Über einen neuen Beweis der Kleinschen Relation zwischen den Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve.

Von

C. JUEL in Kopenhagen.

In den Math. Annalen Bd. 10 hat Herr F. Klein die folgende bekannte Relation zwischen den reellen Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve aufgestellt:

$$(I) \quad 2d'' + r' + k = 2t'' + w' + n.$$

Hier bedeuten n und k bezw. Ordnung und Klasse der Kurve, r' und w' bezw. die Anzahl der reellen Spitzen und Inflexionspunkte, d'' und t'' bezw. die Anzahl der reellen isolierten Doppelpunkte und Doppeltangenten der Kurve. Für eine imaginäre Kurve, d. h. eine in einer reellen Ebene liegende Kurve, deren Gleichungskoeffizienten komplex sind, leitet man aus (I) folgende Gleichung ab:

$$(II) \quad \delta - \tau = n - k,$$

wo δ und τ bezw. die Anzahl der reellen Punkte und die der reellen Tangenten der Kurve sind.

Der Beweis des Urhebers der in der Theorie der algebraischen Kurven fundamentalen Relation (I) geschieht in der Weise, daß erst die Richtigkeit derselben für spezielle Kurven n^{ter} Ordnung dargetan wird, und danach die Änderungen, welche die eingehenden Zahlen durch kontinuierliche Variation der Kurve erleiden, untersucht werden.

Was die in dem folgenden Beweise nicht zu umgehenden algebraischen Hilfsmittel betrifft, so entnehme ich aus Herrn Brills Untersuchung die Berechtigung, in dem hier gebrauchten Umfange die allgemeine Kurve in der Nähe eines einzelnen Punktes durch eine naheliegende zu ersetzen, was hier ziemlich einfach ausfällt.*)

*) Siehe Brill, Über Singularitäten ebener algebraischer Kurven und eine neue Kurvenspezies, Math. Ann. Bd. 16, S. 348.

Das Prinzipielle meines Verfahrens suche ich in § 3 zu charakterisieren. Den Ausgangspunkt bilden einige Betrachtungen über die Kongruenz derjenigen reellen Geraden, welche in v. Staudts Sinne Träger der Punkte einer in einer imaginären Ebene liegenden Kurve n^{ter} Ordnung sind. Den Anfang einer Theorie dieser Kongruenzen habe ich schon 1884 in meiner Dissertation gegeben und daselbst auch einen Beweis von (II) skizziert. Von den genannten Kongruenzen spreche ich im § 1, wobei ich mich auf das für das folgende unumgänglich Notwendige beschränke.

§ 1.

Über die Trägerkongruenz der Punkte einer ebenen imaginären algebraischen Kurve.

Nach v. Staudt wird jeder imaginäre Punkt mittels einer auf einem reellen geradlinigen Träger liegenden mit einem bestimmten Sinne versehenen Involution von Punktepaaren dargestellt. Ebenso wird die imaginäre Ebene mittels einer mit bestimmtem Sinne versehenen Involution von reellen Ebenenpaaren eines Büschels dargestellt; die Achse des Büschels nennt man die *Achse* der Ebene.

Eine in der imaginären Ebene liegende Gerade kann entweder reell sein, oder einen reellen Punkt, oder endlich nur imaginäre Punkte haben. Im ersten Falle fällt die Gerade mit der Achse u der Ebene Π zusammen. Im zweiten Falle muß die Gerade in einer reellen Ebene liegen, und der reelle Punkt muß der (eindeutig bestimmte) Schnittpunkt dieser Ebene mit u sein. Die Gerade heißt dann imaginär erster Art. Im dritten Falle, wo die Gerade imaginär zweiter Art heißt, bilden die Träger der Punkte derselben eine lineare Kongruenz, welche die Achse u enthält.

