\varphi_2 - \varphi_{02})$. L'angolo corrispondente nel denominatore, divergenza angolare fra le ammettenze secondarie, è:

$$d - \arctg \dots = \arctg \lambda_{1k} / r_{1k} - \alpha_0' = \alpha_1' - \arctg \frac{P^2 \sin 2a}{1 + P^2 \cos 2a} - \alpha_0'.$$

La differenza fra questi due angoli, variabili con la velocità, è costante:

$$(41) \quad (\varphi_2 - \varphi_{02}) - (\alpha_{1k} - \alpha_0') = a - \alpha_0.$$

L'angolo φ_{02} è il ritardo, nel T. S., della corrente indotta secondaria (o di corto circuito) sulla tensione primaria applicata:

$$(42) \quad \varphi_{02} = \alpha'_0 + \pi/2 + \alpha_0 = \alpha_0 + \operatorname{arctg} \cdot \frac{1 + \rho_0^2}{1 - \rho_0^2} \operatorname{tg}(\alpha_0 + \pi/2) = \\ = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_0}{\rho_0^2 + \cos 2\alpha_0}.$$

ove $\alpha_0 + \pi/2 = \overline{E_{02}} V = \varepsilon_{02}$ è il ritardo della f. e. m. indotta sulla tensione primaria.

L'angolo φ_3 è il ritardo, nel T. D., della corrente indotta secondaria (o di c. c.) sulla tensione primaria, (19):

$$\varphi_3 = \varphi_1 + (\alpha'_1 + \alpha' + \pi/2) = \alpha_{1k} + \overline{E_3} V = \alpha_{1k} + \varepsilon_3.$$

Mentre φ_{02} è costante, φ_3 *va decrescendo*, col crescere della velocità di rotore, dal valore iniziale $(2\alpha'_1 + \alpha' + \pi/2) = (a + \pi/2 + \alpha'_1)$; come mostrano le espressioni:

$$\varphi_3 = \alpha'_1 + \operatorname{arctg} \cdot \frac{1 + P^2}{1 - P^2} \operatorname{tg}(a + \pi/2), \text{ ove } a + \pi/2 = \overline{E_3} V = \varepsilon_3, \\ (43) \\ = 2\alpha'_1 + \alpha' + \pi/2 - \operatorname{arctg} \frac{P^2 \operatorname{sen} 2a}{1 + P^2 \cos 2a} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2a}{P^2 + \cos 2a} - \alpha'.$$

L'angolo $\varphi_3 - \varphi_{02}$, differenza fra i *ritardi globali* nei due trasformatori, vale dunque (41) la differenza di fase fra le f. e. m. indotte più la divergenza angolare delle ammettenze secondarie:

$$(41') \quad \varphi_3 - \varphi_{02} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2a}{P^2 + \cos 2a} - \alpha' - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_0}{\rho_0^2 + \cos 2\alpha_0} = \\ = (\varepsilon_3 + \alpha_{1k}) - (\varepsilon_{02} + \alpha'_0) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_{02}) + (\alpha_{1k} - \alpha'_0); \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_{02} = a - \alpha_0.$$

Ora, $(\varphi_3 - \varphi_{02})$, partendo dal valore iniziale

$$(2a - s) = (2\alpha'_1 + \alpha' + \pi/2) - (\alpha_0 + \alpha'_0 + \pi/2),$$

va diminuendo col crescere della velocità, insieme all'angolo

$$\alpha_{1k} - \alpha'_0 = d - \operatorname{arctg} \cdot P^2 \operatorname{sen} 2a / (1 + P^2 \cos 2a),$$

il quale parte da

$$\alpha'_1 - \alpha'_0 = (2a - s) - (\varepsilon_3 - \varepsilon_{02});$$

e la loro differenza rimane costante, $(\varepsilon_3 - \varepsilon_{02})$.

La somma vettoriale delle correnti indotte sarà crescente dall'origine, per ρ_0 e P dello stesso segno e $\bar{\beta} > 0$, se abbiassi $\cos(2a - s) > 0$, (40*); e tale si manterrà per qualunque valore di P^2 . D'altra parte, l'ammettenza complessiva dei secondari è funzione decrescente dall'origine, verso un minimo, se $\cos 2a < 0$. Quindi la funzione P_v sarà crescente dall'origine verso un massimo, offrendo nel primo ramo della sua curva una buona legge di amplificazione alla supposta grandezza sinoidale. Con l'uguaglianza $\bar{\gamma} = 0$, $2a - s = (2h + 1)\pi/2$, il ritardo globale iniziale nel T. D. (che è invero dell'ordine di $2\pi + \alpha_1'$) supera di $3\pi/2$ il ritardo globale costante che caratterizza il T. S. (dell'ordine di π), e la funzione parte da ρ'_0 con gradiente nullo.

Un caso interessante si ha infine quando sieno nulli entrambi i coefficienti α e γ nella (40); non rimangono allora che i termini a potenze pari della velocità e di ρ_0 : *il funzionamento diviene indipendente dal modo delle connessioni e dal verso della velocità.*

Per questo non si richiede che di aggiungere alla condizione precedente anche la (21*), $G_1^2 = 0$, inerente al solo T. D. In sostanza, bisognerà avere:

$$(40^*)_{1,2} \quad \frac{B_0^2}{G_0^2} = \frac{b_1'}{g_1'} = \frac{g'}{b'}, \text{ ossia angularmente: } a = s = \frac{\pi}{2} (2h + 1).$$

La prima di queste condizioni significa $\alpha_1' = \alpha_0 + \alpha_0'$, ossia:

$$(40^*)_1 \quad \rho_0^2 = \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_1')}{\sin \alpha_1'}, \quad \text{ossia} \quad \frac{2\lambda_0 r_0}{r_0^2 - (\lambda_0^2 - \mu_0^2)} = \frac{\lambda_1'}{r_1'},$$

e potrà sempre effettuarsi se il T. S. sia a riluttanza variabile, oppure mediante inserzione di capacità. Notisi che

$$\alpha_0 + \alpha_0' < \pi/2 \quad \text{se} \quad r_0^2 > \lambda_0^2 - \mu_0^2.$$

Detta condizione vuole: $g_0 \delta_0^2 - b_0 \sigma^2 = 0$, ($d = \alpha_0$); e quindi esclude $\delta^2 = 0$.

Con la seconda condizione, $\alpha_1' + \alpha' = 3\pi/2$, la f. e. m. indotta secondaria nel T. D. raggiunge la fase della tensione

primaria $\overline{E_2 V} = \varepsilon_2 = 2\pi$, e φ_2 acquista il valore costante $2\pi + \alpha_1'$. Ne risulta $\varphi_2 - \varphi_{02} = 3\pi/2$, $\alpha_{1k} - \alpha_0' = d = \alpha_0$. A conseguire le due condizioni, converrà che il T. D. sia molto reattivo ($2\alpha_0 > \alpha_1' > \alpha_0$).

Supponendo adunque che i due apparecchi soddisfino le (40*)_{1,2}, il rapporto di trasformazione a vuoto si riduce alla forma:

$$(44) \quad P_v^* = \sqrt{\frac{\rho_0'^2 y_0'^2 (1 - P^2)^2 + y_1'^2 P^2}{[g_1' + g_0' (1 - P^2)]^2 + [b_1' + b_0' (1 - P^2)]^2}},$$

che conviene anche scrivere, a velocità avanzata,

$$(44') \quad P_v^* = \sqrt{\frac{\rho_0'^2 y_0'^2 (P^2 - 1)^2 + y_1'^2 (P^2 - 1) + y_1'^2}{y_0'^2 (P^2 - 1)^2 + 2\sigma^2 (P^2 - 1) + y_1'^2}}.$$

Questa forma, con P crescente, parte dal valore ρ_0' con gradiente nullo e assume tosto un andamento crescente. Passa per il valore 1 avviandosi rapidamente ad un massimo acuto, dopo di che ridiscende all'unità per tendere infine assintoticamente a ρ_0 , (fig. 20, curva P_v^*).

