ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 465.

Bemerkungen und Untersuchungen über Pendeluhrn. Von Herrn Geheimen-Rath und Ritter *Bessel*.

Die Vervollkommnung der Pendeluhrn ist mit einem Aufwande von Scharfsinn und Kunst gesucht worden, welcher durch den Nutzen derselben für die Astronomie gerechtfertigt wird, dessen Erfolg auch so groß gewesen ist, daß er kaum noch etwas zu wünschen übrig läßt. Indem dennoch auch die berühmtesten Künstler der jetzigen Zeit, unter welchen ich die Herren *Breguet, Dent, Frodsham, Kessels, Tiede, Winckler* nenne, ihre Bemühungen, den Pendeluhrn einen wachsenden Grad von Vollendung zu geben, fortsetzen, scheinen sie ihren noch gleichmäßigeren Gang für erreichbar zu halten. Dieses hat mich aufgefordert, verschiedene, diese Instrumente angehende Gegenstände einer näheren Betrachtung zu unterwerfen, deren Resultate ich hier mittheile, weil ich glaube, daß ihre Kenntniß der Sache selbst und den vortrefflichen Künstlern, welche ihr ihre Anstrengungen widmen, von einigem Nutzen sein kann.

1.

Da jede Ungleichmäßigkeit der Schwingungszeit des Pendels unmittelbar auf den Gang der Uhr übergeht, so muß gefordert werden, daß das Pendel, unabhängig von dem Uhrwerke, unter allen Umständen in welche es bei seiner Anwendung in der Uhr gelangt, *so nahe gleichzeitige Schwingungen mache, als möglich ist*. Das Uhrwerk soll den Verlust ersetzen, welchen die Ausdehnung der Schwingungen des Pendels durch den Widerstand der Luft erfährt; es soll ferner diese Schwingungen hörbar machen und sie zählen: es ist für desto vollkommener zu halten, *je weniger es, indem es diese Zwecke erfüllt, die Schwingungszeiten des freien Pendels ändert*. Das Bestreben, Ungleichheiten dieser Schwingungszeiten durch Einwirkungen des Uhrwerkes auszugleichen, halte ich nicht allein für fruchtlos, sondern auch für nachtheilig; das letztere, weil es von dem wahren Ziele ablenkt. Indem ich aber den Erfolg fernerer Schritte zur Vervollkommnung der Uhren von der *abgesonderten* Untersuchung ihrer beiden wesentlichen Theile erwarte, muß ich zuerst eine Methode angeben, durch welche die Schwingungszeiten des Pendels allein, und dann die Größe des Einflusses des Uhrwerkes auf sie, nicht allein mit der erforderlichen Sicherheit, sondern auch leicht und schnell, *beobachtet* werden können.

Dieses ist die *Methode der Coincidenzen* des zu untersuchenden Pendels mit dem Pendel einer im Gange befindlichen astronomischen Uhr, welche Methode in diesem Falle so angewandt werden muß, wie ich sie bei meinen Versuchen über die Länge des einfachen Secundenpendels angewandt und im 5^{ten} § meiner, unter den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften gedruckten Abhandlung beschrieben habe. Ich setze demgemäß das zu untersuchende Pendel an der Mauer aufgehängt voraus; vor demselben, in 6 bis 8 Fuß Entfernung die Uhr so aufgestellt, daß die gerade Linie zwischen den unteren Enden beider Pendel und ihre Verlängerung über das der Uhr hinaus, frei ist, daß also beide Pendelenden von einem Punkte dieser Verlängerung gesehen werden können; ferner das Objectiv eines Fernrohrs, dessen Brennweite etwas kürzer ist als ein Viertel der Entfernung beider Pendel, zwischen ihnen so aufgestellt, daß das dadurch gemachte Bild des einen in die Ebene fällt, in welcher das andere sich bewegt; endlich das zur Wahrnehmung der Coincidenzen erforderliche Fernrohr an einem beliebigen Punkte der Verlängerung der beide verbindenden geraden Linie aufgestellt. Durch die häufigen Anwendungen dieser Art, die Coincidenzen beider Pendel zu beobachten, welche ich und Andere gemacht haben, ist bekannt geworden, daß sie so genaue Beobachtungen gewährt, daß dadurch der relative tägliche Gang beider Pendel schon in kurzer Zeit (z. B. 10 bis 20') bis auf wenige Zehntel einer Secunde sicher bestimmt wird.

Die Einrichtung zu Versuchen dieser Art ist unerlässlich, wenn die Schwingungszeit des zu untersuchenden Pendels, unter verschiedenen äußeren Verhältnissen, *rein*, d. h. ohne alle Einwirkung des Uhrwerkes, untersucht werden soll. Ich zweifle nicht, daß aus dem Folgenden hervorgehen wird, daß sie ein wesentlicher Theil des Apparats ist, womit jeder Künstler, der die möglichst große Vollendung einer Pendeluhr beabsichtigt, sich versehen muß.

2.

Zuerst ist das in einer Uhr anzuwendende Pendel so zu berichtigen, daß es in *jeder Wärme der Luft*, in gleichen Winkeln gleichzeitige Schwingungen macht. Die beschriebene Einrichtung wird zu diesem Zwecke dienen, wenn dem Raume,

in welchem das Pendel schwingt, in kurzer Zwischenzeit beträchtlich verschiedene Wärme gegeben werden kann. Dieses kann erlangt werden, wenn die Vorrichtung, an welcher das Pendel, genau so wie später in der Uhr, aufgehängt wird, nicht unmittelbar an der Mauer, sondern in einem Kasten von Holz befestigt ist, dessen Inneres durch einige, an seinen Wänden hinabgehende, durch Dampf oder heisses Wasser zu heizende Röhren erwärmt wird. Die Gleichmässigkeit der Wärme im Inneren dieses Kastens wird befördert werden, wenn er doppelte Wände, nämlich ausser den äusseren von Holz noch innere von Metall erhält und wenn die Heizungs- röhren zwischen beiden liegen. Im Falle Wasser zur Erwärmung angewandt wird, muss am oberen Ende der Röhren ein fortwährender Zufluss desselben, am unteren ein gleich starker Abfluss stattfinden. Einige verglasete Oeffnungen werden im Inneren befindliche Thermometer sichtbar machen, also zur Kenntniss der daselbst stattfindenden Wärme und zur Beurtheilung ihrer Gleichmässigkeit führen. Eine solche Oeffnung am unteren Ende des Kastens, macht das schwingende Pendel, also auch seine Coincidenzen und Schwingungswinkel sichtbar. Um den Niederschlag von Wasser an der inneren Fläche der Gläser zu vermeiden, muss die Luft im Kasten, durch eins der gewöhnlichen Mittel ausgetrocknet werden.

Indem man das Pendel sowohl im nicht erwärmten, als auch im erwärmten Raume schwingen lässt und seine Schwingungszeiten (wenn sie nicht in gleichen Schwingungswinkeln beobachtet sein sollten, nach gehöriger Reduction) vergleicht, erkennt man, ob eine Verbesserung der Compensation erforderlich ist oder nicht. Im ersten Falle wird man den Versuch, nach ihrer vorgenommenen Aenderung, wiederholen und damit so lange fortfahren, bis der zweite Fall herbeigeführt ist. Diese Berichtigung wird am besten in der kälteren Jahreszeit vorgenommen werden.

3.

Der Erfolg einer solchen Berichtigung der Compensation des Pendels gleicht offenbar auch die Theile des Einflusses der Wärme aus, welche aus den von ihr abhängigen Veränderungen der Dichtigkeit der das Pendel umgebenden Luft und der Elasticität der Feder woran es aufgehängt ist, entstehen. In Beziehung auf das Verhalten des Pendels in der verschiedenen Wärme, in welche es während seines Gebrauches in der Uhr gelangt, ist also dieser Erfolg *vollständig*; während die Construction des Pendels nach einer Rechnung, welche auf der (bei weitem nicht so leicht und sicher zu erlangenden) Kenntniss der Grösse der Einwirkungen der Wärme auf die verschiedenen, in der Compensation angewandten Metalle beruht, nur einen unvollständigen gewährt. Durch Queck-

silber compensirte Pendel sind, wenigstens in einigen Fällen, nach ihrer Anwendung in der Uhr, so geändert worden, dass der Gang im Sommer und Winter gleich wurde; auch rostförmige oder andere Pendel pflegen so eingerichtet zu sein, dass ihre Compensation geändert werden kann. Was in allen diesen Fällen erlangt werden soll, ist *auch* der vollständige Erfolg; aber da nicht allein die Compensation, sondern auch das Uhrwerk, in beiden Jahreszeiten verschiedenen Einfluss auf den Gang der Uhr erlangen kann, so wird der Erfolg auf diese Art weniger sicher herbeigeführt. Die von mir empfohlene Methode ist also nicht allein viel leichter und in viel kürzerer Zeit auszuführen, sondern auch sicherer.