Ebenso wie die Gerade wird jede in einer imaginären Ebene Π liegende Punktmenge eine Trägerkongruenz haben, welche aus den Trägern der betreffenden Punkte gebildet wird. Wenn sich in der Menge reelle Punkte vorfinden, werden diese auf u liegen, und als Träger wird jede durch einen solchen Punkt gehende reelle Gerade zu betrachten sein. Insbesondere hat auch jede ebene algebraische Kurve eine Trägerkongruenz, und der kontinuierlichen Menge der Kurvenpunkte entspricht eine kontinuierliche Menge von Trägern. Nur dann, wenn ein reeller Punkt P im Raume gegen einen der eventuell vorhandenen reellen Punkte der Kurve konvergiert, wird nicht jeder durch P gehende Träger gegen eine bestimmte Grenzlage konvergieren.

Weil in dem hier betrachteten Zusammenhange nur reelle Geraden als Träger in Betracht kommen, ist es angemessen, die Ordnung der Kongruenz als die größte endliche Anzahl der durch einen reellen Punkt

des Raumes gehenden Träger zu charakterisieren, während die Klasse die größte Zahl der in einer reellen Ebene liegenden Träger ist.

Die Klasse der Trägerkongruenz einer ebenen algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung ist gleich n .

Eine beliebige reelle Ebene schneidet nämlich die gegebene imaginäre Π in einer Geraden, und diese hat n (getrennte oder eventuell zusammenfallende) Punkte mit der Kurve gemein. Die Träger dieser n Punkte und nur diese liegen in der reellen Ebene.

Die Anzahl der durch einen reellen Punkt P des Raumes gehenden Träger ist für eine gegebene Kurve nicht konstant. Man kann hier zunächst nur sagen: *Die Anzahl der durch einen reellen Punkt P des Raumes gehenden Träger ist (wenn endlich) entweder gleich n^2 oder um eine gerade Zahl kleiner als n^2 , wenn n die Ordnung der Kurve ist.*

Projiziert man nämlich die imaginäre Kurve Γ aus P auf eine reelle Ebene π , so erhält man wieder eine (im allgemeinen imaginäre) Kurve γ n^{ter} Ordnung, deren reelle Punkte mit P verbunden die gesuchten Träger geben. Die reellen Punkte einer imaginären Kurve $\varphi + i\psi = 0$ sind nun die reellen Schnittpunkte der reellen Kurven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ und es ist leicht, Kurven n^{ter} Ordnung anzugeben, welche sich in $n^2 - s$ und nicht in anderen reellen Punkten schneiden; hier ist $n^2 - s \geq 0$ und s eine sonst beliebige gerade Zahl.

Wenn P seinen Platz im Raume kontinuierlich ändert, werden die reellen (im projektiven Sinne geschlossenen) Zweige von φ und ψ sich auch kontinuierlich ändern; die Anzahl der reellen Schnittpunkte wird sich deshalb nur dadurch ändern können, daß φ und ψ zusammenfallende Schnittpunkte erhalten. Dies kann erstens dadurch geschehen, daß P den Träger f eines singulären Punktes von Γ überschreitet, denn in $(f\pi)$ fallen dann mehrere reelle Punkte zusammen. Solche singulären Punkte finden sich aber nur in endlicher Zahl, und die zugehörigen Träger können deshalb immer vermieden werden, wenn man längs irgend eines Weges von einem Punkte P_0 des Raumes zu einem anderen Punkte P_1 übergehen will; vorausgesetzt ist nur, daß P_0 und P_1 nicht selbst auf Trägern singulärer Punkte liegen. Man braucht also nur den anderen Fall zu betrachten, daß φ und ψ einen reellen Berührungspunkt haben.

Nur wenn P auf der Achse u liegt, kann die Anzahl der durch P gehenden Träger immer angegeben werden, denn *durch einen der Kurve nicht angehörigen Punkt P der Achse gehen n Träger, welche alle in u fallen.* Durch P kann in diesem Falle kein anderer Träger l gehen, denn in der Ebene (lu) liegen nur die n auf u fallenden Kurvenpunkte.