Le ascisse di $P_v^* = 1$ son date da

$$(44_1) \quad P^2 = 1 + \frac{y_1'^2 + 2\sigma^2}{2y_0'^2 (1 - \rho_0'^2)} (1 \mp 1),$$

e cioè sono:

$$K' = z' z_1' \quad , \quad K'' = z' z_1' \sqrt{\frac{(g_0' + g_1')^2 + (b_0' + b_1')^2 - \rho_0'^2 y_0'^2}{y_0'^2 (1 - \rho_0'^2)}}.$$

Intermediariamente a questi valori uno, la funzione P_v^* raggiunge un massimo. Uguagliando a zero la derivata della (44') presa rispetto a $P^2 - 1 = X^2$, si ha l'equazione

$$X^4 y_0'^2 (y_1'^2 + 2\rho_0'^2 \sigma^2) + 2X^2 y_0'^2 y_1'^2 (1 - \rho_0'^2) - y_1'^2 (y_1'^2 + 2\sigma^2) = 0,$$

la cui radice maggiore, sempre positiva, sostituita in (44') dà per l'espressione del massimo: (45) $P_{v^*}^*_{\max} =$

$$\frac{y_0' y_1'}{\delta^2 \sqrt{2}} \sqrt{\rho_0'^2 + \frac{y_0'^2 + \sigma^2}{y_0'^2}} + \sqrt{\left(\rho_0'^2 + \frac{y_0'^2 + \sigma^2}{y_0'^2}\right)^2 + \frac{\delta^4}{y_0'^4} \left(1 - \frac{4\rho_0'^2 y_0'^2}{y_1'^2}\right)}.$$

L'ascissa K''' di questo massimo è più prossima a K' che a K'' . L'esame della derivata seconda della (44') mostra che i due rami della curva, prima e dopo il massimo, sono estesamente convessi verso l'asse delle ascisse. La P_r^* avrebbe quindi tutti i caratteri di una curva teorica di risonanza, salvo il massimo a ∞ ; questo è trattenuto a un valore finito dalla condizione stessa $(40^*)_1$, che esige sia

$$\delta^2 > 0, \quad b_1' / g_1' > b_0' / g_0',$$

ossia la costante di tempo secondaria del T. D. maggiore di quella del T. S.

Fig. 20.

Che si tratti tuttavia di un caso analogo a quello della risonanza ottenibile con un condensatore, è dimostrato dal fatto che la elevazione della tensione secondaria V_s è accompagnata dalla graduale scomparsa della corrente di magnetizzazione o componente reattiva della corrente totale I_p che porta la tensione V ai nodi primari. Onde si deve ritenere che essa venga fornita dal T. D.

Infatti: l'espressione simbolica di tale corrente, con $\mathbf{Y}_e = 0$,

$$(37') \quad \mathbf{J}_p = \mathbf{V} \frac{\mathbf{Y}_0 \mathbf{Y}_0' + \mathbf{Y}_1' \mathbf{Y}_{1k} + 2 \mathbf{Y}_0' \mathbf{Y}_{1k} (1 + \mu_0 \mathbf{Y}_0 \cdot \mathbf{K} \mathbf{V}' \mathbf{Y}_1')}{\mathbf{Y}_0' + \mathbf{Y}_{1k}},$$

posta sotto la forma canonica

$$\mathbf{J}_p = \mathbf{V} \frac{\Gamma^2 + j \mathbf{B}^2}{G + j \mathbf{B}} = \mathbf{V} (g_p + j b_p),$$

fornisce la condizione affinché essa si riduca alla sola componente attiva $\mathbf{V} g_p$:

$$b_p = \frac{\mathbf{B}^2 G - \Gamma^2 \mathbf{B}}{G^2 + \mathbf{B}^2} = 0.$$

Con l'uso delle (36) e delle abbreviazioni solite, se ne ritrae una equazione del 4° completa in $\mathbf{P}$, la quale, con l'introduzione delle condizioni (40*)_{1,2} si riduce alla forma:

$$(46) \quad (\mathbf{P}^2 - 1)^2 b_0 y_0'^2 - (\mathbf{P}^2 - 1)(2b_1' y_0'^2 + b_1' \sigma^2 + g_1' \delta^2) + \\ + 2\mu_0 \mathbf{P}(\mathbf{P}^2 - 1)(\mathbf{B}_0'^2 \delta^2 - G_0'^2 \sigma^2) + 2\mu_0 y_1'^2 G_0'^2 \mathbf{P} + y_1'^2 (b_1' + 2b_0') = 0.$$

Ora è sufficiente per noi il riconoscere che b_p cambia di segno in un certo campo di variazione della velocità (o di $\mathbf{P}$) e che questo campo è quello medesimo ove culmina l'elevazione della tensione secondaria.

L'espressione di b_p è il rapporto fra il polinomio (46) e $(G^2 + \mathbf{B}^2)$ che è il denominatore stesso della (44). Sostituendovi i due valori di $\mathbf{P}$ (44₁) che corrispondono a $\mathbf{P}_v^* = 1$, si verifica che per la prima ascissa ($\mathbf{P}' = 1$) si ha $b_p > 0$; e per la seconda ascissa: $b_p < 0$. Vuol dire che nel campo intermedio esisterà un valore di $\mathbf{P}$ reale e positivo che soddisfa la (46), ossia una certa velocità per la quale il « circuito » dei due avvolgimenti primari è percorso dalla stessa corrente reattiva, sopperita dal T. D.

Per $\mathbf{P}^2 = 1$ si trova:

$$(b_p)' = b_1' + 2b_0' + 2\mu_0 G_0'^2,$$

grandezza positiva. La corrente I_p è ancora in ritardo di fase sulla tensione V . E per:

$$P''^2 = 1 + \frac{y_1'^2 + 2\sigma^2}{y_0'^2(1-\rho_0^2)} = \frac{(g_1' + g_0')^2 + (b_1' + b_0')^2 - \rho_0^2 y_0'^2}{y_0'^2(1-\rho_0^2)},$$

si trova:

$$(b_p)'' = \frac{b_0 - A[b_1' + 2b_0' + 2\mu_0 G_0^2 P''] - \Delta[g_1' + 2g_0' - 2\mu_0 B_0^2 P'']}{[1 - \Sigma]^2 + \Delta^2}$$

ove:

$$A = \frac{1 - \rho_0^2}{(y_1'^2 + 2\sigma^2)^2} \left[\sigma^4 \left(1 + \rho_0^2 + \frac{y_1'^2}{\sigma^2} \right) - \delta^2 (1 - \rho_0^2) \right] > 0,$$

$$\Delta = \frac{\delta^2 (1 - \rho_0^2)}{y_1'^2 + 2\sigma^2} = \frac{(g_0' b_1' - g_1' b_0') (1 - \rho_0^2)}{g_1' (g_1' + 2g_0') + b_1' (b_1' + 2b_0')} > 0,$$

$$\Sigma = \frac{\sigma^2 (1 - \rho_0^2)}{y_1'^2 + 2\sigma^2}. \quad (\Sigma^2 + \Delta^2 = \Sigma - A; \quad A > \Delta).$$

La grandezza $(b_p)''$ è dunque francamente negativa.

La compensazione della componente reattiva dei due primari è ora in eccesso e la corrente I_p è in avanzo di fase sulla tensione V . Fra P' e P'' giace quindi la radice reale positiva della (46) che interessa il nostro problema; essa *non* ha precisamente il valore che corrisponde al massimo della tensione secondaria, ma lo supera alquanto (fig. 20).