Bei dieser Gelegenheit muss ich ein Bedenken gegen die, in neuerer Zeit häufig angewandte Compensation durch Quecksilber äussern. Sie würde, so wie sie die einfachste ist, auch die empfehlenswertheste sein, wenn mit Recht angenommen werden könnte, dass die ganze Länge der Pendelstange sich immer in gleicher Wärme befände. Dieses ist aber oft nicht der Fall, wie zwei Thermometer, das eine unten, das andere oben im Uhrkasten angebracht, zeigen. Die ungleich warme Pendelstange erfährt die Compensation, welche die rechte sein würde, wenn sie durchweg die Wärme des unteren Endes, wo das Quecksilber sich befindet, besäße, welche aber im Falle einer unten und oben stattfindenden Wärmeverschiedenheit nicht mehr die rechte ist. Die Compensation wird daher vollkommener, wenn sie der ganzen Länge des Pendels nach wirkt. Dieses ist bei der rostförmigen desto näher der Fall, je näher unter dem Aufhängungspunkte sie anfängt und je näher am Mittelpunkt der Schwingung sie aufhört.

Zu diesem Vorzuge der rostförmigen Compensation gesellt sich ein anderer, nämlich die Schnelligkeit, mit welcher sie sich Aenderungen der Wärme fügt; während eine beträchtliche Zeit verstreichen muss, ehe die erforderliche grosse Masse Quecksilbers die Wärme der umgebenden Luft annimmt. Aus demselben Grunde ziehe ich auch die Zusammensetzung des Pendels aus Messing- und Stahlstangen von gleicher Dicke, seiner Zusammensetzung aus ungleich dicken Zink- und Stahlstangen vor. Wenn man die Berücksichtigung der Gleichzeitigkeit der Einwirkung der Wärmeänderungen auf alle zur Compensation gehörigen Theile so weit als möglich treiben will, so muss man auch für gleiche Beschaffenheit der Oberfläche der Stangen sorgen; was durch dasselbe Verfahren geschehen kann; wodurch der hochberühmte *Dent* die Spiralen seiner Chronometer mit Gold bekleidet. Die Anwendung dieses Verfahrens auch auf die Linse des Pendels, wird für Die Reiz haben, welche einem dauerhaft schönen Aeusseren Werth beilegen. Wesentlicher, oder eigentlich *sehr wesentlich*, ist aber die allergrösste Sorgfalt und Umsicht in der Verfertigung des

Pendels, welche hervorbringen mufs, dafs unter allen Umständen keine, die Wirkung der Compensation beeinträchtigende Spannung oder Reibung entstehen kann. Ich halte diese letzte Bemerkung nicht für überflüssig, weil mir Uhren vorgekommen sind, deren Pendel aus den Händen eines Anfängers hervorgegangen erschien, während ihr Räderwerk die Arbeit des Meisters verrieth.

4.

Durch die Berichtigung eines Pendels in Beziehung auf die Wärme, werden die Schwingungszeiten desselben (in gleichen Winkeln) noch nicht jederzeit gleichzeitig, indem die, den Veränderungen des Barometerstandes entsprechenden Veränderungen der Dichtigkeit der Luft Einfluß darauf erhalten. Eine Gegenwirkung gegen diesen Einfluß kann erlangt werden, indem eine mit der geeigneten Masse Quecksilbers gefüllte Barometerröhre an dem Pendel befestigt wird. Die Theorie davon werde ich hier mittheilen.

Aus meinen *Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels* weiß man, dafs ein Pendel sich in der Luft bewegt, wie ein einfaches im leeren Raume, dessen Länge

$$l = \frac{m(\mu + ss) + Km'}{ms - m's'}$$

ist, wo m, m' die Massen des Pendels und der dadurch verdrängten Luft, s, s' die Entfernungen der Schwerpunkte des Pendels und seines Raumes vom Aufhängungspunkte, $m(\mu + ss)$ das auf diesen bezogene Moment der Trägheit und K einen unbekannten Coefficienten bedeuten. Dieser Ausdruck kann

$$l = \frac{m(\mu + ss)}{ms} \cdot \frac{1 + \frac{K}{\mu + ss} \frac{m'}{m}}{1 - \frac{s'}{s} \frac{m'}{m}}$$

und wenn man

$$k = \frac{K}{\mu + ss}$$

annimmt, auch $s' = s$ setzt, was ohne in Betracht kommenden Fehler geschehen kann, in der ersten Potenz der kleinen Größe $\frac{m'}{m}$ richtig,

$$l = \frac{m(\mu + ss)}{ms} \left[1 + (1+k) \frac{m'}{m} \right]$$

geschrieben werden. Wenn das Pendel bei verschiedenen Barometerständen, b und $b + \delta b$, gleichzeitig schwingen soll, so mufs also dieser Ausdruck δb unabhängig sein, oder die Veränderung, welche

$$(\odot) \dots \dots l \cdot ms - m(\mu + ss) - ls(1+k)m'$$

durch diese Veränderung des Barometerstandes erfährt, mufs verschwinden.

Wenn die Entfernungen des Quecksilbers im unteren und oberen Schenkel des Barometers von dem Aufhängungspunkte, bei dem Barometerstande b , durch h und $h-b$ bezeichnet werden, die Halbmesser dieser Schenkel durch a und a' , die Masse einer Cubikeinheit des Quecksilbers durch q , so ist die Masse, welche durch die Veränderung des Barometerstandes von dem unteren Schenkel in den oberen übergeht,

$$= \pi \frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} q \delta b$$

und die daraus entstehenden Veränderungen sind

$$\delta \cdot ms = -\pi \frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} q \delta b \cdot b$$

$$\delta \cdot m(\mu + ss) = -\pi \frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} q \delta b \cdot b(2h - b).$$

Die Veränderung, welche m' durch dieselbe Ursache erfährt, ist

$$\delta m' = m' \frac{\delta b}{b}$$

und wenn die Dichtigkeiten des Pendels und der Luft durch Δ und Δ' bezeichnet werden:

$$\delta m' = m \frac{\Delta'}{\Delta} \frac{\delta b}{b}.$$

Der Ausdruck der Veränderung von $(\odot)$ ist daher:

$$\pi \frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} q \delta b \cdot b(2h - b - l) - ls(1+k)m \frac{\Delta'}{\Delta} \frac{\delta b}{b}$$

und die Bedingung seines Verschwindens ergibt:

$$\frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} = \frac{mls(1+k)\Delta'}{\pi q bb(2h - b - l)\Delta}.$$

Nimmt man die Pariser Linie als Einheit des Längenmaafses an, das specifische Gewicht des Quecksilbers $= 13,6$, das Gewicht einer Cubiklinie des dichtesten Wassers $= 0,1884961$ Preussische Gran *), so wird

$$q = 2,563547.$$

Der Werth von Δ' ist bei der Barometerhöhe von $336^{\text{L}}905$ und in der Wärme des gefrierenden Wassers **)

$$\Delta' = \frac{1}{770,488}$$

Die Länge des einfachen Secundenpendels in Königsberg ist $= 440^{\text{L}}81$, und dieses ist, wenn das Uhrpendel mittlere Sekunden schwingen soll, auch der Werth von l . Nimmt man $b = 336^{\text{L}}905$, $m = 15$ Pfund $= 115200$ Gran, in welchem Gewichte zwei Uhrpendel, die ich gewogen habe, ziemlich nahe übereinkamen; das specifische Gewicht des Pendels $\Delta = 10$, was auch ziemlich nahe das gewöhnliche sein wird; setzt man endlich $h = l$, oder nimmt man die Barometerröhre so

*) Unters. über die Länge des einfachen Secundenpendels S. 130.

