Sopra alcune proprietà degli integrali euleriani di prima e seconda specie.

(del D.^r L. MATTHIESSEN, a Husum).

L' integrale definito :

$$\int_0^\infty \frac{x^{ra-1} dx}{(x^r + x_0^r)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{r \cdot \Gamma(a+b) x_0^{rb}} = \frac{B(a, b)}{r \cdot x_0^{rb}}, \quad (1)$$

può considerarsi come un caso particolare dell' integrale polinomio generale:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k-1} dx}{x^{rn} + ax^{r(n-1)} + bx^{r(n-2)} + \dots + px^r + s} = \int_0^\infty \frac{x^{2k-1} dx}{[x^{rn}]}. \quad (2)$$

La determinazione diretta di quest' ultimo è singolarmente laboriosa, ma può ridursi alla soluzione di $(r-1)n$ equazioni lineari, guadagnando con ciò moltissimo in semplicità ed eleganza. Sia:

$$x^{rn} - ax^{r(n-1)} + bx^{r(n-2)} - cx^{r(n-3)} + \dots \mp px^r \pm s = 0,$$

l' equazione delle potenze *r-esime* delle radici $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ dell' equazione:

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \dots \mp \pi x \pm \sigma = 0.$$

Se queste n radici sono tutte reali e positive, il divisore $[x^{rn}]$ è diverso da zero per tutt' i valori di x tra 0 e ∞ , e l' integrale ha un valore assegnabile. Inoltre l' integrale è una funzione algebrica determinabile dei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, finchè r non sia fattore di $2k$. Ma quando r è fattore di $2k$, l' integrale è una funzione logaritmica. È osservabile che, per la natura della legge con cui sono formate le $(r-1)n$ equazioni lineari, sono esclusi

tutti gl'integrali trascendenti. Ponendo per brevità;

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[x^n]} = T_0, \quad \int_0^\infty \frac{xdx}{[x^n]} = T_1, \quad \dots, \quad \int_0^\infty \frac{x^u dx}{[x^n]} = T_u;$$

si ha da formare il seguente sistema di equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \alpha T_{rn-2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{r} - \beta T_{rn-3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{r} + \gamma T_{rn-4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{r} - \dots \pm \mu T_{rn-r-2} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} \mp \dots = \frac{\pi}{r}, \\ T_{rn-2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{r} - \alpha T_{rn-3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{r} + \beta T_{rn-4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{r} - \dots \pm \lambda T_{rn-r-2} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} \mp \dots = 0, \\ - T_{rn-3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{r} + \alpha T_{rn-4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{r} - \dots \pm \kappa T_{rn-r-2} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} \mp \dots = 0, \\ + T_{rn-4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{r} - \dots \pm \iota T_{rn-r-2} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} \mp \dots = 0, \\ \dots \dots \dots = 0, \\ \dots \dots \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \pm \alpha T_{rn-r-2} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} \mp \dots = 0, \\ \dots \dots \dots \pm T_{rn-r-2} \operatorname{sen} \frac{(r+1)\pi}{r} \mp \dots = 0, \\ \dots \dots \dots = 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

L'integrale T_{rn-r-1} è evidentemente logaritmico, e manca a causa del coefficiente $\operatorname{sen} \frac{r\pi}{r} = 0$.

Se ora si pone $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$, l'integrale T prende la forma delle funzioni *Beta*. Dividendo il sistema (3) per $\frac{\pi}{r}$, portando nella prima equazione l'1 al primo membro, e osservando che:

$$\operatorname{sen} \frac{m\pi}{r} = \pi: B\left(\frac{m}{r}, 1 - \frac{m}{r}\right),$$

relazioni nella quale si possono trasporre i coefficienti binomiali, ovvero continuare le funzioni Γ in avanti o indietro ad arbitrio, nel modo seguente:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{0} \frac{\Gamma\left(n - \frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2w}{v}\right)} - \binom{n}{1} \frac{\Gamma\left(n - \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{w}{v}\right)} + \binom{n}{2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)} - \binom{n}{3} \frac{\Gamma\left(n + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{w}{v}\right)} + \dots = 0, \\ \binom{n}{0} \frac{\Gamma\left(n - \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{w}{v}\right)} - \binom{n}{1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)} + \binom{n}{2} \frac{\Gamma\left(n + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{w}{v}\right)} - \binom{n}{3} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2w}{v}\right)} + \dots = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

in generale :

$$\binom{n}{0} \frac{\Gamma\left(n + m \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + m \frac{w}{v}\right)} - \binom{n}{1} \frac{\Gamma\left(n + [m+1] \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + [m+1] \frac{w}{v}\right)} + \binom{n}{2} \frac{\Gamma\left(n + [m+2] \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + [m+2] \frac{w}{v}\right)} - \dots = 0.$$