Rimane adunque dimostrato che, in determinate condizioni, un T. D. in parallelo con un T. S. è capace di elevare il suo fattore di potenza, innalzando la tensione secondaria e quindi la corrente di linea. Tali condizioni, (40*)_{1,2}, riducono il T. D. ad un apparecchio *privo di polarità* di fronte al T. S. che gli è associato e a fornire a quest'ultimo una corrente secondaria in quadratura; come farebbe un condensatore in parallelo.

13. — Corrente di linea.

Le due correnti secondarie (38), in generale:

$$J_{02} = V Y_0' \frac{j\mu_0 Y_0 (Y_e + Y_{1k}) - jK Y' Y_1' Y_{1k}}{Y_e + Y_0' + Y_{1k}},$$

$$J_2 = V Y_{1k} \frac{jK Y' Y_1' (Y_e + Y_0') - j\mu_0 Y_0 Y_0'}{Y_e + Y_0' + Y_{1k}},$$

si sommano sul circuito esterno nella *corrente di linea* $\mathbf{J}_e$, creando la tensione $\mathbf{V}_e$ ai nodi secondari:

$$(38 \Sigma) \quad \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_{02} = \mathbf{V}_e \mathbf{Y}_e = \mathbf{V} \mathbf{Y}_e \frac{j \mathbf{K} \mathbf{Y}' \mathbf{Y}_1' \mathbf{Y}_{1k} + j \mu_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Y}_0'}{\mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_0' + \mathbf{Y}_{1k}} = \mathbf{J}_e;$$

e danno luogo nel loro circuito alla *corrente differenziale*:

$$(38 \Delta) \quad \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_{02} = \mathbf{V} \frac{j \mathbf{K} \mathbf{Y}' \mathbf{Y}_1' \mathbf{Y}_{1k} (\mathbf{Y}_e + 2 \mathbf{Y}_0') - j \mu_0 \mathbf{Y}_0 \mathbf{Y}_0' (\mathbf{Y}_e + 2 \mathbf{Y}_{1k})}{\mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_0' + \mathbf{Y}_{1k}},$$

che più innanzi esamineremo.

La corrente secondaria di linea segue tutte le vicissitudini della tensione a vuoto $(\mathbf{V}_e)_0$:

$$(47) \quad I_e = V_{y_e} \sqrt{\frac{\rho_0^2 y_0'^2 + P^2 y_{1k}^2 + 2 \rho_0 y_0' P y_{1k} \cos(\varphi_1 - \varphi_{02})}{(g_e + g_0' + g_{1k})^2 + (b_e + b_0' + b_{1k})^2}}.$$

Per tutte quelle condizioni che rendono il doppio prodotto al numeratore positivo, la funzione è crescente fin dall'origine verso un massimo. Quando le due correnti indotte cadano in quadratura, $(40^*)_{1,2}$, il denominatore sotto radice diviene

$$((g_e + g_0')(1 - P^2) + g_1')^2 + ((b_e + b_0')(1 - P^2) + b_1')^2;$$

la curva di amplificazione della corrente di linea I_e^* è analoga alla P_e^* della fig. 20. Il suo massimo non soffre la limitazione imposta dalla $(40^*)_1$ che vuole $b_1' g_0' - b_0' g_1' > 0$. Se si riduce infatti la I_e^* a forma analoga con la $(44')$ e si derivi rispetto a $P^2 - 1 = X^2$, si ha l'equazione per il massimo:

$$X^2 y_0'^2 \left(y_1'^2 \frac{y_{e0}^2}{y_0'^2} + 2 \rho_0^2 \sigma_{e0}^2 \right) + 2 X^2 y_0'^2 y_1'^2 \left(\frac{y_{e0}^2}{y_0'^2} - \rho_0^2 \right) - y_1'^2 (y_1'^2 + 2 \sigma_{e0}^2) = 0,$$

$$\text{ove: } y_{e0}^2 = (g_e + g_0')^2 + (b_e + b_0')^2, \quad \sigma_{e0}^2 = g_1'(g_e + g_0') + b_1'(b_e + b_0'),$$

$$y_1'^2 y_{e0}^2 = \sigma_{e0}^4 + \delta_{e0}^4, \quad \delta_{e0}^2 = b_1'(g_e + g_0') - g_1'(b_e + b_0').$$

La sua radice positiva sostituita in I_e^* da per l'espressione del massimo: (cfr. 45), (47^*) , $I_{e \max} =$

$$V \frac{y_e y_0' y_1'}{\delta_{e0}^2 \sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2 + \frac{y_{e0}^2 + \sigma_{e0}^2}{y_0'^2}} + \frac{1}{\left(\rho_0^2 + \frac{y_{e0}^2 + \sigma_{e0}^2}{y_0'^2} \right)^2 + \frac{\delta_{e0}^4}{y_0'^2} \left(1 - \frac{4 \rho_0^2 y_0'^2}{y_1'^2} \right)}}$$

Se l'ammettenza di linea $g_e + j b_e$ sia tale da rendere evanescente δ_{e0}^2 , comunque sia grande $\delta^2 = b_1' g_0' - g_1' b_0'$, questo massimo potrà essere molto elevato

$$(\infty, \text{ per } P^2 - 1 = \sigma_{e0}^2 / y_{e0}^2 \text{ se } \delta_{e0}^2 = 0 \text{ ossia se } b_1' / g_1' = (b_e + b_0') / (g_e + g_0')).$$

A creare la possibilità di casi consimili (rapporti di ammettenze o di impedenze che per una certa velocità diventano ∞) basta però la condizione (21*) nel T. D.,

$$a = \alpha_1' + \alpha' = 3\pi/2,$$

che riduce il fattore d'impedenza

$$z_{1k}/z_1' = \sqrt{1 + P^4 + 2P^2 \cos 2a}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ad } (1 - P^2) \text{ o a } (P^2 - 1).$$

Anche se tale condizione *limite* non sia esattamente raggiunta, l'angolo $a = (\alpha_1' + \alpha')$ è però sempre più prossimo a $3\pi/2$ che a π , onde $\cos 2a$, $\cos(2a - \alpha_1')$, ... sono < 0 , e il fattore d'impedenza z_{1k}/z_1' possiede un minimo, sen $2a > 0$, per $P^2 = -\cos 2a$, che tende a zero per il caso limite.

La differenza di fase fra tensione secondaria e tensione primaria, argomento del rapporto V_e/V , (39), è in generale:

$$(48) \quad \overline{V_e V} = \varphi_{02} = \arctg \frac{P y_k \sin(a + \alpha_k - \alpha_0 - \alpha_0')}{\rho_0 y_0' + P y_k \cos(a + \alpha_k - \alpha_0 - \alpha_0')} + \\ - \arctg \frac{b_0' + b_k + b_e}{g_0' + g_k + g_e} = \frac{\pi}{2} + \alpha_0 + \arctg \frac{P y_k \sin(\varphi_1 - \varphi_{02})}{\rho_0 y_0' + P y_k \cos(\varphi_1 - \varphi_{02})} + \\ - \arctg \frac{y_0' y_k \sin(\alpha_k - \alpha_0') - g_e b_0' + b_e g_0'}{y_0'^2 + y_0' y_k \cos(\alpha_k - \alpha_0') + g_e g_0' + b_e b_0'}.$$

Con P crescente da zero, essa parte dal ritardo

$$\varphi_{02} = \arctg(b_0' + b_1' + b_e) / (g_0' + g_1' + g_e)$$

per diminuire verso un minimo, che può anche essere negativo (avanzo), risalendo infine assintoticamente verso il ritardo limite $\varphi_{02} = \arctg(b_0' + b_e) / (g_0' + g_e)$ che, a vuoto, sarebbe quello $(\pi/2 + \alpha_0)$ spettante al T. S.

La condizione limite (21*) porta: $\overline{E_2 V} = 2\pi$, $\varphi_2 = 2\pi + \alpha_1'$. La presenza del T. S. mantiene però la fase della tensione secondaria variabile con la velocità.