**) ebendasselbst S. 39.

am Pendel befestigt an, daß die untere Quecksilberfläche sich in seinem Mittelpunkte der Schwingung befindet, welcher ihr vortheilhaftester Ort ist, so erhält man:

$$\frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} = 0,03059 \cdot \frac{s}{l} (1 + k).$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommenden s und k hängen von der Construction des Pendels ab; das erstere ist für jedes Pendel, dessen Construction gegeben ist, bekannt und stets etwas kleiner als l ; das andere müßte, durch besondere Experimente über die Gröfse der Einwirkung der Luft auf die Schwingungszeiten des Pendels, bestimmt werden, scheint aber auf etwa $= 1$ geschätzt werden zu können. Nimmt man diesen Werth an und vernachlässigt man die Verschiedenheit von $\frac{s}{l}$ und 1, so erhält man

$$\frac{a^2 a'^2}{a^2 + a'^2} = 0,06118.$$

Nimmt man a viel gröfser an als a' , oder wendet man eine mit einem *Gefäfse* versehene Barometerröhre an, welche am vortheilhaftesten ist, weil sie die untere Quecksilberfläche stets sehr nahe am Mittelpunkte der Schwingung erhält und daher ihren Veränderungen kaum einen Einfluß auf die Schwingungszeit verstattet, so folgt aus dieser Rechnung

$$a' = 0^{\text{u}} 2474.$$

Hieraus geht hervor, daß eine sehr wenig Quecksilber zu ihrer Füllung bedürfende Barometerröhre, von kaum einer halben Linie innerer Weite, hinreicht, den kleinen Einfluß auszugleichen, welchen die Veränderlichkeit des Barometerstandes auf die Schwingungszeiten des Pendels äußert. Diese Weite wird man für jeden besonderen Fall bestimmen, indem man die ihm zugehörigen Werthe der in ihrem Ausdrucke vorkommenden Gröfßen anwendet. Zwar sollte der Werth von k eigentlich für jeden besonderen Fall aufgesucht werden, was unter der Glocke einer Luftpumpe, welche Herr *Baily* schon zu ähnlichen Zwecken angewandt hat, am leichtesten geschehen würde; allein es ist wahrscheinlich, daß schon die Annahme $k = 1$, indem sie sich der Bestimmung nähert, welche Herr *Baily* für den nicht so sehr verschiedenen Fall des Katerschen Pendels erhalten hat, hinreicht, wenigstens den gröfsten Theil des Einflusses des Barometerstandes auszugleichen.

Will man diesen Einfluß nicht vernachlässigen, sondern die Barometerröhre zu seiner Ausgleichung anwenden, so wird diese ihren schicklichsten Platz wohl in der Mitte sämtlicher Compensationsstangen (deren Zahl dann gerade wird) erhalten *); das kleine Gefäß, von höchstens 8 Lin. innerer Weite,

wird in der Pendellinse seinen Platz erhalten. Den Annahmen zufolge, welche der obigen Rechnung zum Grunde liegen, ändert jede Linie der Barometervariation den täglichen Gang der Uhr um $0^{\text{u}} 03328$, so daß Fälle, in welchen der Einfluß des Barometerstandes über zwei Zehntel einer Secunde steigt, schon zu den selteneren gehören. Daß, im Falle der Anbringung des Barometers am Pendel, seine Berichtigung für die Wärme (§ 2) auf diese Anbringung *folgen* muß, braucht kaum erwähnt zu werden.

5.

Das auf die jetzt beschriebene Art eingerichtete und berichtigte Pendel wird nur dann stets gleichzeitig schwingen, wenn sein Schwingungswinkel stets in gleicher Gröfse erhalten wird. Dieses kann durch das Uhrwerk nur unvollkommen bewirkt werden, indem die Gröfse des Verlusts, welchen die Schwingungswinkel durch den Widerstand der Luft erfahren, von ihrer, mit den Barometer- und Thermometerständen veränderlichen Dichtigkeit abhängig ist und daher selbst von einer unveränderlichen Kraft des Uhrwerks nicht stets vollständig ersetzt werden kann; noch weniger also von einem Uhrwerke, dessen Kraft mit dem veränderlichen Zustande der Flüssigkeit des Oels veränderlich, und zwar zur Zeit des Winters, wenn die dichtere Luft einen stärkeren Ersatz fordert, gerade am kleinsten ist. Ich werde hier die Maxima und Minima des Schwingungswinkels mittheilen, welche die von Herrn *Kessels* gemachte Uhr der Königsberger Sternwarte, seit dem August 1840, wo sie gereinigt und mit sehr gutem Oele versehen wurde, gezeigt hat: Sept. 1840 $= 1^{\circ} 38'$ auf jeder Seite der Lothlinie; Febr. 1841, bei heftiger Kälte, $= 1^{\circ} 25'$; Juni 1841 $= 1^{\circ} 39'$; März 1842, während eines ausgezeichnet gelinden Winters, $= 1^{\circ} 32'$; August 1842 $= 1^{\circ} 39'$. Frühere, an derselben Uhr gemachte Erfahrungen ähnlicher Art zeigen gröfsere Unterschiede, was aber, da die Uhr selbst keine Aenderung erfahren hat, nur weniger gutem Oele zugeschrieben werden kann, also als vermeidlich betrachtet werden muß. Die Hemmung dieser Uhr ist der *Grahamsche* Haken; wenn eine andere, von der Flüssigkeit des Oels weniger abhängige, *wirklich* vorhanden sein sollte, so würde sie doch, aus dem schon angeführten Grunde, eine Gleichheit des Schwingungswinkels in allen Jahreszeiten nicht hervorbringen können. Die der Verminderung des beobachteten gröfsten Schwingungswinkels von $1^{\circ} 39'$, auf resp. $1^{\circ} 32'$ und $1^{\circ} 25'$ entsprechenden täglichen Beschleunigungen des Ganges der Uhr sind $= 0^{\text{u}} 61$ und $1^{\text{u}} 18$.

Indem die Hervorbringung eines stets gleichen Schwingungswinkels aufer den Gränzen der Kunst liegt, würde ein Pendel höchst wünschenswerth sein, welches, in Folge seiner eigenen Einrichtung, gröfsere und kleinere Schwingungen

*) Wendet man Röhren, statt voller Stangen an, so wird das Barometer in der mittleren angebracht werden.

gleichzeitig vollendete. Eine am 21^{sten} Juni 1838 von Herrn *W. J. Frodsham* der Royal Society vorgelesene Abhandlung mußte daher das größte Interesse erregen, indem ihr Resultat war, daß eine Feder von *bestimmter Länge und Stärke*, wenn das Pendel daran aufgehängt wird, seinen Isochronismus hervorbringe; dieses ergaben die Versuche in so großer Ausdehnung, daß der Schwingungswinkel, durch Vermehrung des die Uhr treibenden Gewichts bis fast auf das Doppelte, einmal von 1° 30' auf 2° 9', ein andermal von 1° 39' auf 2° 15' gebracht wurde, ohne daß dieses Einfluß auf den Gang der Uhr geäußert hätte; welcher Einfluß, ohne Gegenwirkung, resp. 3^u84 und 3^u90 täglich betragen haben würde. Eine dieses leistende Erfindung ist gerade die, die gemacht werden muß, damit die astronomischen Uhren auf den höchsten Grad der Vollendung gebracht werden können. Kein Name konnte ihr größeres Zutrauen erwerben, als die des Künstlers, dessen Chronometer, durch die Unveränderlichkeit ihres Ganges, den höchsten Ruhm erworben haben.

Indessen haben nicht minder berühmte Künstler, die Herren *John Dent* in London, *Winnert* in Paris und *Tiede* in Berlin, nicht unterlassen, die *Frodshamsche* Erfindung auch zu versuchen, allein, den mündlichen Mittheilungen zufolge, welche sie mir darüber zu machen die Güte gehabt haben, nicht gleichen Erfolg erhalten. Aber weder die früheren Versuche, noch die zu einem anderen Resultate führenden späteren, sind mit dem *abgesonderten* Pendel (§ 1) gemacht worden und lassen daher die Möglichkeit bestehen, daß die Verschiedenheit ihrer Resultate durch Störungen der freien Bewegung des Pendels erklärt werden könne, welche aus dem Einflusse des Uhrwerks hervorgegangen und in den verschiedenen Fällen verschieden gewesen sein mögen. Bei dieser Lage der Sache habe ich für angemessen gehalten, die *Theorie* der Bewegung eines, an einer Feder aufgehängten Pendels zu untersuchen. Das Resultat davon werde ich im folgenden Art. mittheilen.

6.