Durch einen u naheliegenden Punkt P gehen n einander naheliegende Träger. Wenn sich P weiter von u entfernt, wird im allgemeinen die

Zahl der durch P gehenden Träger sich ändern; man braucht hierbei dem Obigen zufolge nur den Übergangsfall zu betrachten, daß die zwei oben genannten zugehörigen Kurven φ und ψ in einem und demselben reellen Punkte eine und dieselbe Gerade m zu berühren. Den Ort derjenigen Punkte P im Raume, wo dieser Fall eintritt, nennen wir die *Singularitätsfläche* Σ der Trägerkongruenz. Die Ebene (Pm) wird hier γ und demnach auch Γ berühren, und die Tangente zu Γ ist die Schnittgerade der Ebenen (Pm) und Π . Diese Gerade ist eine imaginäre Gerade erster Art; der reelle Punkt derselben liegt in u' , und man wird sämtliche solche Geraden erhalten, indem man aus jedem reellen Punkt Q von u die durch Q gehenden Tangenten an Γ bestimmt. Die reellen Ebenen aller dieser Tangenten bilden eine von einem kontinuierlich variierenden reellen Parameter abhängige Menge und hüllen also eine Developpable ein:

Die Singularitätsfläche Σ der Trägerkongruenz einer ebenen algebraischen Kurve ist eine reelle Developpable, deren Berührungsebenen die die Kurven berührenden Geraden erster Art enthalten.

Zugleich hat man:

Durch jeden reellen Punkt der Achse gehen k reelle Berührungsebenen der Singularitätsfläche, wenn k die Klasse der Kurve ist.

Die obigen Entwicklungen zeigen, daß die Projektion γ einer in Π liegenden Kurve Γ aus einem beweglichen reellen Punkte P des Raumes auf eine reelle Ebene π eine Änderung $+2$ oder -2 in der Zahl δ ihrer reellen Punkte erfährt, wenn P die Singularitätsfläche in einem nicht singulären Punkte überschreitet.

Wir wollen nun die Anzahl τ der reellen Tangenten der genannten Projektionen γ betrachten. Diese werden notwendigerweise aus dem zugehörigen Projektionszentrum P mittels Ebenen projiziert, die Berührungsebenen von Σ sind; hierbei setzen wir voraus, daß die Achse keine Tangente von Σ ist. Eine Änderung in τ könnte also nur eintreten, wenn der Punkt P entweder eine singuläre Berührungsebene σ von Σ , oder wenn er Σ selbst überschreitet.

Die erste Möglichkeit kann man aber außer Acht lassen. Freilich ist nicht ausgeschlossen, daß singuläre Berührungsebenen an Σ auftreten können, ebensowenig kann man, wenn sich solche Ebenen vorfinden, von einem Punkte P_0 zu jedem anderen Punkte P gelangen ohne die Überschreitung derselben zu gestatten. Aber die Singularitätsfläche hat die charakteristische Eigenschaft, daß eine solche Überschreitung überhaupt keinen Einfluß auf τ hat. Nehmen wir nämlich an, daß von dem einen, P_0 , von zwei Punkten P_0 und P_1 , die nahe aneinander aber auf verschiedenen Seiten von σ liegen, zwei reelle Berührungsebenen an Σ gehen, die nach σ konvergieren, wenn P_0 nach σ konvergiert, von dem anderen P_1

aber keine solchen. Dasselbe müßte dann der Fall sein, wie auch P_0 und P_1 nahe aneinander gewählt werden, wenn nur auf verschiedenen Seiten von σ (und nicht in Σ). Dies gilt besonders, wenn P_0 und P_1 auf u gewählt werden. Wir wissen aber, daß durch jeden Punkt von u dieselbe Zahl k von reellen Berührungsebenen an Σ geht. Wenn auch mehrere von diesen für spezielle Punkte von u zusammenfallen können, ist es doch ausgeschlossen, daß reelle Berührungsebenen durch Überschreitung irgend eines Punktes von u verloren gehen können. Dies erklärt sich dadurch, daß eine singuläre Berührungsebene von Σ zweimal als solche auftritt. Eine Änderung in τ entsteht also nur, wenn Σ überschritten wird. Wir wollen nun beweisen, daß *durch Überschreitung von Σ gleichzeitig zwei durch den beweglichen Punkt P gehende Träger und zwei durch P gehende Berührungsebenen an Σ gewonnen oder verloren werden.*