Difatti (a vuoto, per semplificare) con detta condizione

$$y_k = y_1' / (1 - P^2), \quad \varphi_2 - \varphi_{02} = 3\pi/2 + d - \alpha_0,$$

la (48) assume la forma:

$$(48^*) \quad (\overline{V_e V^*})_0 = \arctg \frac{(1 - P^2)[\mu_0(g_0(\sigma^2 + y_0'^2) + b_0\delta^2) + P\delta^2 - P^2\mu_0 g_0 y_0'^2]}{P y_1'^2 - (1 - P^2)[\mu_0(b_0(\sigma^2 + y_0'^2) - g_0\delta^2) - P\sigma^2 - P^2\mu_0 b_0 y_0'^2]}$$

Variando fra gli stessi valori estremi come la (48), questa differenza di fase fra le due tensioni diviene un *aranzo di fase* nell'intervallo compreso fra le radici positive dei due fattori costituenti il numeratore. Tale intervallo comincia da $P = 1$, come l'intervallo $P'' - P'$, (44₁), entro il quale $P_t^* > 1$ e la componente reattiva della corrente primaria, $V b_p$, cambia di segno, (46).

Se si aggiunge anche la condizione (40*)₁, ($b_0\sigma^2 - g_0\delta^2 = 0$, che porta $b_0\delta^2 + g_0\sigma^2 = y_0 y_0' y_1'$), i due intervalli vengono a combaciare fra loro *quasi* completamente anche all'altra estremità.

In conclusione: il sistema dei due apparecchi in parallelo, nelle dette condizioni particolari, possiede un intervallo di funzionamento nel quale la corrente totale primaria I_p passa da ritardo ad avanzo di fase su V e la tensione secondaria è in avanzo sulla tensione primaria, pronta a dare in una ammettenza esterna una corrente I_e possedente una amplificazione ed un avanzo di fase corrispondenti.

14. — Corrente differenziale.

Non occorre insistere sulla necessità di certe relazioni costruttive condizionali, fra i due apparecchi S. e D. da farsi. funzionare in parallelo, sia tra grandezze assolute, sia di rapporti, se si vuole che *gli effetti si sommino con una legge semplice*. In pratica, non è permesso il funzionamento in parallelo di due (o più) trasformatori statici, se non abbiano uno stesso rapporto di trasformazione delle tensioni; ed è anche desiderabile che abbiano impedenze dello stesso ordine, od almeno uguali rapporti della reattanza alla resistenza

(uguali costanti di tempo) negli avvolgimenti corrispondenti. Altrimenti, gli effetti si sommano in modo complicato e danneggevole, rendendo il funzionamento in realtà impraticabile.

Nel caso generale, come accade in tutti gli accoppiamenti in parallelo, circola fra i due secondari una *corrente differenziale*. Anche a carico esterno nullo, questa corrente locale è tanto più intensa quanto più differenti fra loro sieno le costanti di tempo dei due secondari e non si annulla se non sia zero la forza elettromotrice indotta differenziale; ciò richiede che sieno uguali i rapporti di trasformazione nei due singoli apparecchi ed uguali le costanti di tempo primarie (ovviamente, supposto di aver collegato in parallelo i secondari con polarità istantanee concordanti). Col carico secondario, specie se induttivo, la corrente differenziale generalmente aumenta. Questa corrente differenziale, la quale rappresenta potenza sottratta all'utilizzazione e localmente dissipata, praticamente non si annulla se non quando i due trasformatori sieno affatto identici.

Nel nostro caso, uno dei rapporti di trasformazione, ρ_0 , è costante, l'altro, P , cresce continuamente con la velocità del rotore.

V' ha luogo a domandarsi se vi sia una velocità che annulli la corrente differenziale. Anzitutto, a vuoto, tale corrente

$$(49)_0 \quad (I_2 - I_{02})_0 = 2V \sqrt{\frac{\rho_0^3 + P^2 - 2\rho_0 P \cos(a - \alpha_0)}{z_0'^2 + z_k'^2 + 2z_0' z_k' \cos(\alpha_k - \alpha_0)'}}$$

non svanisce se non sia nulla la f. e. m. differenziale, che è al numeratore; ciò che richiederebbe: $P = \pm \rho_0$ e rispettivamente $\cos(a - \alpha_0) = \pm 1$.

Con il carico esterno $Y_e = g_e + j b_e$, la corrente differenziale è il quoziente di una differenza vettoriale di cadute di tensione per la impedenza complessiva; ciò che equivale all'espressione della differenza vettoriale delle due correnti secondarie:

$$(49) \quad 2V \sqrt{\rho_0^2 y_0'^2 \left(\frac{y_{ke}}{y_{0ke}}\right)^2 + P^2 y_k'^2 \left(\frac{y_{oe}}{y_{0ke}}\right)^2 - 2\rho_0 y_0' P y_k' \frac{y_{ke} y_{oe}}{y_{0ke}^2} \cos \Delta \varphi}$$

ove : $\Delta \varphi = (\varphi_2 - \varphi_{02}) - (\varphi_{ke} - \varphi_{0e})$;

il denominatore comune nei quozienti quadrati non è altro che l'ammettenza secondaria complessiva :

$$y_{0ke}^2 = y_{0e}^2 + y_{ke}^2 + 2 y_{0e}' y_{ke} \cos(\varphi_{ke} - \varphi_{02}) = \\ = (g_0' + g_k + g_e)^2 + (b_0' + b_k + b_e)^2,$$

e le ammettenze parziali y_{0e}' ed y_{ke} son definite da :

$$y_{0e}' = \left(\frac{g_e}{2} + g_0' \right)^2 + \left(\frac{b_e}{2} + b_0' \right)^2, \quad \varphi_{0e} = \arctg(b_e + 2b_0') / (g_e + 2g_0') \\ y_{ke} = \left(\frac{g_e}{2} + g_k \right)^2 + \left(\frac{b_e}{2} + b_k \right)^2, \quad \varphi_{ke} = \arctg(b_e + 2b_k) / (g_e + 2g_k).$$

Le due *correnti secondarie* sono tali come se ciascuna delle correnti indotte $V \rho_0 y_0'$ e $V P y_k$ si biforcasse in due circuiti derivati, rispettivamente di ammettenze

$$(Y_e/2 + Y_k) \text{ e } (Y_e/2 + Y_0'); \quad \text{cfr. (38 } \Delta).$$

Affinchè la corrente differenziale si annulli, è necessario che le due correnti indotte $V P y_k$ e $V \rho_0 y_0'$ stieno fra loro come le ammettenze parziali y_{ke} e y_{0e}' , e che la loro differenza di fase $(\varphi_2 - \varphi_{02})$ uguagli la divergenza angolare delle ammettenze stesse $(\varphi_{ke} - \varphi_{0e})$:

$$(50) \quad \frac{P y_k}{y_{ke}} = \frac{\rho_0 y_0'}{y_{0e}'} \quad , \quad \text{tg}(\varphi_2 - \varphi_{ke}) = \text{tg}(\varphi_{02} - \varphi_{0e}).$$

Forme esplicite di queste equazioni di condizione si ottengono sostituendo espressioni gemelle per le grandezze omologhe nei due apparecchi, come le (42), (43) e le seguenti :

(T. D.)