Wenn man den Aufhängungspunkt des Pendels zum Mittelpunkt der Coordinatenachsen der x und y macht und die erstere derselben lothrecht, die andere wagerecht annimmt, so ist das Product der von jedem Massentheilchen dm , dessen Coordinaten, zur unbestimmten Zeit t , x und y sind, während

$$\begin{aligned} & \delta a \int dm \left[\frac{d^2 a}{dt^2} - (x-a) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - (y-b) \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \right] \\ & + \delta b \int dm \left[\frac{d^2 b}{dt^2} - (y-b) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + (x-a) \frac{d^2 u}{dt^2} \right] \\ & + \delta u \int dm \left[- (y-b) \frac{d^2 a}{dt^2} + (x-a) \frac{d^2 b}{dt^2} + ((x-a)^2 + (y-b)^2) \frac{d^2 u}{dt^2} + \pi^2 \lambda (y-b) \right] \end{aligned}$$

der Zeit dt verlorenen Kraft und der Projection seiner willkürlichen Bewegung, auf ihre Richtung

$$dm \left[\frac{d^2 x}{dt^2} - \pi^2 \lambda \right] \delta x + dm \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y,$$

wo π die gewöhnliche Bedeutung dieses Zeichens hat und λ die Länge des einfachen Secundenpendels ist. Wenn das Pendel an einer Feder (von unbedeutender Masse) aufgehängt ist, deren aus ihrer Krümmung an einem Punkte dessen Coordinaten x' , y' sind, hervorgehende Kraft E , ihren daselbst stattfindenden Winkel ϕ mit der Lothlinie zu vermindern sucht, so ist das ähnliche Product für jedes ihrer Elemente:

$$= \pi^2 \lambda E \delta \phi.$$

Die Summe aller dieser Producte für das ganze Pendel, deren Verschwinden die Bedingung ist, aus welcher die Differentialgleichungen seiner Bewegung hervorgehen, ist daher:

$$0 = \int dm \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y \right] - \pi^2 \lambda \int [dm \delta x - E \delta \phi] \dots (1)$$

Indem den durch das Zeichen δ angedeuteten willkürlichen Veränderungen nur Werthe gegeben werden dürfen, welche mit der Verbindung unter den Theilen des bewegten Systems vereinbar sind, müssen die in (1) anzunehmenden dieser Bedingung gemäß beschränkt werden. Die Lage des festen Theils des Pendels im Raume wird durch die Coordinaten a , b des Endpunkts der ihn haltenden Feder und durch den Winkel u , welchen die in der Ruhe des Pendels lothrechte, durch den Endpunkt der Feder gehende Linie, in einer anderen Lage mit der Lothlinie macht, gegeben. Wenn die auf diese und eine zweite, sie im Endpunkte der Feder senkrecht durchschneidende Axe bezogenen Coordinaten eines Massentheilchens dm durch ξ , η bezeichnet werden, so sind

$$x = a + \xi \cos u - \eta \sin u$$

$$y = b + \xi \sin u + \eta \cos u$$

also

$$\delta x = \delta a - (y-b) \delta u$$

$$\delta y = \delta b + (x-a) \delta u$$

und

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 a}{dt^2} - (x-a) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - (y-b) \frac{d^2 u}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 b}{dt^2} - (y-b) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - (x-a) \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in (1) werden die sich auf den festen Theil des Pendels beziehenden Glieder

und wenn die Entfernung des Schwerpunkts des Pendels von dem Endpunkte der Feder durch s , sein auf diesen Punkt bezogenes Moment der Trägheit durch $m(\mu + ss)$ bezeichnet, also

$$(A) \dots \left\{ \begin{aligned} & m \delta a \left[\frac{d^2 a}{dt^2} - s \cos u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - s \sin u \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \right] \\ & + m \delta b \left[\frac{d^2 b}{dt^2} - s \sin u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + s \cos u \frac{d^2 u}{dt^2} \right] \\ & + m \delta u \left[-s \sin u \frac{d^2 a}{dt^2} + s \cos u \frac{d^2 b}{dt^2} + (\mu + ss) \frac{d^2 u}{dt^2} + \pi^2 \lambda \cdot s \sin u \right] \end{aligned} \right.$$

Das sich auf die Feder beziehende Glied der Gleichung (1), nämlich

$$\pi^2 \lambda \int E d\delta\varphi,$$

kann

$$\pi^2 \lambda [E \delta\varphi - \int \delta\varphi dE]$$

und nach der Substitution des Ausdrucks von

$$(B) \dots \pi^2 \lambda \left[E \delta\varphi + \delta x' \cdot \frac{dE dy'}{d\sigma^2} - \delta y' \cdot \frac{dE dx'}{d\sigma^2} - \int \delta x' \cdot d \frac{dE dy'}{d\sigma^2} + \int \delta y' \cdot d \frac{dE dx'}{d\sigma^2} \right]$$

geschrieben werden. Indessen sind $\delta x'$ und $\delta y'$, also auch ihre Werthe für den Endpunkt der Feder δa und δb , nicht von einander unabhängige willkürliche Aenderungen, sondern durch die Bedingung verbunden, daß die Variation der Länge der Feder, von ihrem Anfangspunkte bis zu jedem ihrer übrigen Punkte, verschwinde, oder daß

$$\int \left(\frac{dx'}{d\sigma} d\delta x' + \frac{dy'}{d\sigma} d\delta y' \right) = 0$$

sei. Demohngeachtet kann man sie als unabhängig von einander betrachten, wenn man ihre Abhängigkeit dadurch in Rechnung bringt, daß man der Gleichung (1)

$$\int \omega \left(\frac{dx'}{d\sigma} d\delta x' + \frac{dy'}{d\sigma} d\delta y' \right)$$

wo ω einen unbestimmten Factor bedeutet, oder

$$(C) \dots \delta x' \cdot \omega \frac{dx'}{d\sigma} + \delta y' \cdot \omega \frac{dy'}{d\sigma} - \int \delta x' \cdot d \cdot \omega \frac{dx'}{d\sigma} - \int \delta y' \cdot d \cdot \omega \frac{dy'}{d\sigma}$$

hinzugefügt. Man hat also den Gliedern A die Summe von B und C , oder

$$\pi^2 \lambda \left[E \delta\varphi + \delta x' \left(\frac{dE dy'}{d\sigma^2} + \omega \frac{dx'}{d\sigma} \right) - \delta y' \left(\frac{dE dx'}{d\sigma^2} - \omega \frac{dy'}{d\sigma} \right) - \int \delta x' \cdot d \left(\frac{dE dy'}{d\sigma^2} + \omega \frac{dx'}{d\sigma} \right) + \int \delta y' \cdot d \left(\frac{dE dx'}{d\sigma^2} - \omega \frac{dy'}{d\sigma} \right) \right]$$

hinzusetzen. Da die Summe aller drei Theile, der Gleichung (1) zufolge, verschwinden muß, und $\delta x'$, $\delta y'$ als willkürlich angesehen werden müssen, so müssen die noch unter

$$(3) \dots \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 a}{dt^2} - s \cos u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - s \sin u \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \left(1 - \frac{c}{m} \right) \\ 0 &= \frac{d^2 b}{dt^2} - s \sin u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + s \cos u \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \frac{c'}{m} \\ 0 &= -s \sin u \frac{d^2 a}{dt^2} + s \cos u \frac{d^2 b}{dt^2} + (\mu + ss) \frac{d^2 u}{dt^2} + \pi^2 \lambda \left(s \sin u + \frac{cb + c'a + c''}{m} \right) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \int dm(x-a) &= ms \cos u \\ \int dm(y-a) &= ms \sin u \\ \int dm((x-a)^2 + (y-b)^2) &= m(\mu + ss) \end{aligned}$$

gesetzt werden:

$$\delta\varphi = \frac{dx' d\delta y' - dy' d\delta x'}{d\sigma^2}$$

worin x' und y' die Coordinaten eines Punktes der Feder und σ ihre vom Anfangspunkte bis zu diesem Punkte gezählte Länge bedeuten,

den Integralzeichen stehenden Glieder verschwinden, wodurch man:

$$0 = d \left(\frac{dE dy'}{d\sigma^2} + \omega \frac{dx'}{d\sigma} \right)$$

$$0 = d \left(\frac{dE dx'}{d\sigma^2} - \omega \frac{dy'}{d\sigma} \right)$$

und, wenn c und c' willkürliche Constanten bedeuten:

$$c = \frac{dE dy'}{d\sigma^2} + \omega \frac{dx'}{d\sigma}$$

$$c' = \frac{dE dx'}{d\sigma^2} - \omega \frac{dy'}{d\sigma}$$

also auch

$$dE = c dy' + c' dx'$$

$$E = cy' + c'x' + c'' \dots \dots \dots (2)$$

erhält. Hierdurch reducirt sich die Summe von B und C auf:

$$\pi^2 \lambda [E \delta\varphi + c \delta x' - c' \delta y'].$$

Für den Anfang der Feder verschwinden $\delta x'$ und $\delta y'$, weil dieser Punkt fest ist, $\delta\varphi$ weil die Feder hier fest eingeklemmt ist: für ihr Ende wird der eben gefundene Ausdruck

$$\pi^2 \lambda [(cb + c'a + c'') du + c \delta a - c' \delta b]$$

und dieser zu A hinzugesetzt, ergiebt die vollständige Gleichung (1). Indem aber δa , δb , δu in der Rechnung als unabhängig zu betrachten sind, muß das was in jede dieser Variationen multiplicirt ist, verschwinden, wodurch man folgende drei Differentialgleichungen erhält:

In diesen Gleichungen kommen sechs von der Zeit abhängige Größen vor, nämlich a, b, u und c, c', c'' , welche letzteren, beziehungsweise auf die Figur der Feder in jedem Augenblicke, Constanten sind. Es müssen also noch drei Gleichungen aufgesucht werden. Die Kraft E wird dem Krümmungshalbmesser der Feder umgekehrt proportional angenommen, wodurch, wenn ε das ihr zugehörige Maass der Federkraft bedeutet, (2) sich in

$$(4) \dots \frac{\varepsilon dx' d^2 y'}{\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)^3}} = cy' + c'x' + c''$$

verwandelt. Multiplicirt man diese Gleichung mit $c dy' + c' dx'$, integrirt man dann und bezeichnet man durch f eine willkürliche Constante, so erhält man

$$(5) \dots \varepsilon \frac{c' dy' - c dx'}{\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)}} = f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2$$

statt welcher Gleichung auch

$$(6) \dots c' dy' - c dx' = \frac{\pm (c dy' + c' dx') \{f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2\}}{\sqrt{[\varepsilon(cc + c'c') - (f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2)^2]}}$$

geschrieben werden kann. Setzt man statt der links vom Gleichheitszeichen stehenden GröÙe ihren Ausdruck (5), so erhält man auch:

$$(7) \dots d\sigma = \frac{\pm \varepsilon (c dy' + c' dx')}{\sqrt{[\varepsilon(cc + c'c') - (f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2)^2]}}$$

Das in diesem Ausdrucke, und also auch in dem vorigen, anzunehmende Zeichen ist das untere, weil $c dy' + c' dx' = dE$ ist und E abnimmt wenn σ wächst. Das vom Anfange der Feder bis zu ihrem Ende genommene Integral von (6) ergibt eine Relation zwischen a, b, c, c', c'', f ; das eben so genommene von (7) drückt das gegebene σ — die ganze Länge der

Feder — durch dieselben Größen aus. Die Anwendung von (5) auf den Anfang und das Ende der Feder, nämlich

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon c &= f + \frac{1}{2}c''c'' \\ \varepsilon(c' \sin u - c \cos u &= f + \frac{1}{2}(cb + c'a + c'')^2 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ergibt endlich noch zwei Gleichungen zwischen ihnen. Durch diese vier Gleichungen und die drei Differentialgleichungen (3) sind die sieben von der Zeit abhängigen Größen u, a, b, c, c', c'', f bestimmt.

In dem Falle eines kleinen Werthes von ε , dessen niedrigste Dimension man nur berücksichtigen will, hat auch die Durchführung der hier geforderten Rechnung keine wesentliche Schwierigkeit. Statt c, c' werde ich zwei neue Größen T, φ , in die Rechnung bringen, so daß

$$c = T \cos \varphi, \quad c' = -T \sin \varphi,$$

sind. Da dadurch $c dy' + c' dx' = -T d\sigma \sin(\varphi, -\varphi)$ wird, so bedeutet φ , den Werth von φ , für welchen $cy' + c'x' + c''$ ein Maximum oder Minimum ist. Die Gleichung (5) verwandelt sich nun:

$$-\varepsilon T \cos(\varphi, -\varphi) = f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2$$

und die beiden Factoren des Nenners von (6) und (7) werden

$$\sqrt{(\varepsilon T + f + \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2)} = \sqrt{2\varepsilon T \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi, -\varphi)}$$

$$\sqrt{(\varepsilon T - f - \frac{1}{2}(cy' + c'x' + c'')^2)} = \sqrt{2\varepsilon T \cdot \cos \frac{1}{2}(\varphi, -\varphi)}$$

Da die Feder wenig von einer geraden Linie abweicht, also $\varphi, -\varphi$ ein kleiner Winkel ist, so kann man den zweiten Factor, ohne erheblichen Fehler, als beständig $= \sqrt{2\varepsilon T}$ annehmen, wodurch die Integrale aufhören elliptische Transcendenten zu seyn. Man hat dadurch, wenn man, um abzukürzen, η für $cy' + c'x' + c''$ schreibt:

$$c'y' - cx' = \frac{-1}{\sqrt{2\varepsilon T}} \int \frac{(f + \frac{1}{2}\eta\eta) d\eta}{\sqrt{(\varepsilon T + f + \frac{1}{2}\eta\eta)}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon T}} [(\varepsilon T - f) \log(\eta + \sqrt{2\varepsilon T + 2f + \eta\eta}) - \frac{1}{2}\eta \sqrt{2\varepsilon T + 2f + \eta\eta}] + Const.$$

$$\sigma = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon T}} \int \frac{d\eta}{\sqrt{(\varepsilon T + f + \frac{1}{2}\eta\eta)}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \log(\eta + \sqrt{2\varepsilon T + 2f + \eta\eta}) + Const.$$

und wenn man diese Integrale vom Anfange bis zum Ende der Feder, oder von $\eta = c''$ bis $\eta = cb + c'a + c'' = \eta'$ nimmt, auch sich an die Gleichungen (8) erinnert:

$$(9) \dots c'b - ca = \frac{\varepsilon T - f}{2\sqrt{\varepsilon T}} \cdot \log \left\{ \frac{\eta' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi, -u)}{c'' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi} \right\} + \frac{1}{2}c'' \sin \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\eta' \sin \frac{1}{2}(\varphi, -u)$$

$$(10) \dots \sigma = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \cdot \log \left\{ \frac{\eta' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi, -u)}{c'' + 2\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin \frac{1}{2}\varphi} \right\}$$

Wendet man in der GröÙe, deren Logarithme hier vorkommt, die aus den beiden Gleichungen (8) zu ziehende Bestimmung von c'' an, nämlich

$$c'' = \frac{-2\varepsilon T \sin(\varphi, -\frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u}{cb + c'a} - \frac{cb + c'a}{2}$$

$$\eta' = \frac{-2\varepsilon T \sin(\varphi, -\frac{1}{2}u) \sin \frac{1}{2}u}{cb + c'a} + \frac{cb + c'a}{2}$$

so wird diese GröÙe

$$\frac{4\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u + cb + c'a}{4\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u - cb - c'a}$$

und es folgt dadurch aus (10):

$$cb + c'a = -4\sqrt{\varepsilon T} \cdot \sin(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u) \cos \frac{1}{2}u \cdot \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \dots (11)$$

wo, um abzukürzen,

$$z = \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}} \cdot \sigma$$

gesetzt worden ist. Hieraus folgen

$$(12) \dots \begin{cases} c'' = 2\sqrt{sT} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u\right) \sin\frac{1}{2}u \cdot \frac{e^2+1}{e^2-1} + \sin\left(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u\right) \cos\frac{1}{2}u \cdot \frac{e^2-1}{e^2+1} \right] \\ \eta' = 2\sqrt{sT} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u\right) \sin\frac{1}{2}u \cdot \frac{e^2+1}{e^2-1} - \sin\left(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u\right) \cos\frac{1}{2}u \cdot \frac{e^2-1}{e^2+1} \right] \end{cases}$$

Ferner hat man aus (9) und (10) verbunden mit den eben gefundenen Ausdrücken:

$$c'b - ca = -\frac{sT-f}{2\sqrt{sT}} \cdot z + 2\sqrt{sT} \cdot \left(pp \frac{e^2+1}{e^2-1} + p'p' \frac{e^2-1}{e^2+1} \right)$$

wo p und p' für $\cos\left(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u\right) \sin\frac{1}{2}u$ und $\sin\left(\frac{1}{2}\varphi, -\frac{1}{2}u\right) \cos\frac{1}{2}u$ geschrieben sind. Aus (8) erhält man aber, indem man den Ausdruck von c'' substituirt,

$$\frac{sT-f}{2\sqrt{sT}} = \sqrt{sT} \left[1 + pp \frac{4e^2}{(e^2-1)^2} - p'p' \frac{4e^2}{(e^2+1)^2} \right]$$

und damit:

$$(13) \dots c'b - ca = -T\sigma + 2\sqrt{sT} \cdot \left[pp \frac{e^{2u}-2ze^2-1}{(e^2-1)^2} + p'p' \frac{e^{2u}+2ze^2-1}{e^2+1} \right]$$

welcher Ausdruck, mit (11) verbunden,

$$(14) \dots \begin{cases} a = \sigma \cos \varphi, -2\sqrt{\frac{s}{T}} \left[\left(pp \frac{e^{2u}-2ze^2-1}{(e^2-1)^2} + p'p' \frac{e^{2u}+2ze^2-1}{(e^2+1)^2} \right) \cos \varphi, -2p' \frac{e^2-1}{e^2+1} \sin \varphi, \right] \\ b = \sigma \sin \varphi, -2\sqrt{\frac{s}{T}} \left[\left(pp \frac{e^{2u}-2ze^2-1}{(e^2-1)^2} + p'p' \frac{e^{2u}+2ze^2-1}{(e^2+1)^2} \right) \sin \varphi, +2p' \frac{e^2-1}{e^2+1} \cos \varphi, \right] \end{cases}$$

ergiebt. Substituirt man die jetzt gefundenen Ausdrücke von $\eta' = cb + c'a + c''$, a und b in den Gleichungen (3), so enthalten diese die drei von der Zeit abhängigen Größen u , T , φ , zu deren Bestimmung sie hinreichen.