Wir wollen hierbei der Einfachheit wegen voraussetzen, daß die Achse u der imaginären Ebene Π unendlich fern liegt. In Π liegt eine Kurve Γ ; dieselbe wird aus einem auf einem nicht singulären Träger p_0 von Σ liegenden Punkte P_0 auf eine reelle Ebene π projiziert. Die (imaginäre) Projektion γ hat in $O = p_0\pi$ eine reelle Tangente, nämlich die Schnittlinie von π mit der Berührungsebene zu Σ längs p_0 ; diese Tangente wählen wir zur Y -Achse eines Parallelkoordinatensystems in π . Es soll ferner Γ noch aus einem P_0 naheliegenden aber nicht in Σ liegenden Punkte P_1 auf π projiziert werden. Wir nehmen hier ferner der Einfachheit wegen an, daß P_0P_1 die Achse u in einem unendlich fernen Punkt U schneidet; wir wählen dann OU zur X -Achse. Die Projektion eines beliebigen Punktes M von Π auf π aus P_1 wird dann aus der Projektion desselben Punktes aus P_0 durch eine konstante imaginäre Parallelverschiebung längs der X -Achse erhalten. Man kann ferner π so reell parallel mit sich selbst verschieben, daß diese imaginäre Verschiebung rein imaginär ausfällt, wie auch P_1 als ein reeller Punkt auf P_0U gewählt wird. Daß dies möglich ist, folgt daraus, daß sowohl die Punkte $(a, 0)$, wie auch $(ai, 0)$ — wo a reell ist — eine einfache Kette im Sinne v. Staudts bilden.

Es sei nun $f(x, y) = 0$ die Gleichung von γ . Die Gleichung der Projektion γ_1 von Γ aus P_1 wird dann

$$f(x + \varepsilon i, y) = 0 \quad (\varepsilon \text{ reell}).$$

Es werde γ dargestellt durch:

$$x = (\alpha + i\beta)t + \dots; \quad y = t^{\frac{1}{2}}.$$

Wir nehmen hier nur die ersten Glieder und ersetzen also γ in der Nähe von O durch die Kurve:

$$(1) \quad y^2 = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} x.$$

Die Kurve γ_1 wird man dann in der Nähe von O durch

$$(2) \quad y^2 = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (x + \varepsilon i)$$

ersetzen. Diese letztere hat nur dann reelle Punkte in der Nähe von O , wenn ε und β dasselbe Vorzeichen haben, nämlich die Punkte

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \varepsilon, \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \right).$$

Die Gleichung einer Geraden können wir $x = vy + u$ schreiben, und darin u und v als Linienkoordinaten auffassen. In diesem Systeme wird die Gleichung von (1):

$$(3) \quad v^2 = -4(\alpha + i\beta)u,$$

und die Gleichung von (2):

$$v^2 = -4(\alpha + i\beta)(u + \varepsilon i).$$

Die letztere hat wieder nur dann reelle Tangenten in der Nähe von O , wenn ε und β dasselbe Vorzeichen haben, nämlich die Geraden:

$$\left(-\frac{\alpha}{\beta} \varepsilon, \pm 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \right).$$

Wir wissen hier im voraus, daß entweder zwei oder keine reellen nach O konvergierenden Punkte hervortreten — und das analoge von den reellen Tangenten — wenn ε nach Null konvergiert. Weil es ferner hier nur darauf ankommt, ob zwei reelle Bögen „ineinander“ oder „auseinander“ verschoben werden, können die Verhältnisse an naheliegenden Bögen abgeschätzt werden.

Die angegebenen Einschränkungen, nämlich daß Σ geradlinig längs P_0U und in einem nicht singulären Erzeuger überschritten wird, spielen offenbar keine Rolle, wenn man wie hier nur auf *irgend* einem Wege von einem Punkte im Raume zu irgend einem anderen (reellen) nicht in Σ liegenden Punkt gelangen will. Daß wir u unendlich fern gewählt haben, hatte nur den Zweck, ein gewöhnliches Parallelkoordinatensystem gebrauchen zu können.

§ 2.

Beweis der Kleinschen Relationen.