(T. S.)

$$g_k = g_1' \left(1 + P^2 \frac{\cos(2\alpha - \alpha_1')}{\cos \alpha_1'} \right) y_k^2 / y_1'^2 \quad g_0' = g_0 (1 + \rho_0^2) y_0'^2 / y_0^2 \\ b_k = b_1' \left(1 - P^2 \frac{\sin(2\alpha - \alpha_1')}{\sin \alpha_1'} \right) y_k^2 / y_1'^2 \quad b_0' = b_0 (1 - \rho_0^2) y_0'^2 / y_0^2 \\ y_k^2 = y_1'^2 / (1 + P^2 + 2P^2 \cos 2\alpha) \quad y_0'^2 = y_0^2 / (1 + \rho_0^4 + 2\rho_0^2 \cos 2\alpha_0).$$

Si giunge così, termine a termine, alle forme:

$$(50') \quad \frac{4 P^2 y_1^2}{y_{1e}^2 + P^2 y_e^2 + 2 P^2 y_e y_{1e} \cos 2A} = \frac{4 \rho_0^2 y_0^2}{y_{0e}^2 + \rho_0^2 y_e^2 + 2 \rho_0^2 y_e y_{0e} \cos 2A_0},$$

$$(50'') \quad \arctg \frac{y_{1e} \sin 2A}{P^2 y_e + y_{1e} \cos 2A} - \alpha' = \arctg \frac{y_{0e} \sin 2A_0}{\rho_0^2 y_e + y_{0e} \cos 2A_0}, \text{ cfr. (41')}$$

ove:

$$y_{1e}^2 = (g_e + 2g_1)^2 + (b_e + 2b_1)^2, \quad y_{0e}^2 = (g_e + 2g_0)^2 + (b_e + 2b_0)^2$$

$$2A = 2a - \arctg \frac{2y_1 \sin(\alpha_1' - \alpha_e)}{y_e + 2y_1 \cos(\alpha_1' - \alpha_e)} = 2a - \alpha_{1e}.$$

$$2A_0 = 2\alpha_0 - \arctg \frac{2y_0 \sin(\alpha_0 - \alpha_e)}{y_e + 2y_0 \cos(\alpha_0 - \alpha_e)} = 2\alpha_0 - \alpha_{0e}.$$

La (50) esprime dunque l'uguaglianza delle cadute di tensione delle due correnti indotte sulle rispettive ammettenze (per 1 Volt efficace applicato al primario) e la (50') l'opposizione delle loro fasi nel circuito comune.

Se l'angolo α sparisce, si ha il caso di due trasformatori statici ($2A = 2\alpha_1' - \alpha_{1e}$). Nel T. D. abbiamo però: $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Affinchè le (50) ammettano radici comuni, si richiederà in generale di soddisfare una equazione risultante fra i coefficienti delle due equazioni.

Da un lato, la (50) fornisce per il quadrato della velocità due valori:

$$(51) \quad P^2 = 2R_0^2 \frac{y_1'^2}{y_e^2} - \frac{y_{1e}}{y_e} \cos 2A \pm \sqrt{\left(2R_0^2 \frac{y_1'^2}{y_e^2} - \frac{y_{1e}}{y_e} \cos 2A\right)^2 - \frac{y_{1e}^2}{y_e^2}},$$

$$\text{ossia} = \frac{y_{1e}}{y_e} \left[\sqrt{R_0^2 \frac{y_1'^2}{y_e y_{1e}} + \sin^2 A} \pm \sqrt{R_0^2 \frac{y_1'^2}{y_e y_{1e}} - \cos^2 A} \right],$$

ove $R_0^2 = y_{0e}^2 / \rho_0^2 y_0'^2$ designa il reciproco del secondo membro della (50).

Questi due valori sono reali positivi e diversi finchè si abbia $R_0^2 y_1'^2 > y_e y_{1e} \cos^2 A$, ovvero sia

$$(51^*) \quad \left(\frac{y_{0e} - \rho_0^2 y_e}{2 \rho_0 y_0} \right)^2 > \frac{y_e y_{1e} \cos^2 A}{y_1'^2} - \frac{y_e y_{0e} \cos^2 A_0}{y_0'^2},$$

condizione tanto più largamente soddisfatta quanto più piccola sia l'ammettenza esterna y_e .

D'altro lato, la (50'') dà per il quadrato della velocità il valore unico:

$$(52) \quad p^2 = \frac{y_{1e} y_{0e} \operatorname{sen}(2A - 2A_0 - \alpha') + \rho_0^2 y_e \operatorname{sen}(2A - \alpha')}{y_e \operatorname{sen}(2A_0 + \alpha') + \rho_0^2 y_e \operatorname{sen} \alpha'}$$

$$\text{ossia: } = \frac{y_{1e}}{y_e} \left[1 + 2 \cos^2 A (\operatorname{tg} A \cotg(A_0 + \alpha') - 1) \right],$$

ove A_0 sta per l'arctg secondo membro della (50''); ($A_0 > A_0$).

Per questa velocità, la corrente differenziale assume la forma $I^2 - I_{02}$. Per le altre due velocità corrispondenti ai valori (51), la corrente stessa ha la forma $2 I_1 \operatorname{sen} \varphi/2$. L'intervallo fra questi valori e fra le correnti corrispondenti è tanto minore quanto più piccola sia la disuguaglianza (51*) e si annulla insieme ad essa. Le due radici (51) si uguagliano allora nel valore

$$(53) \quad p^2 = \frac{y_{1e}}{y_e} = \sqrt{1 + \frac{4y_{1e}^2}{y_e^2} + \frac{4y_{1e}}{y_e} \cos(\alpha_1' - \alpha_e)}.$$

Affinchè anche la (52) si riduca allo stesso valore, richiedesi:

$$A = A_0 + \alpha', \text{ ossia } \operatorname{tg} A_0 = \operatorname{tg}(\alpha_1' - \alpha_{1e}/2).$$

Se ne deduce l'espressione di

$$(53^*)_1 \quad \rho_0^2 = \frac{y_{0e} \operatorname{sen}(2A_0 - A + \alpha')}{y_e \operatorname{sen}(A - \alpha)} = \frac{y_{0e} \operatorname{sen}(A_0 - (A - A_0 - \alpha'))}{y_e \operatorname{sen}(A_0 + (A - A_0 - \alpha'))},$$

per eliminare ρ_0 dall'altra equazione di condizione

$$(53^*)_2 \quad R_0^2 y_1'^2 = y_e y_{1e} \cos^2 A,$$

ottenendone:

$$(54) \quad \frac{y_1'^2}{y_e y_{1e} \cos^2 A} = \frac{y_0^2}{y_e y_{0e} \cos^2 A_0} \left[1 - \frac{\operatorname{sen}^2(A - A_0 - \alpha')}{\operatorname{sen}^2 A_0} \right],$$

relazione condizionale che lega insieme le quattro coppie di costanti originarie $b_0 g_0$, $b_1 g_1$, $b g$, $b_e g_e$, e che rappresenta, come le (50), l'uguaglianza in grandezze e fa-i delle cadute di tensione delle correnti nei secondari (per 1 Volt al pri-

mario), quando la corrente differenziale debba annullarsi per il valore particolare $P^2 = y_{1e} / y_e$.

Ora, scritte le (50) nella forma $P^2 - 2P^2\chi_0 + \chi^2 = 0$, $P^2 - \chi\xi = 0$, ove: $\chi_0 = 2R_0^2 y_1^2 / y_e^2 - \chi \cos 2A$; $\chi = y_{1e} / y_e$; e $\chi\xi$ è il secondo membro della (52); l'equazione risultante fra i coefficienti è: $\xi^2 - 2\xi\chi_0 / \chi + 1 = 0$. Similmente eliminando ρ_0^2 invece di P^2 , si ha un'altra risultante della stessa forma. Queste due equazioni sono:

$$(55) \quad = \left(\frac{y_{oe} - \rho_0^2 y_e}{2\rho_0 y_0} \right)^2 - \left(\frac{y_{oe} \overline{\sin 2A_0 - A + \alpha'} - \rho_0^2 y_e \overline{\sin A - \alpha'}}{2\rho_0 y_0 \overline{\sin A}} \right)^2.$$

$$(56) \quad = \frac{y_e y_{1e} \cos^2 A}{y_1^2} - \frac{y_e y_{oe} \cos^2 A_0}{y_0^2} =$$

$$= \left(\frac{y_{1e} \overline{\sin 2A - A_0 - \alpha'} - P^2 y_e \overline{\sin A_0 + \alpha'}}{2P y_1 \overline{\sin A_0}} \right)^2 - \left(\frac{y_{1e} - P^2 y_e}{2P y_1} \right)^2.$$