Quindi anche, per la trasposizione dei coefficienti :

$$\binom{n}{0} \frac{\Gamma\left(n + tw + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + tw + \frac{w}{v}\right)} - \binom{n}{1} \frac{\Gamma\left(n + tw + \frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + tw + \frac{2w}{v}\right)} + \binom{n}{2} \frac{\Gamma\left(n + tw + \frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(1 + tw + \frac{3w}{v}\right)} - \dots = 0.$$

Ora sostituendo $n + tw = q$, risulta :

$$\binom{n}{0} \frac{\Gamma\left(q + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(q - n + 1 + \frac{w}{v}\right)} - \binom{n}{1} \frac{\Gamma\left(q + \frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(q - n + 1 + \frac{2w}{v}\right)} + \binom{n}{2} \frac{\Gamma\left(q + \frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(q - n + 1 + \frac{3w}{v}\right)} - \dots = 0, \quad (8)$$

o se si mette anche $tw = m$:

$$\binom{q-m}{0} \frac{\Gamma\left(q + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(m + 1 + \frac{w}{v}\right)} - \binom{q-m}{1} \frac{\Gamma\left(q + \frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(m + 1 + \frac{2w}{v}\right)} + \binom{q-m}{2} \frac{\Gamma\left(q + \frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(m + 1 + \frac{3w}{v}\right)} - \dots = 0. \quad (9)$$

Se in questa relazione si pone $m = -1$ si ottiene:

$$\binom{q+1}{0} \frac{\Gamma\left(q + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{w}{v}\right)} - \binom{q+1}{1} \frac{\Gamma\left(q + \frac{2w}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{2w}{v}\right)} + \binom{q+1}{2} \frac{\Gamma\left(q + \frac{3w}{v}\right)}{\Gamma\left(\frac{3w}{v}\right)} - \dots = 0. \quad (10)$$

Dividendo questa equazione per $\Gamma(q)$, viene:

$$\binom{q+1}{0} \frac{1}{B\left(\frac{w}{v}, q\right)} - \binom{q+1}{1} \frac{1}{B\left(\frac{2w}{v}, q\right)} + \binom{q+1}{2} \frac{1}{B\left(\frac{3w}{v}, q\right)} - \dots = 0. \quad (11)$$

Altre ricerche conducono alle relazioni:

$$\binom{q}{0} \frac{1}{B\left(\frac{w}{v}, q\right)} - \binom{q}{1} \frac{1}{B\left(\frac{2w}{v}, q\right)} + \binom{q}{2} \frac{1}{B\left(\frac{3w}{v}, q\right)} - \dots = \pm q! \left(\frac{w}{v}\right)^q = \pm \Gamma(q+1) \left(\frac{w}{v}\right)^q \quad (12)$$

$$\binom{q-1}{0} \frac{1}{B\left(\frac{w}{v}, q\right)} - \binom{q-1}{1} \frac{1}{B\left(\frac{2w}{v}, q\right)} + \binom{q-1}{2} \frac{1}{B\left(\frac{3w}{v}, q\right)} - \dots = \pm \left\{ 1 + (q-1) \frac{w+v}{2w} \right\} \left(\frac{w}{v}\right)^q \Gamma(q+1) \quad (13)$$

delle quali la (12) ammette una trasposizione dei coefficienti binomiali.

Una terza relazione di questa specie è la seguente:

$$\binom{p}{0} \frac{\Gamma\left(n + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(n-m + \frac{w}{v}\right)} - \binom{p}{1} \frac{\Gamma\left(n+1 + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(n-m+1 + \frac{w}{v}\right)} + \binom{p}{2} \frac{\Gamma\left(n+2 + \frac{w}{v}\right)}{\Gamma\left(n-m+2 + \frac{w}{v}\right)} - \dots = 0, \quad (14)$$

colla condizione $p > m$. Essa pure ammette una trasposizione.