Mittels der entwickelten Hilfssätze gelingt nun der Beweis der Kleinschen Relationen sehr leicht. Wir betrachten zuerst (II). Es liege also in einer reellen Ebene π die imaginäre Kurve γ ; dieselbe werde aus einem reellen Punkte P_0 des Raumes auf eine imaginäre Ebene Π in Γ projiziert. Hierbei kann man immer vermeiden, daß Γ die Achse u von Π

berührt. Die Anzahl δ der durch einen beliebigen reellen Punkt P des Raumes gehenden Träger, und die Anzahl τ der durch P gehenden Berührungsebenen an Σ haben eine konstante Differenz. Fällt aber P in u , wird $\delta = n$, $\tau = k$. Man hat also:

$$(II) \quad \delta - \tau = n - k,$$

wo δ und τ bzw. die Anzahl der reellen Punkte und der reellen Tangenten von γ geben.

Wir denken uns nun eine in der reellen Ebene π liegende reelle Kurve γ , welche aus P_0 auf Π in Γ projiziert wird. Diese Kurve Γ werde wieder aus einem P_0 naheliegenden reellen Punkte P_1 des Raumes auf π in eine neue Kurve γ_1 projiziert. Es kommt nun darauf an, wie viele reelle Punkte und reelle Tangenten die Kurve γ_1 bekommt. Die Ebene π kann man nach Belieben wählen. Wir wählen dieselbe so, daß die Achse u unendlich fern fällt, und so, daß u keine Tangente von γ ist. Den Punkt P_1 wähle man so, daß P_0P_1 die Achse u in einem unendlich fernen Punkte U schneidet. Der Übergang von γ zu γ_1 geschieht dann mittels einer imaginären Parallelverschiebung, wir können sagen längs einer durch U gehenden X -Achse. Nachdem Π und U festgelegt sind, kann man noch P_0 so wählen, daß diese Parallelverschiebung im analytisch-geometrischen Sinne rein imaginär ausfällt (was der Kürze wegen hier geschehen mag).

Wir betrachten nun zuerst einen nicht singulären Punkt O von γ , dessen Tangente mit der X -Achse nicht zusammenfällt. Wählen wir die genannte Tangente als Y -Achse, dann kann man die Gleichung der Kurve

$$y = ax + bx^2 \dots$$

schreiben, wo a reell ist. Hier hat offenbar

$$y = a(x + \varepsilon i) + b(x + \varepsilon i)^2 + \dots$$

keinen O naheliegenden reellen Punkt. Wenn γ die X -Achse berührt, ersetze man die gegebene Kurve in der Nähe von O durch

$$y = ax^2.$$

Hier hat

$$y = a(x + \varepsilon i)^2$$

den reellen Punkt $(0, -a\varepsilon^2)$, und γ_1 hat in der Nähe von O einen und nur einen reellen Punkt.

Hat die Kurve γ einen Doppelpunkt in O , ersetzen wir sie in der Nähe von O durch

$$y^2 + ax^2 = 0,$$

und γ_1 mit der Gleichung

$$y^2 + a(x + \varepsilon i)^2 = 0$$

hat, wenn a positiv (und nur dann) die zwei O naheliegenden reellen Punkte $(0, \pm 2\sqrt{a})$.

Hat endlich γ eine Spitze (um nur gewöhnliche Singularitäten zu berücksichtigen), so kann man ohne Schaden voraussetzen, daß die Tangente in diesem Punkte mit der X -Achse nicht zusammenfällt. Man ersetze dann γ durch:

$$x^2 + ay^3 = 0 \quad (a \text{ reell}),$$

und γ_1 durch:

$$(x + \varepsilon i)^3 + ay^3 = 0.$$

Die letztere Kurve hat in der Nähe von O den einen reellen Punkt $(0, \sqrt[3]{\frac{\varepsilon^2}{a}})$.

Daß die Anzahl derjenigen reellen *und* imaginären Schnittpunkte von $f(x + \varepsilon i, y) = 0$ und $\bar{f}(x - \varepsilon i, y) = 0$, welche nach O konvergieren, wenn ε nach Null konvergiert, in den betrachteten Fällen 0, 1, 4, 3 ist, kann man schon aus der Theorie der Enveloppen folgern. Daß dann die Anzahl der reellen von diesen Punkten 0, 1, 2, 1 sein wird, schließen wir daraus, daß dies nur von dem „Ineinander-“ oder „Auseinander-“Verschieben reeller Bögen (der früher genannten Kurven $\varphi = 0$ und $\psi = 0$) abhängig ist, und dies kann man durch naheliegende Bögen abschätzen.