Entrambe tali risultanti si riducono alla (54) rispettivamente per le condizioni (53*)₁ e (53), le quali annullano gli ultimi termini a destra. I primi termini a sinistra dei secondi membri non possono invece annullarsi: avendo assunto $\rho_0 < 1$, si avrà sempre $y_{oe} > \rho_0^2 y_e$; perciò e conforme alla (50''), sarà anche

$$\frac{y_{1e} \overline{\sin 2A}}{P^2 y_e + y_{1e} \overline{\cos 2A}} > \operatorname{tg}(A_0 + \alpha');$$

e quindi per $P^2 y_e / y_{1e} = 1$, si richiede $A > A_0 + \alpha'$ ossia $A - \alpha > A_0$; che collima con quanto è prescritto dalle (53*)₁ e (54) più restrittivamente $A_0 > A - A_0 - \alpha' > 0$ ovvero sia: $\alpha_0 - \alpha_{oe} / 2 > (\alpha_1' - \alpha_{1e} / 2) - (\alpha_0 - \alpha_{oe} / 2) > 0$. Ad assolvere questa condizione ovvia, concorrono soltanto i sei elementi delle ammettenze $g_0 + j b_0$, $g_1 + j b_1$, $g_e + j b_e$ degli avvolgimenti e della linea.

A conferma: ordinata la (56) secondo $P^2 y_e$ e risolta come biquadratica, si ricava l'espressione

$$(56') \quad P^2 = \frac{y_{1e}}{y_e} \frac{\sin(2A - 2A_0 - \alpha')}{\sin(2A_0 + \alpha')} \times \\ \times \left[1 + \sin 2A_0 \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4y_0^2 y_{1e} y_1'^2 y_{0e} \sin \alpha' \sin(2A - 2A_0 - \alpha')}}{2y_0^2 y_{1e} \sin \alpha' \sin(2A - 2A_0 - \alpha')} \right]$$

per il quadrato della velocità che in generale annulla la corrente differenziale, in funzione delle quattro coppie di costanti originarie. Si è abbreviato con

$$D = y_0^2 y_{1e} \sin 2A - y_1'^2 y_{0e} \sin 2A_0.$$

La condizione di realtà può tradursi nella forma seguente:

$$\frac{4y_{1e}y_{0e}\sin^2 A - A_0 - \alpha'}{y_1'^2 y_0^2} > \\ > 4 \left[\frac{y_{1e} \cos^2 A}{y_1'^2} - \frac{y_{0e} \cos^2 A_0}{y_0^2} \right] \left[\frac{y_{0e} \sin^2 A_0}{y_0^2} - \frac{y_{1e} \sin^2 A}{y_1'^2} \right].$$

Se i due apparecchi differissero soltanto per la presenza dell'angolo α' nel T. D., ($g_1' + j b_1' = g_0 + j b_0$), allora la disuguaglianza sarebbe francamente invertita (poichè si avrebbe $y_{1e} = y_{0e}$, $\alpha_{1e} = \alpha_{0e}$, $A - A_0 = \alpha'$) e l^2 sarebbe immaginario. Ma, per poco che le ammettenze sieno differenti ($y_1 \geq y_0$ senza escludere $\alpha_1' = \alpha_0$), la disuguaglianza, come è scritta, è verificata qualunque sia $y_e > 0$. Vi sono adunque per svariate Y_1' , Y_0 , Y_e , coppie di valori reali e positivi per P^2 .

Di tutti questi, il più piccolo è y_{1e}/y_e . Se difatti si introduca nella (56') la condizione (54), sostituendovi

$$(54 \text{ bis}) \quad \frac{y_1'^2 y_{0e}}{y_0^2 y_{1e}} = \frac{4 \cos^2 A (\cos^2 A - A_0 - \alpha' - \cos^2 A_0)}{\sin^2 2A_0},$$

il discriminante diviene un quadrato perfetto,

$$\left[y_0^2 y_{1e} \frac{\sin 2A}{\sin 2A_0} \sin 2(A - A_0 - \alpha') \right]^2,$$

e l'espressione delle radici:

$$(P^2) = \frac{y_{1e} \cos^2 A_0 - \cos^2 (A \pm (A - A_0 - \alpha'))}{y_e \cos^2 A_0 - \cos^2 (A_0 + \alpha')}.$$

Al segno inferiore corrisponde $P^2 = y_{1e}/y_e$; al segno superiore, un P^2 negativo, da rigettarsi.

Orbene, quando la corrente differenziale si annulli, l'espressione della corrente di linea

$$(47 \text{ bis}) \quad I_e = V y_e \sqrt{\frac{P^2 y_k^2 + \rho_0^2 y_0^2 + 2P \rho_0 y_k y'_0 \cos(\varphi_2 - \varphi_{02})}{y_{ke}^2 + y_{0e}^2 + 2y_{ke} y'_{0e} \cos(\varphi_{ke} - \varphi_{0e})}},$$

ove, mercè le (50), i rapporti dei termini corrispondenti, sopra e sotto, sono divenuti fra loro uguali, si riduce a:

$$(57) \quad (I_e) = V y_e \frac{P y_k}{y_{ke}} = \frac{2 V P y'_1 y_e}{\sqrt{y_{1e}^2 + P^4 y_e^2 + 2P^2 y_e y_{1e} \cos 2A}}.$$

Il gradiente iniziale di questa corrente è $2 V y'_1 y_e / y_{1e}$.

Con la soluzione (53), nella (57) si riproduce il primo membro della (54), e cioè:

$$(57') \quad (I_e) = V y_e \frac{y'_1}{\sqrt{y_e y_{1e} \cos A}} =$$

$$= \frac{V y'_1}{\sqrt{1 + \frac{4y_1^2}{y_e^2} + \frac{4y'_1}{y_e} \cos(\alpha'_1 - \alpha_e) \cdot \cos\left(a - \frac{\alpha_{1e}}{2}\right)}}.$$

Questo valore della corrente di linea è un massimo, quello della (57); tanto più elevato e tanto più presto raggiunto, quanto più piccola sia la grandezza y_{1e}/y_e , ($\alpha'_1 > \alpha_e$, $2y'_1 \cong y_e$). In sostanza, tanto il gradiente iniziale come il gradiente medio della funzione (57), sono proporzionati alla grandezza y'_1/y_{1e} .

Non abbiamo considerato, nel T. D., l'esistenza della condizione (21*), volendo conservare al problema tutta la sua generalità; cosicchè esso fornisce le formole anche

per due trasformatori statici ($\alpha' = 0$) e in genere per due circuiti qualunque, sedi di forze elettromotrici alternate sincrone, lavoranti in parallelo sopra una linea d'utilizzazione.

Concluderemo, notando ancora l'espressione generale della corrente primaria $I_p = V y_p$, nella quale (ossia nella ammettenza complessiva y_p) si compendiano formalmente tutti gli effetti attivi e reattivi della coppia di trasformatori e della linea secondaria.