Le relazioni sopra scritte dalla (4) fino alla (14) sono utilissime, specialmente per la teoria dei coefficienti binomiali e dei numeri figurati. Ponendo nella (8) $\frac{w}{v} = n$, dopo aver messo $(n+q-1)!$ in luogo di $\Gamma(n+q)$ e dopo aver divisa l'equazione per $(n-1)!$, risulta la relazione seguente:

$$\binom{n}{0} \binom{n+q-1}{q} - \binom{n}{1} \binom{n+q}{q+1} + \binom{n}{2} \binom{n+q+1}{q+2} - \dots \pm \binom{n}{n} \binom{2n+q+1}{q+n} = 0, \quad (15)$$

con trasposizione arbitraria dei coefficienti. Se inoltre q varia, si ottiene il seguente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \pm \binom{n}{n} \binom{n-1}{0} = \pm 1 \\ \dots \dots \dots = 0 \\ n > 3 \quad - \binom{n}{3} \binom{n-1}{0} + \dots = 0 \\ n > 2 \quad + \binom{n}{2} \binom{n-1}{0} - \binom{n}{3} \binom{n}{1} + \dots = 0 \\ n > 1 \quad - \binom{n}{1} \binom{n-1}{0} + \binom{n}{2} \binom{n}{1} - \binom{n}{3} \binom{n+1}{2} + \dots = 0 \\ \binom{n}{0} \binom{n-1}{0} - \binom{n}{1} \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \binom{n+1}{2} - \binom{n}{3} \binom{n+2}{3} + \dots = 0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{1} - \binom{n}{1} \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} \binom{n+3}{4} + \dots = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

in generale:

$$\binom{n}{0} \binom{n+r-1}{r} - \binom{n}{1} \binom{n+r}{r+1} + \binom{n}{2} \binom{n+r+1}{r+2} - \binom{n}{3} \binom{n+r+2}{r+3} + \dots = 0.$$

Sommando tutte queste equazioni si ricava:

$$\binom{n}{0} \binom{n+r}{n} - \binom{n}{1} \binom{n+r+1}{n} + \binom{n}{2} \binom{n+r+2}{n} - \binom{n}{3} \binom{n+r+3}{n} + \dots = \pm 1. \quad (17)$$

Si ottengono altre relazioni sostituendo nella (8) a $\frac{w}{v}$ un numero intero e positivo diverso da n .

Se nella (12) si pone $\frac{w}{v} = 1$ e si divide l'equazione per $q!$, risulta:

$$\binom{q}{0} \binom{q}{0} - \binom{q}{1} \binom{q+1}{1} + \binom{q}{2} \binom{q+2}{2} - \binom{q}{3} \binom{q+3}{3} + \dots = \pm \binom{q}{0}. \quad (18)$$

In generale;

$$\binom{q-l}{0} \binom{q}{0} - \binom{q-l}{1} \binom{q+1}{1} + \binom{q-l}{2} \binom{q+2}{2} - \binom{q-l}{3} \binom{q+3}{3} + \dots = \pm \binom{q}{l}. \quad (19)$$

Se nella (17) si tiene costante la base dei numeri figurati, mentre gli indici variano, si ottiene:

$$\binom{n}{0}\binom{n+r}{m}-\binom{n}{1}\binom{n+r+1}{m}+\binom{n}{2}\binom{n+r+2}{m}-\binom{n}{3}\binom{n+r+3}{m}+\dots=\pm\binom{n+r}{m-n} \quad (20)$$

Ponendo ora nella (13) $\frac{w}{v}=1$ e dividendo per $q!$ si ricava come caso particolare della (19):

$$\binom{q-1}{0}\binom{q}{0}-\binom{q-1}{1}\binom{q+1}{1}+\binom{q-1}{2}\binom{q+2}{2}-\binom{q-1}{3}\binom{q+3}{3}+\dots=\pm(q)_1,$$

e in generale:

$$\binom{q-t}{0}\binom{q}{q}-\binom{q-t}{1}\binom{q+1}{q}+\binom{q-t}{2}\binom{q+2}{q}-\binom{q-t}{3}\binom{q+3}{q}+\dots=\pm(q)_t.$$

All'incontro è chiaro che:

$$\binom{q+t}{0}\binom{q}{q}-\binom{q+t}{1}\binom{q+1}{q}+\binom{q+t}{2}\binom{q+2}{q}-\binom{q+t}{3}\binom{q+3}{q}+\dots=0.$$

Colla trasposizione dei coefficienti si ricava nuovamente dalla (19):

$$\binom{q-t}{0}\binom{q+u}{q}-\binom{q-t}{1}\binom{q+u+1}{q}+\binom{q-t}{2}\binom{q+u+2}{q}-\dots=\pm\binom{q+u}{t}$$

relazione che è essenzialmente identica colla (20).

Sostituendo in fine nella (14) $\frac{w}{v}$ eguale a un numero intero qualunque x , viene, dopo aver divisa l'equazione per $m!$,

$$\binom{p}{0}\binom{n+x-1}{m}-\binom{p}{1}\binom{n+x}{m}+\binom{p}{2}\binom{n+x+1}{m}-\dots=0,$$

colla condizione di $p > m$. D'altronde questa relazione non è che un caso particolare della (20).