Hat die Kurve höhere Singularitäten, so muß man in jedem einzelnen Fall die O naheliegenden reellen Punkte von $f(x + \varepsilon i, y) = 0$ bestimmen (wo $f(0, 0) = 0$).

Es sollen nun auch die reellen Tangenten angegeben werden, welche an γ_1 auftreten. Es folgt dies schon aus dem obigen, weil eine imaginäre Zentralkollineation, deren Zentrum U in der Kollineationsachse u liegt, durch eine ebene reelle reziproke Transformation in eine ebensolche Zentralkollineation übergeht. Man sieht so — oder auch direkt analytisch —, daß γ_1 teils die reellen Tangenten berührt, welche aus U an γ gezogen werden können, teils die reellen Wendetangenten von γ , teils Geradenpaare, welche nach den *reellen isolierten* Doppeltangenten von γ konvergieren, wenn γ_1 nach γ konvergiert.

Gehen also im Raume durch die Gerade P_0P_1 x reelle Berührungsebenen an die reelle Kegelfläche, welche γ aus P_0 projiziert, so hat man infolge (II) und mit den früher angegebenen Bezeichnungen:

$$(2d'' + r' + x) - (2t'' + w' + x) = n - k,$$

oder

$$(I) \quad 2d'' + r' + k = 2t'' + w' + n.$$

Wenn γ reell ist, zerfällt die zu Γ gehörige Singularitätsfläche in die reelle Kegelfläche, welche γ aus P_0 projiziert, und noch eine Rest-developpable. Man sieht aus dem Obigen, daß die Wendeberührungsebenen der Kegelfläche auch Wendeberührungsebenen der Restfläche sind.

In derselben Weise können Punkte mit höheren Singularitäten in Betracht gezogen werden, wodurch die neulich von Herrn Schuh angegebene allgemeinere Relation sehr einfach herauskommt.*)

Sei nämlich t Ordnung und s Klasse des singulären Punktes O , der als Anfangspunkt angenommen wird. Die Kurve wird dann in der Nähe von O durch

$$y = ax^{\frac{t+1}{t}} \dots$$

dargestellt. Man hat nun diejenigen *reellen* Punkte von

$$(a) \quad (y + \varepsilon i)^t = bx^{s+t}$$

zu bestimmen, welche nach O konvergieren, wenn ε nach Null konvergiert. Denken wir uns b komplex: $b = r(\cos v + i \sin v)$, so erhalten wir aus

$$(y + \varepsilon i)^t (\cos v - i \sin v) = (y - \varepsilon i)^t (\cos v + i \sin v)$$

sogleich die reellen Werte:

$$y = \varepsilon \cot \frac{v + 2p\pi}{t}, \quad p = 1, 2, \dots, t-1.$$

Die zugehörigen Werte von x findet man aus

$$x^{s+t} = \frac{\varepsilon^t}{r} \frac{1}{\sin^t \frac{v + 2p\pi}{t}}.$$

Wenn nun $s + t$ ungerade ist, entspricht jedem Werte von y ein reeller Wert von x . Wenn aber $s + t$ gerade ist, erhält man $2 \cdot \frac{t-1}{2}$ oder $2 \frac{t-2}{2} + 1$ reelle zugehörige Werte von x , je nachdem t ungerade oder gerade ist, d. h. in jedem Falle $t-1$ reelle Punkte in der Nähe von O .

Geht man zu den früher gebrauchten Linienkoordinaten u und v über, so bleibt die Gleichungsform ungeändert, nur werden s und t vertauscht. Es treten also zu der verschobenen Kurve $s-1$ getrennte reelle O nahe-liegende Tangenten auf. Man hat also nach dem Früheren

$$\Sigma s - \Sigma t = k - n.$$

Dies ist die von Herrn Schuh auf ganz anderem Wege gefundene Relation.

§ 3.

Bemerkungen.