L'espressione simbolica della corrente primaria, quale si ricava dalle (37) e (38),

$$J_p = V \frac{Y'_0(Y_0 + Y_e) + Y_k(Y'_1 + Y_e) + 2Y'_0Y_k(1 + \mu_0 Y_0 \cdot KY'_1Y'_1)}{Y'_0 + Y_k + Y_e} J_p, V, Y,$$

dà per l'ammettenza complessiva :

$$(58) \quad y_p = \frac{2y'_0y_k}{y_{oke}} \times$$

$$\sqrt{\left(\frac{y_{e0}}{2y_k}\right)^2 + \left(\frac{y_{e1}}{2y'_0}\right)^2 + \frac{y_{e0}y_{e1}}{2y'_0y_k} \cos A_{e0} - A_{e1} + 2\Theta \left(\frac{y_{e0}}{2y_k} \cos A_{e0} + \frac{y_{e1}}{2y'_0} \cos A_{e1}\right) + \Theta^2}$$

dove si è posto :

$$y_{e0}^2 = y_0^2 + y_e^2 + 2y_0y_e \cos \alpha_0 - \alpha_e, \quad y_{e1}^2 = y_1'^2 + y_e^2 + 2y_1'y_e \cos \alpha_1' - \alpha_e$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{e0} = (b_e + b_0) / (g_e + g_0), \quad \operatorname{tg} \alpha_{e1} = (b_e + b_1') / (g_e + g_1');$$

$$A_{e0} = \theta + \alpha_k - \alpha_{e0}, \quad A_{e1} = \theta + \alpha_0' - \alpha_{e1};$$

$$\Theta^2 = 1 + \rho_0^2 P^2 + 2\rho_0 P \cos a + \alpha_0, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\rho_0 P \sin a + \alpha_0}{1 + \rho_0 P \cos a + \alpha_0}.$$

La (58), che può anche analizzarsi sott'altre forme, offre tutti gli elementi per una deduzione e una discussione generale dei fatti particolarmente già visti. Ci limiteremo qui a notare che il primo trinomio sotto radice, a sinistra, è indipendente dal verso della velocità nel T. D., mentre ne dipendono gli ultimi due termini a destra ($\rho_0 P \geq 0$).

§ 15. — **Riepilogo.** — **Il T. D. come relais telefonico.**

In quanto precede si è dimostrato che il T. D. funziona come uno speciale trasformatore nel quale il coefficiente d'induzione mutua cresca proporzionalmente con la velocità di rotore, — le sue equazioni avendo la stessa forma di quelle di un trasformatore statico ove si sostituisca il « fattore d'induzione » con una grandezza complessa proporzionale alla velocità di rotore; il *modulo* di questa rappresenta allora ciò che può chiamarsi il « fattore d'induzione dinamico ». Prendendo quindi per variabile questo fattore, cioè la velocità di rotazione, ne consegue, per un circuito secondario invariabile, che: a corrente primaria costante, la corrente secondaria cresce proporzionalmente alla velocità; a tensione primaria costante, la corrente secondaria cresce fino ad un massimo, per diminuire in seguito lentamente. L'aumentare del fattore d'induzione con la velocità corrisponde ad una trasformazione continuamente crescente di energia meccanica in energia elettrica dello stesso periodo di quella che eccita il primario.

Sotto altro punto di vista, si può dire che l'apparecchio, caricato di una data linea secondaria, offre alla tensione primaria applicata una ammettenza, funzione della velocità del rotore, la quale va crescendo dall'origine fino ad un massimo, con una legge espressa dalla radice quadrata di un polinomio nei termini quadratici della velocità. Al primo ramo crescente dell'ammettenza, corrispondono una corrente primaria ed una corrente secondaria crescenti verso dei massimi particolari, ed una amplificazione proporzionata della energia elettrica applicata al primario.

Il valore massimo che l'ammettenza può raggiungere, per un dato apparecchio, dipende dalle caratteristiche della linea secondaria. Sarà possibile calcolare un apparecchio per una linea determinata, o viceversa una linea per un dato apparecchio, per modo che il gradiente iniziale dell'ammettenza,

o quello medio intorno ad una certa velocità di regime, sia il più grande possibile.

Queste ed altre proprietà del T. D. vennero dimostrate *per una determinata frequenza di corrente sinoidale*, con procedimenti teorici non aventi altra pretesa che la ricerca di nozioni d'orientamento d'ordine generale e di prima approssimazione. Ridotte le equazioni della macchina a quelle di un trasformatore statico, sono note o prevedibili le particolari modificazioni da introdurre nelle deduzioni teoriche per riguardo alle proprietà isteretiche degli inevitabili nuclei magnetici e alle particolarità di struttura che caratterizzano l'apparecchio in confronto a quelle ormai classiche delle macchine per forti correnti e basse frequenze.

Per l'applicazione del T. D. come *relais telefonico*, rimarrebbe ad analizzare il suo funzionamento con riguardo alle proprietà della linea e della corrente telefonica. Dobbiamo qui limitarci alle constatazioni di fatto più essenziali.

Sebbene le formule teoriche mostrino complicate dipendenze delle leggi dell'apparecchio dalla frequenza, l'esperienza ha però mostrato che la differenza di trattamento che il T. D. offre ai vari periodi acustici è pochissimo avvertita dall'orecchio al telefono secondario, quando si ecciti il primario con una corrente microfonica modulata dal discorso o da altri suoni qualunque, più o meno musicali. L'apparecchio conserva cioè sostanzialmente alla voce secondaria lo stesso grado di *chiarezza* (articolazione e tempera) che un telefono constata nella corrente primaria. Le due voci vanno sensibilmente al passo. Pure, nella corrente ricevuta, indotta e trasformata più volte di seguito, le molteplici componenti semplici hanno certamente acquistato variazioni di ampiezze e di fasi, in funzione delle singole frequenze e delle costanti di tempo dei circuiti indotti.

Se ne può concludere, da un lato, che le differenze d'amplificazione e di sfasamento per le diverse frequenze non sono gran cosa per riguardo all'intervallo delle frequenze parlate

o cantate; e d'altro lato, che l'orecchio interviene, qui come in tanti altri casi, con le sue virtù di abitudine integratrice, per rimettere virtualmente *al passo* le componenti spostate di pochi quarti di periodo durante il multiforme processo induttivo.

Si potrebbe giustificare, almeno parzialmente, questo risultato pratico, osservando che *il rapporto di trasformazione fondamentale delle forze elettromotrici, P , (21'), è una funzione tanto più debole della frequenza, quanto più piccola sia la resistenza ohmica nel rotore e quanto più stretto sia il concatenamento magnetico fra statore e rotore.*

§ 16. — Per la simmetria di principio e costruttiva del T. D., il relais funziona indifferentemente nei due sensi, senza necessitare alcuna manovra per parte dei due corrispondenti e senza richiedere complicazioni di circuiti accessori (*repeater circuits*), che per altri relais hanno invece importanza fondamentale. I due avvolgimenti di statore avendo identici elementi d'impedenza, il relais potrà stazionare verso la mezzeria della linea totale di trasmissione. Però, nulla obbliga in pratica a mantenere questa condizione costruttiva, che ci ha servito unicamente a semplificare e la teoria e la prima costruzione. È chiaro che l'apparecchio può possedere numeri differenti di spire nei due avvolgimenti, ad esempio come un trasformatore statico elevatore di tensione, per dare sulla linea secondaria una tensione sopraelevata rispetto a quella primaria, indipendentemente dall'effetto amplificatore dinamico; in tal caso, la linea secondaria sarà una lunga linea, il primario del T. D. essendo alimentato dalla corrente microfonica di partenza. Se la lunga linea sia sufficientemente sprovvista o corretta da deformazioni, la invertibilità del relais resterà sempre valida.

Non si trasmette attraverso il T. D. se il rotore non sia in movimento e se non abbia anzi raggiunto una certa velocità; poichè esso deve creare da zero la corrente telefonica

nel secondario. Si può però ovviare fundamentalmente a questo difetto, che d'altronde è comune a tutti i sistemi di relais, utilizzando una proprietà importante del T. D., la quale permette di sommare in qualche modo la corrente, o la tensione, secondaria con la corrente, o la tensione, primaria. Infatti, le differenze di fase fra tensione secondaria e primaria, come fra corrente secondaria e primaria, sono indipendenti dalla velocità, dipendono cioè soltanto dagli elementi d'impedenza interni del T. D. e da quelli di linea.

Inoltre, queste differenze di fase sono dell'ordine di 2π , ossia, i vettori reometrici nel secondario danno generalmente forti componenti in fase con i vettori corrispondenti nel primario. Ed esiste una condizione costruttiva limite, la quale riconduce la forza elettromotrice secondaria esattamente in fase con la tensione primaria: è la condizione di *optimum* per tutte le applicazioni dell'apparecchio.