Ein erstes Integral dieser Gleichungen ist das der Erhaltung der lebendigen Kraft entsprechende, nämlich das Integral der Summe ihrer Producte in resp. da , db , du . Bezeichnet man seine willkürliche Constante durch h , so ist es

$$h = \left(s \sin u \frac{du}{dt} - \frac{da}{dt} \right)^2 + \left(s \cos u \frac{du}{dt} + \frac{db}{dt} \right)^2 + \mu \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2\pi^2 \lambda \left[s \cos u + a - \frac{1}{m} \int ((cb + c'a + c'') du + cda - c'db) \right]$$

Wenn

$$\begin{aligned} a &= \sigma \cos u + \alpha \\ b &= \sigma \sin u + \beta \end{aligned}$$

gesetzt und $d\alpha^2 + d\beta^2$ vernachlässigt wird, so verwandelt es sich in

$$(15) \dots h = (\mu + s's) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2s' \frac{du}{dt} \left(\cos u \frac{d\beta}{dt} - \sin u \frac{d\alpha}{dt} \right) - 2\pi^2 \lambda \left[s' \cos u + \alpha - \frac{1}{m} \int ((c\beta + c'\alpha + c'') du + c d\alpha - c' d\beta) \right]$$

wo s' für $s + \sigma$, also für die in der Ruhe des Pendels stattfindende Entfernung seines Schwerpunktes von dem Aufhängungspunkte geschrieben ist. In der weiteren Entwicklung dieses Integrals werde ich Größen von der Ordnung von $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\beta$, $\alpha\sqrt{s}$, $\beta\sqrt{s}$ vernachlässigen, wodurch man berechtigt wird, $p = p' = \frac{1}{2} \sin u$ anzunehmen. Demzufolge hat man:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\sigma\gamma \cdot \sin u - \zeta \cos u + \zeta' \sin u \\ \beta &= \sigma\gamma \cdot \cos u - \zeta \sin u - \zeta' \cos u \end{aligned}$$

$$(16) \dots h = (\mu + s's) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2s' \frac{du}{dt} \left(\sigma \frac{d\gamma}{dt} - \zeta \frac{du}{dt} - \frac{d\zeta'}{dt} \right)$$

$$- 2\pi^2 \lambda \left[s' \cos u - \sigma\gamma \sin u - \zeta \cos u + \zeta' \sin u + \int \frac{T}{m} d\zeta - \int \frac{c''}{m} du \right].$$

Die Bestimmung der in dieser Gleichung, außer u , noch vorkommenden T und γ muß aus den Gleichungen (3) abgeleitet werden. Führt man in den beiden ersten derselben α und β , statt a und b ein, und multiplicirt man sie in $-\cos u$ und $-\sin u$, ferner in $\sin u$ und $-\cos u$, so ergeben sie:

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} \cos \gamma = s' \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \cos u \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \sin u \frac{d^2 \beta}{dt^2} + \pi^2 \lambda \cos u$$

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} \sin \gamma = -s' \frac{d^2 u}{dt^2} + \sin u \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \cos u \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \pi^2 \lambda \sin u$$

wo γ für $\varphi, -u$ geschrieben ist und die abkürzenden Bezeichnungen

$$\zeta = \frac{e^{2u}-4ze^2-1}{(e^2-1)^2} \sin \frac{1}{2}u \sqrt{\frac{s}{T}}$$

$$\zeta' = \frac{e^2-1}{e^2+1} \cdot 2 \sin \frac{1}{2}u \sqrt{\frac{s}{T}}$$

eingeführt sind. Die Gleichung (15) verwandelt sich dadurch in:

Wenn man diese Gleichungen weiter entwickelt, so enthalten sie die zweiten Differentialquotienten sowohl von T , als auch von γ ; man kann aber α und β vernachlässigen, indem T nur in Größen von der ersten Ordnung, und γ nur in σu multiplicirt, in (16) vorkommen, und das letztere Product, bei der immer kleinen Länge der Feder und den kleinen Schwingungswinkeln des Pendels, so klein ist, daß Größen von der Ordnung von $\sigma u \alpha$ und $\sigma u \beta$ als unerheblich angesehen werden können. Man kann daher

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} = s' \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \pi^2 \lambda \cos u$$

$$\pi^2 \lambda \frac{T}{m} \gamma = -s' \frac{d^2 u}{dt^2} - \pi^2 \lambda \sin u$$

annehmen. Wenn das Pendel von $-u'$ bis u' schwingt, so hat man mit hier hinreichender Näherung, aus (16):

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{2\pi^2 \lambda s'}{\mu + s's'} (\cos u - \cos u') = \frac{2\pi^2 \lambda}{l} (\cos u - \cos u')$$

und indem man dieses differentiirt:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{\pi^2 \lambda s'}{\mu + s's'} \sin u = -\frac{\pi^2 \lambda}{l} \sin u$$

wo also ls' die Gröfse $\mu + s's'$ bedeutet, und damit, den obigen Ausdrücken zufolge:

$$(17) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{T}{m} = \cos u + \frac{2s'}{l} (\cos u - \cos u') \\ \frac{T}{m} \gamma = \frac{s' - l}{l} \sin u \end{cases}$$

In meinem Buche über die Länge des einfachen Secundenpendels habe ich (S. 103) gezeigt, dafs ein Pendel, dessen Bewegung der Gleichung

$$(18) \dots c = (1 + 2f'u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - 2nn(\cos u + fu)$$

entspricht, eine ganze Schwingung in derselben Zeit vollendet, in welcher ein einfaches, dessen Länge

$$(19) \dots l = \frac{\pi^2 \lambda}{nn} \left[1 + 2\beta + \frac{\alpha''}{2} + \sin \frac{1}{2} u'^2 (\beta'' + \frac{3}{4} \alpha''') \right]$$

ist, eine gleich grofse vollenden würde, in welchem Ausdrucke die Coefficienten durch die Entwicklungen

$$fu = \alpha + \alpha' \sin \frac{1}{2} u + \alpha'' \sin \frac{1}{2} u^2 + \dots$$

$$f'u = \beta + \beta' \sin \frac{1}{2} u + \beta'' \sin \frac{1}{2} u^2 + \dots$$

erklärt werden, deren erste, wenn der Coefficient von $\sin \frac{1}{2} u'^2$ vollständig gefunden werden soll, also bis $\sin \frac{1}{2} u'^2$ incl., die zweite bis $\sin \frac{1}{2} u'^2$ ausgeführt werden mufs. Die Reduction der Gleichung (16) auf die Form (18) ergiebt:

$$\frac{\pi^2 \lambda}{nn} = l$$

$$fu = \frac{1}{s'} [-\sigma \gamma \sin u - \zeta \cos u + \zeta' \sin u + \int \frac{T}{m} d\zeta - \int \frac{c''}{m} du]$$

$$f'u = \frac{1}{l} [\sigma \frac{d\gamma}{du} - \zeta - \frac{d\zeta'}{du}].$$

Indem man den Ausdruck von fu auch

$$\frac{1}{s'} [-\sigma \gamma \sin u + \zeta \left(\frac{T}{m} - \cos u \right) - \int \zeta \frac{dT}{m} - \int \frac{c''}{m} du + \zeta' \sin u]$$

schreiben kann, bemerkt man leicht, dafs die angegebenen Grenzen der Entwicklungen fordern, dafs ζ bis zu den Gröfsen

der 2ten Ordnung und γ , c'' , ζ' bis zu denen der 3ten aufgesucht werden. Den Ausdrücken (17) zufolge ist

$$\gamma = -\frac{l-s'}{l} \frac{2v\sqrt{(1-vv)}}{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} vv}$$

wo v , v' für $\sin \frac{1}{2} u$ und $\sin \frac{1}{2} u'$ geschrieben sind, und man erhält daraus ohne Mühe, die entsprechenden Theile von

$$fu = \frac{4(l-s')\sigma}{ls'} \left[\left(1 - \frac{4s'}{l} v'v' \right) vv + \frac{4s'+l}{l} v^4 \right]$$

$$f'u = -\frac{(l-s')\sigma}{ll} \left[1 - \frac{4s'}{l} v'v' + \frac{12s'+4l}{l} vv \right] \dots (a)$$

Wenn man, um abzukürzen, bezeichnet

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ durch } \alpha, \quad \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \text{ durch } \beta$$

$$\frac{d\alpha}{dz} \text{ durch } \alpha', \quad \frac{d\beta}{dt} \text{ durch } \beta'$$

so werden die oben gegebenen Ausdrücke von ζ und c'' :

$$\zeta = \sqrt{\frac{e}{m}} (\alpha + \beta + (\alpha' + \beta')z) \frac{\frac{1}{2} vv}{\sqrt{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} vv}}$$

$$\frac{c''}{m} = \sqrt{\frac{e}{m}} (\alpha + \beta) \sqrt{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} vv} v.$$