Ich möchte den Hauptpunkt des obigen Beweises darin finden, daß die Kurve als festliegend betrachtet wird, während so zu sagen unter

*) F. Schuh, An equational reality for plane curves with higher singularities, Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, May 1904.

ihr weg diejenige Menge K'' von Punkten projektivisch verschoben wird, die ich eine Kette mit zwei Dimensionen nenne.*) Die Punkte einer K'' bildet man aus vier beliebigen festen reellen oder imaginären Punkten der Ebene mittels der Möbiusschen Netzkonstruktion; dieselbe wird auch aus der Menge der reellen Punkte einer reellen Ebene durch eine imaginäre Kollineation erhalten, die in der obigen (etwas speziell gehaltenen) Darstellung eine imaginäre Translation war. Die Ketten in Π sind hier diejenigen, deren zugehörige Träger durch einen reellen Punkt P gehen; solche sind im projektiven Sinne nicht als singuläre zu betrachten.

Nachdem (II) bewiesen ist, können die von Herrn Klein und Herrn Zeuthen benutzten Grenzübergänge direkt aus (II) beurteilt werden. Freilich sind Beispiele notwendig, um die Existenz der oberen Grenzen z. B. für w' festzustellen.

Ich möchte noch hinzufügen, daß die Formel (I) selbstverständlich nicht als die einzig mögliche Relation zwischen den reellen Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve anzunehmen ist. Schon bei den Kurven vierter Ordnung existiert noch eine andere, welche freilich von der Eleganz von (I) weit entfernt ist. Es folgt dies schon aus den Untersuchungen des Herrn Zeuthen.***) Die folgende Formulierung entnehme ich meiner Untersuchung über graphische Kurven vierter Ordnung.***) Es bedeute t' die Anzahl derjenigen Doppeltangenten eines einzelnen Zweiges einer Kurve vierter Ordnung, welche in reellen Punkten berühren, und d' die Anzahl der reellen Doppelpunkte desselben Zweiges. Man hat dann entweder

$$t' = 0$$

oder

$$2t' = 2d' + w'.$$

Diese zweiteilige Formel ist abgeleitet für die etwas verwickelteren Verhältnisse einer nicht notwendigerweise algebraischen Kurve (wo sich keine oberen Grenzen für t' , d' , w' vorfinden), sie gilt aber auch für jeden Zweig einer algebraischen Kurve; sollte nämlich der Zweig graphisch zweiter Ordnung sein, so wäre

$$t' = d' = w' = 0.$$

Durch Addition erhält man für alle Zweige zusammen entweder:

*) Siehe Juel, Über einige Grundgebilde der projektiven Geometrie, Acta Math. Bd. XIV, und C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti d. R. Acc. d. Scienze di Torino 1890.

**) Siehe Zeuthen, Die Formen algebr. Kurven vierter Ordnung, Math. Annalen Bd. 7.

***) Siehe Juel, i Laeren om graf. Kurver, Dansk. Vidensk. Selsk-Skrifter 1899.

$$2t' = 2d' + w',$$

oder

$$t' = 0.$$

Hierin bedeutet t' die Zahl derjenigen Doppeltangenten der ersten Art, welche in reellen Punkten berühren, d' die dualistisch bestimmte Zahl; Doppeltangenten erster Art sind solche reelle Doppeltangenten, welche entweder isoliert sind oder denselben Zweig zweimal berühren. Man erhält nun die Anzahl t_1 sämtlicher Doppeltangenten erster Art, indem $d' + d'' = d_1$ gesetzt wird,

$$(III) \quad \begin{cases} \text{entweder aus } 2d'' + r' + k = 2t_1 + w' + n, & \text{wenn } t' = 0, \\ \text{oder aus } 2d_1 + r' + k = 2t_1 + n, & \text{wenn } t' \neq 0. \end{cases}$$

Dies ist eine von (II) unabhängige Relation zwischen den reellen Singularitäten einer Kurve vierter Ordnung, welche wie gesagt schon in der Zeuthenschen Untersuchung enthalten ist. Ihre Art scheint jedenfalls auf größere Komplikationen bei analogen Relationen für Kurven höherer Art hinzudeuten.

Kopenhagen, November 1904.