Anche queste proprietà del T. D. furono dimostrate per una determinata frequenza. Nel problema telefonico, bisognerà ridursi, come d'ordinario, a calcolare o a regolare le cose per la frequenza media di 800 periodi, o altra. Al resto, l'orecchio provvederà.

Furono studiate per questo scopo varie disposizioni.

Il T. D. può dapprima venire utilizzato come *autotrasformatore*, eccitando con la corrente primaria uno degli avvolgimenti, congiunto in serie con l'altro, e facendo partire la linea secondaria dalle estremità di questa serie. A rotore fermo, passa sulla linea secondaria buona parte della corrente primaria; il movimento del rotore produce poi un effetto amplificatore, sommando alla tensione primaria la forza elettromotrice secondaria. Nel caso *optimum*, la tensione disponibile sulla linea diviene $V(1 + P)$, ove P è proporzionale alla velocità.

Si possono poi collegare le due linee primaria e secondaria con un trasformatore statico e un T. D. lavoranti di conserva. Il T. S. manda sulla linea secondaria la sua corrente

di induzione e il T. D. interviene per elevare la energia trasmessa.

I due apparecchi possono connettersi *in serie* oppure *in parallelo* fra le due linee. Anche per questi sistemi composti, l'insieme costituito dai due apparecchi S. e D. e dalla linea secondaria, equivale ad una ammettenza complessiva offerta alla tensione primaria, che è funzione della velocità del rotore; in ogni caso è possibile fissare le condizioni interne ed esterne che rendono questa ammettenza funzione crescente della velocità fin dall'origine.

Per una data connessione dei due apparecchi, la legge secondo la quale nel primo caso si sommano le tensioni e nel secondo caso si sommano le correnti indotte secondarie, cambia in generale quando si inverte il senso di rotazione nel T. D. Mentre in quest'ultimo, quando funziona da solo, le componenti della impedenza dipendono soltanto dal quadrato della velocità, se esista invece esternamente una induzione mutua costante fra i due circuiti, procurata dal T. S. associato, nella espressione della impedenza risultante compaiono anche dei termini proporzionali a potenze dispari della velocità e del fattore d'induzione esterno, i quali possono essere positivi o negativi. Per certe condizioni negli apparecchi e nella linea, tali termini possono però divenire trascurabili, e la legge dell'impedenza torna allora ad essere indipendente dal verso della velocità. Altre condizioni poi concorrono ad aumentare il gradiente iniziale o il gradiente medio della curva d'ammettenza, come ad es. quella che gli avvolgimenti corrispondenti nel T. S. e nel T. D. abbiamo costanti di tempo dello stesso ordine.

Per approssimarsi a tali condizioni bisogna in pratica procedere per tentativi. Conviene che il T. S. sia una bobina d'induzione a riluttanza variabile, mediante modificazione del nucleo o altrimenti. È poi possibile variare o correggere le costanti di tempo, mediante condensatori proporzionati, in derivazione (fig. 21) se i due apparecchi sono in serie, op-

pure in serie (fig. 22) se i due apparecchi sieno in parallelo. Si regolano gli elementi dei circuiti così combinati per la

Fig. 21.

frequenza telefonica media di 800 periodi, davanti alla scala del reometro Duddell, inserito nella linea secondaria o nel

Fig. 22.

circuito che ne fa le veci, fino ad ottenere una legge d'amplificazione col gradiente medio più elevato, in funzione della velocità, o per la velocità massima di esercizio.

Il diagramma in (fig. 23) mostra alcune curve reometriche così rilevate, a 800 periodi, nel secondario del T. D. a nove dischi di rame, associato con una bobina d'induzione. Questa bobina, che fu la stessa nelle due serie d'esperienze, qui sotto accennate, è rettilinea (lunghezza 16 cm., diametro interno dell'avvolgimento 1,5 cm., esterno 4 cm.), è divisa in 8 sezioni adiacenti e isolate fra loro, ciascuna avvolta a 800 spire con due fili di rame paralleli di 0,2 mm.

La resistenza totale di ciascuno dei due avvolgimenti è di $17,5 \times 8 = 140$ Ohm. Vari nuclei scorrevoli, in filo di ferro sottilissimo, introdotti nel tubo della bobina, possono far variare la sua impedenza effettiva (a 800 periodi) da circa 500 Ohm fin verso 2000 Ohm. Gli avvolgimenti del T. D. (composti di $24 \times 8 = 192$ bobine) hanno una resistenza effettiva di 1480 Ohm ed una impedenza effettiva di 1948 Ohm,

alla stessa frequenza. Il circuito secondario, lo stesso nelle due serie di esperienze, è rappresentato da una semplice resistenza ohmica di 2×11110 Ohm.

La tensione a 800 periodi applicata di due primari, proveniva dal piccolo alternatore S. — H. a ruota dentata, fortemente eccitato e frenato, con l'intermediario di un trasformatore chiuso, avente due avvolgimenti secondari a filo grosso, l'uno dei quali, *cortocircuitato* sopra un amperometro termico testimone, assorbiva buona parte del carico totale e concorreva a mantener costante la tensione sul secondo avvolgimento, alimentante il sistema dei due primari.

La corrente secondaria, caricata sulla resistenza di 22000 Ohm, veniva misurata dal Duddell, col sussidio di una disposizione potenziometrica a corrente continua, analoga a quella già descritta al §. 10

Le curve 1 e 2 del diagramma si riferiscono alla corrente secondaria data dal T. D. e dal T. S. *in serie*, secondo lo schema della (fig. 21). Le curve 3 e 4 son date dai due medesimi apparecchi *in parallelo*, come nella (fig. 22). Nelle due serie di esperienze, di carattere comparativo, si ebbe cura di mantenere costantemente ad *uno* stesso valore l'indicazione dell'amperometro testimone nel circuito d'alimentazione primario.

Le curve 1 e 2 rappresentano dunque l'effetto secondario col T. D. e il T. S. *in serie*, quando l'impedenza della bobina d'induzione che fa da T. S. venga corretta con i condensatori derivati $C_1 = C_2 = 0,15 \mu F$. Delle capacità più grandi ovvero più piccole, danno altre curve di gradiente medio meno elevato. Si passa dai punti della curva 1 a quelli della curva 2, semplicemente rovesciando le connessioni del primario della bobina d'induzione col primario del T. D. mediante un commutatore. Come si scorge, v'ha una velocità (3600 giri) per la quale l'amplificazione è la medesima con entrambe le connessioni. Lo stesso si otterrebbe, per una data connessione, rovesciando il verso della velocità.

Le curve 3 e 4 rappresentano l'effetto di corrente secondario con il collegamento dei due apparecchi in parallelo e un dato verso della velocità (quello più conveniente). Si ot-

Fig. 23.

tenne la curva 3, con $C_1 = 0,15 \mu F$, $C_2 = \infty$; la curva 4, con $C_1 = C_2 = 0,15 \mu F$, superiore alla prima e con gradiente iniziale positivo mentre nella prima è negativo. Fra 7000 e 8000 giri, queste curve acquistano poi dei flessi, per dirigersi probabilmente verso dei massimi. Applicando piccole

capacità ($0,01 \dots \mu F$) in parallelo sulla *linea*, i punti di queste curve si elevano sensibilmente, capacità più notevoli ($0,1 \dots \mu F$), li abbattano.

Questi risultati di esperienze che qui abbiamo potuto riferire, illustrano concordemente la proprietà fondamentale del T. D., di possedere una ammettenza risultante la quale va crescendo inizialmente con la velocità di rotazione. La legge di questa funzione può venire notevolmente modificata, oltre che dai caratteri costruttivi dell'apparecchio, dalle condizioni d'impedenza della linea d'utilizzazione.