Indem

$$z = \sqrt{\frac{T}{e}} \cdot \sigma = z' + z' \left[\frac{2s'}{l} v'v' - \frac{2s'+l}{l} vv \right] \dots (\omega v z' = \sigma \sqrt{\frac{m}{e}})$$

ist, so sind die erforderlich weit fortgesetzten Entwicklungen.

$$\zeta = \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot [a + b + (a' + b')z']^{\frac{1}{2}} vv$$

$$\frac{c''}{m} = \sqrt{\frac{e}{m}} [a + b + (a + b + (a' + b')z') \left(\frac{2s'}{l} v'v' - \frac{2s'+l}{l} vv \right)] v$$

wo a , b , a' , b' die in der Voraussetzung $z = z'$ stattfindenden Werthe von α , β , α' , β' bedeuten. Schreibt man, um abzukürzen, $2A$ und $2B$ für $\sqrt{\frac{e}{m}} (a+b)$ und $\sqrt{\frac{e}{m}} (a+b+(a'+b')z')$, so findet man sehr leicht die ζ und c'' enthaltenden Theile von

$$fu = -\frac{2}{s'} A vv + \frac{1}{s'} (2B - \frac{1}{2} A) v^4$$

$$f'u = -\frac{1}{l} A vv \dots (b)$$

Der Ausdruck von ζ' ist endlich

$$= \frac{2\alpha v}{\sqrt{1 + \frac{4s'}{l} v'v' - \frac{4s'+2l}{l} vv}}$$

$$= [a - (a - a'z') \left(\frac{2s'}{l} v'v' - \frac{2s'+l}{l} vv \right)] 2v$$

und die ihm entsprechenden Theile von fu und $f'u$ sind:

$$(c) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} f^u &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \left[\frac{1}{s'} (4a - (a - a'z') \frac{8s'}{l} v'v') vv - \frac{1}{s'} (2a - (a - a'z') \frac{8s' + 4l}{l}) v^4 \right] \\ f'^u &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \left[-\frac{1}{l} (a - (a - a'z') \frac{2s'}{l} v'v') + \frac{1}{l} \left(\frac{a}{2} - (a - a'z') \frac{6s' + 3l}{l} \right) vv \right] \end{aligned} \right.$$

Substituiert man in der Formel (19) die sich aus der Summe von a , b , c ergebenden

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{4(l-s')\sigma}{ls'} \left(1 - \frac{4s'}{l} v'v' \right) - \frac{2}{s'} A + \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cdot \frac{4}{s'} (a - (a - a'z') \frac{2s'}{l} v'v') \\ \alpha''' &= \frac{4(l-s')(4s'+l)\sigma}{lls'} + \frac{1}{s'} (2B - \frac{1}{2}A) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \frac{2}{s'} (a - (a - a'z') \frac{4s' + 2l}{l}) \\ \beta &= -\frac{(l-s')\sigma}{ll} \left(1 - \frac{4s'}{l} v'v' \right) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cdot \frac{1}{l} (a - (a - a'z') \frac{2s'}{l} v'v') \\ \beta'' &= -\frac{4(l-s')(3s'+l)\sigma}{l^3} - \frac{1}{l} A + \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \frac{1}{l} \left(\frac{a}{2} - (a - a'z') \frac{6s' + 3l}{l} \right) \end{aligned}$$

so erhält man endlich:

$$\begin{aligned} (20) \dots \dots \frac{l'}{l} &= 1 + \frac{2(l-s')^2\sigma}{lls'} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cdot \frac{1}{2s'} (a+b) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cdot \frac{l-s'}{ls'} \cdot 2a \\ &+ \left[\frac{(l-s')\sigma}{l^3s'} (8s's' - 12ls' + 3ll) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \frac{3}{4s'} (a+b + (a+b')z') - \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cdot \frac{3l+8s'}{16ls'} (a+b) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \cdot \frac{3l-s'}{2ls'} a + \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \frac{(l-s')(3l+2s')}{lls'} (a-a'z') \right] v'v'. \end{aligned}$$

7.

Um zu erfahren, in wiefern die jetzt entwickelte Theorie der Bewegung eines an einer Feder aufgehängten Pendels dem Resultate des Herrn *Frodsham* günstig ist, habe ich die Zahlenwerthe der verschiedenen Theile des oben gegebenen Ausdruckes aufgesucht.

Ein Längenelement ds der Feder, in der Entfernung u von der sie ihrer Dicke nach halbirenden Ebene, oder in der Entfernung $\rho + u$ von dem Mittelpunkte ihrer Krümmung, erfährt durch diese Krümmung die Veränderung

$$\frac{u}{\rho} ds,$$

zu deren Erhaltung eine Kraft erforderlich ist, welche unter der Annahme der Proportionalität der Kraft und ihrer Wirkung

$$= \frac{k}{2\beta} \cdot \frac{u}{\rho}$$

ist, wenn 2β die Verkürzung der Längeneinheit, welche der drückenden Kraft k entspricht, bedeutet. Das Moment der die Feder krümmenden Kraft ist daher

$$= \frac{k}{2\beta} \cdot \frac{uu}{\rho}$$

und die Summe dieser Momente für alle Punkte eines Querschnittes der Feder, welche als ein Parallelepipedum, ihre Breite $= b$, ihre Dicke $= 2d$, angenommen wird, ist

$$\frac{kb}{2\beta\rho} \int_{-d}^d uu \, du = \frac{kbd^3}{3\beta\rho}$$

Dieses ist die oben durch E bezeichnete und durch $\frac{\varepsilon}{\rho}$ ausgedrückte Kraft, woraus die Bedeutung von ε hervorgeht, nämlich

$$\varepsilon = \frac{kbd^3}{3\beta}$$

Wenn für k das Gewicht einer auf die Flächeneinheit drückenden Quecksilbersäule von der Wärme des schmelzenden Eises und der Höhe $336^{\text{u}}905$ angenommen wird, so ist β , den Versuchen des Herrn *Lagerhielm* zufolge, für Eisen und Stahl, ein Viermilliontel. Nimmt man die Pariser Linie zur Längeneinheit, die Quadratlinie also zur Flächeneinheit, den Preussischen Gran zur Gewichtseinheit, so ist (§ 4)

$$k = 336,905 \cdot 13,6 \cdot 0,1884961 = 863,6715$$

wodurch also ε , für jede gegebene Breite und Dicke der (von Stahl gemachten) Feder bekannt wird.

Die Federn, mit welchen Herr *Frodsham* seine Versuche machte, waren von 0,39 bis 0,40 englische Zoll breit und von 0,002 bis 0,005 dick *); ich werde für $b = 4^{\text{u}}5$ und $2d = 0,003$ Zoll $= 0^{\text{u}}03378$ rechnen, das Gewicht des Pendels aber zu 15 Preuss. Pfunden, oder $m = 115200$ annehmen. Die Einrichtung des letzteren werde ich so annehmen, dafs es Secunden Sternzeit schwingt, welcher $l = 438^{\text{u}}4$ entspricht, und dafs $s' = 409^{\text{u}}6$ ist. Aus dieser Annahme folgt

*) Eine nur 0,001 Z. dicke nehme ich aus, da sie zu schwach ist, um ein Pendel sicher zu tragen.

$$\log \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} = 9,66797 - 10$$

und wenn die Länge der Feder (σ) in Pariser Linien ausgedrückt wird:

$$\sigma \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} = z' = 2,148 \cdot \sigma.$$

Hieraus geht hervor, daß für Federn von einem halben bis zu einem ganzen engl. Zelle, oder von $\sigma = 5,63$ bis $\sigma = 11,26$, mit welchen Herrn *Frodshams* Versuche gemacht wurden, z' so groß ist, daß $e^{z'}$ vergleichungsweise mit $e^{2z'}$ und 1 ver-

$$\frac{l'}{l} = 1 + \frac{2(l-s')^2 \sigma}{ll's'} - \frac{1}{s'} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \left(\frac{2s'}{l} - 1 \right) + \left[\frac{(l-s') \sigma}{ls'} \left(8 \frac{s's'}{ll} - 12 \frac{s'}{l} + 3 \right) - \frac{1}{s'} \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}} \left(\frac{s'}{2l} + \frac{3}{8} - \frac{l-s'}{l} \left(\frac{2s'}{l} + 3 \right) \right) \right] v'v' \dots (21)$$

und wenn man die angenommenen Zahlen anwendet in:

$$\frac{l'}{l} = 1 + 0,000211 \cdot \sigma - 0,0009871 \\ - (0,0001971 \cdot \sigma + 0,0005936) v'v'$$

Verlangt man den ähnlichen Ausdruck für eine andere Feder, deren Dicke nicht 3, sondern n Tausentel Zoll ist, so muß man die von σ freien Theile des gegenwärtigen in $\sqrt{\left(\frac{n}{3}\right)^3}$ multipliciren; eine andere Breite, $= b$ Pariser Linien, fordert die Multiplication derselben Theile in $\sqrt{\frac{b}{4,5}}$.

Indem die in $v'v'$ multiplicirte Größe negativ ist, zeigt die gegenwärtige Anwendung der Theorie des an einer Feder aufgehängten Pendels, daß diese Aufhängungsart die Schwingungszeit desto mehr verkürzt, je größer der Schwingungswinkel ist. Dieses war wirklich Herrn *Frodshams* Absicht, allein die von der Feder herrührende Verkürzung ist viel zu klein, um der Verlängerung entgegenzuwirken, welche aus der kreisförmigen Bewegung des Pendels entsteht: bekanntlich ist die letztere $= \frac{1}{4} v'v'$, während die erstere (nämlich die Hälfte des Einflusses auf $\frac{l'}{l}$)

$$- (0,0000986 \cdot \sigma + 0,0002968) v'v'$$

ist, so daß jene durch diese nur unbedeutend vermindert, nicht vernichtet wird. Der nicht in $v'v'$ multiplicirte Theil des Ausdrucks von $\frac{l'}{l}$ zeigt, daß die Kraft der Feder verursacht, daß das an ihr aufgehängte Pendel unendlich kleine Schwingungen in kürzerer Zeit vollendet, als ein an einem Faden ohne Federkraft von gleicher Länge befestigtes von übrigens gleicher Beschaffenheit.

Die Theorie bestätigt also nicht das Resultat, welches Herr *Frodsham* aus seinen Versuchen abgeleitet hat; sie berechtigt daher zu der Annahme, daß fremde Einwirkungen die Schwingungszeiten des Pendels gestört haben müssen. Sie zeigt auch, daß die Veränderung der Länge der Feder, welche Herr *Frodsham* als ein Mittel betrachtet, ein Pendel iso-

gleichungsweise mit $e^{z'}$ nicht in Betracht kommen. Dadurch werden die in dem Ausdrucke (20) durch a und b bezeichneten Größen sehr wenig von einander und von 1 verschieden, und $z'a'$ und $z'b'$ werden unbedeutend; woraus hervorgeht, daß die von der Federkraft abhängigen Theile jenes Ausdrucks als unabhängig von den verschiedenen, in den Versuchen vorkommenden Werthen von σ anzusehen sind, und daß eine solche Verschiedenheit erst bei weit geringeren Längen der Feder erheblichen Einfluß erhalten würde. Dadurch zieht sich der Ausdruck (20) in folgenden zusammen:

chronisch zu machen, erst wenn die Feder viel kürzer ist, als in seinen Versuchen, einen erheblichen Einfluß äußern kann.

8.

Wenn auch das von dem oft genannten Künstler als *isochronisch* angegebene Pendel diese Eigenschaft nicht besitzen hat, so ist damit die Möglichkeit, sie einem Pendel anzueignen, nicht zurückgewiesen. Vielmehr ist diese Möglichkeit offenbar, da bekanntlich die cycloidische Bewegung eines Pendels *) große und kleine Schwingungen gleichzeitig vollendet. Es ist also nicht sowohl irgend eine, den Isochronismus hervorbringende Einrichtung, als eine solche aufzufinden, welche ihn, ohne mit anderweitigen Nachtheilen verbunden zu seyn, und unter allen Umständen sicher, hervorbringt. Ihre Auflösung ist, meiner Ansicht nach, die wichtigste Aufgabe für die Künstler, welche die höchste Vollendung der Pendeluhren hervorzubringen beabsichtigen. Hier bemerke ich darüber nur, daß der § 1 und 2 beschriebene Apparat geeignet ist, den Erfolg einer den Isochronismus beabsichtigenden Einrichtung des Pendels, dadurch der strengsten Prüfung zu unterwerfen, daß man einen Versuch mit größeren Schwingungswinkeln anfängt und ihn bis zu kleineren fortsetzt. Dieser Apparat müßte auch Herrn *Frodsham* vor der Täuschung bewahrt haben, welche aus irgend einer fremden Störung, vermuthlich aus der mit dem die Uhr treibenden Gewichte veränderlichen Größe ihres Einflusses auf die Schwingungszeiten des Pendels, hervorgegangen sein muß.

Zum Schlusse erwähne ich noch eines Nutzens, welcher aus dem a. a. O. beschriebenen Apparate gezogen werden kann. Wäre unter den verschiedenartigen Hemmungen, welche man den Pendeluhren gegeben hat, oder geben kann, eine, welche ihre beabsichtigte Wirkung äußerte, ohne die Schwingungszeit des Pendels im geringsten zu beeinträchtigen, so würde sie offenbar den Vorzug vor jeder anderen, dieses

*) Aller Schärfe nach nur des einfachen Pendels.

nicht leistenden, verdienen. Da aber wahrscheinlich keine von ihnen ganz ohne Einfluß auf die Schwingungszeit ist, so kann auch die Gröfse dieses Einflusses verschiedener Hemmungen, so wie seine Beständigkeit unter allen Umständen, Grund werden, die eine oder andere vorzugsweise anzuwenden. Diese Gröfse kann durch den erwähnten Apparat mit Sicherheit und Leichtigkeit *bestimmt* werden: man wird ihn so anordnen, dafs man die Uhr selbst in dem Kasten befestigt, allein die Einrichtung trifft, dafs sie aufer Verbindung mit dem Pendel gesetzt werden kann, so dafs die Schwingungszeiten des Pendels, sowohl *ohne*, als auch in Verbindung mit ihr, unmittelbar nachein-

ander beobachtet und beide miteinander verglichen werden können. Der Apparat leistet also auch hier dasselbe, was ihn, meiner Meinung nach, allgemein zu einer *unentbehrlichen* Unterstützung der Uhrmacherkunst macht: er gewährt dem Künstler das Mittel, das Pendel einer Uhr, in Beziehungen, in welchen es seiner Absicht vollkommen entsprechend werden kann, *ganz zu vollenden*; in jeder andern Beziehung aber, die Wirkung einer zu wählenden Einrichtung unmittelbar zu prüfen, also auch die bessere von einer weniger guten, *durch den Erfolg selbst* zu unterscheiden.

Bessel.

Schreiben des Herrn Hofraths *Gauss*, Directors der Göttinger Sternwarte, an den Herausgeber.
Göttingen 1842. Novbr. 27.

Ich schicke Ihnen hier die *Goldschmidtschen* Beobachtungen des Kometen, wie er sie mir jetzt gebracht hat:

	M. Z.	Grade Aufst.	Abweichung.
1842 Nov. 5	9 ^h 47' 3"	268° 22' 50" 5	+51° 59' 12" 0
8	9 9 43	273 11 1,6	
	9 10 42		42 39 10,0

	M. Z.	Grade Aufst.	Abweichung.
1842 Nov. 8	10 ^h 22' 24"		+42° 29' 11" 9
	10 29 11	273° 16' 12" 2	
9	8 22 47		39 15 5,5
	8 45 12	274 35 22,1	
10	7 42 8		35 39 47,6
	7 45 28	275 53 9,5	

E. F. Gauss.

Beobachtungen der Sonnenfinsterniſs vom 7^{ten} Julius.

(Aus den Bulletins de l'Académie Royale de Bruxelles.)

Sternwarte in Brüssel.

Anfang	Jul. 7.	17 ^h 9' 20" 9 m. Zt.	<i>Quetelet.</i>
		27,3 —	<i>Bouvy.</i>
Ende	19	2 9,4 —	<i>Quetelet.</i>
		4,8 —	<i>Bouvy.</i>
	1	58,6 —	<i>Mailly.</i>
		56,2 —	<i>Esselens.</i>

Lyon.

Anfang	Jul. 7.	17 ^h 4' 38" m. Zt.	} <i>Bravais.</i>
Ende		18 58 13 —	

Breslau.

Anfang	17 58 41,46 m. Zt.	} <i>v. Boguslawski.</i>
Ende	20 0 40,36 —	

V e r b e s s e r u n g.

In Nr. 463 pag. 107 Zeile 20 von unten Colonne 4 lies 46° statt 42°.
— 3 und 5 — h — °

I n h a l t.

Bemerkungen und Untersuchungen über Pendeluhrn. Von Herrn Geh. Rath und Ritter *Bessel*. p. 137.
Schreiben des Herrn Hofraths *Gauss*, Directors der Göttinger Sternwarte, an den Herausgeber. p. 159.
Beobachtungen der Sonnenfinsterniſs vom 7ten Julius. (Aus den Bulletins de l'Académie Royale de Bruxelles.) p. 159.
Verbesserung. p. 159.