Über die Wirkung einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der inneren Ecke eines Winkelleisens.

Von E. TREFFTZ in Dresden.

Die in der technischen Elastizitätslehre regelmäßig gestellte Frage nach der größten, in einem Bauteil auftretenden Spannung muß zuweilen dahin beantwortet werden, daß sich rechnerisch unendlich große Spannungen ergeben, wie z. B. bei der Torsion prismatischer Stäbe an einspringenden Ecken des Querschnitts. Die Frage bedarf dann einer Modifikation; wir müssen untersuchen, welche Abrundung einer solchen einspringenden Ecke oder Kante die Spannung auf das zulässige Maß reduziert, bzw. wie weit eine Spannungserniedrigung durch eine Abrundung überhaupt zu erreichen ist.

In der vorliegenden Arbeit berechne ich den Einfluß einer Abrundung auf die Torsionsspannungen in der einspringenden Ecke eines Winkelleisens, und zwar entwickle ich ein Näherungsverfahren für schwache Abrundungen (kleine Abrundungshalbmesser). Eine Ergänzung hierzu wird demnächst folgen; in einer Dissertation werden einige spezielle Fälle stärkerer Abrundung behandelt werden.

1. Die Aufgabe und das Prinzip der Näherungslösung. Wir betrachten ein Winkelleisen, dessen Schenkel gleiche Breite $b = 1$ haben, und nehmen, was für unsere Fragestellung zulässig ist, an, daß sie sich ins Unendliche erstrecken. In bekannter Weise kann man den Spannungszustand durch eine hydrodynamische Analogie deuten¹⁾. Sind u und v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit, deren Rotation konstant und zwar gleich 2 ist, und für die der Rand des Querschnitts Stromlinie ist, so lassen sich die Komponenten der Schubspannung für die x - und y -Richtung in der Form darstellen:

$$\tau_{xz} = G\omega u, \quad \tau_{yz} = G\omega v \quad (1),$$

wo G den Schubmodul, ω die Verdrehung pro Längeneinheit des gedrehten Stabes bedeutet. Das Koordinatensystem ist dabei so gelegt, daß die z Achse mit der Richtung der Stabachse zusammenfällt und der Nullpunkt in die einspringende Ecke fällt. Beim Umströmen der einspringenden Ecke wird nun die Geschwindigkeit unendlich, und demnach ergeben sich hier auch unendliche Schubspannungen. Ueber den Charakter dieser Singularität gewinnen wir folgendermaßen Aufschluß. Wir stellen uns vor, daß wir der genannten Strömung von konstantem Wirbel in der Umgebung der Ecke eine wirbelfreie Strömung überlagern, die der ersten entgegengerichtet ist. Wenn wir die Stärke dieser Strömung passend bestimmen, so wird an der Ecke gerade die Geschwindigkeit Null herauskommen, d. h. im Spannungsproblem die Spannung Null. Das bedeutet, daß wir die Strömung, die uns die Schubspannungen liefert, in der Nähe der Ecke zerlegen können in eine Strömung von konstantem Wirbel, die an der Ecke die Geschwindigkeit Null hat, und in eine Potentialströmung, die das Unendlichwerden der Spannung darstellt. Nun ist das komplexe Potential einer scharfe Ecke umströmenden wirbelfreien Strömung

$$F(z) = Cz^{2/3} \quad (2),$$

dessen Ableitung die Geschwindigkeitskomponenten liefert:

$$u - iv = F'(z) = \frac{2}{3} Cz^{-1/3} \quad (3).$$

Die Konstante C ist die charakteristische Konstante der Singularität, sie muß aus der Lösung des Spannungsproblems für das nicht abgerundete Winkelleisen entnommen werden. In einer Arbeit in den mathematischen Annalen²⁾ habe ich diese Lösung für das Winkelleisen mit unendlich langen Schenkeln gegeben; aus der numerischen Durch-

Abb. 1

¹⁾ Vergl. den Zus. Bericht von Th. Pöschl, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 314.

²⁾ E. Trefftz, Ueber die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt. Math. Ann. Band 82, 1920, Heft 1/2, Seite 97 bis 112.

oder:

$$k \sqrt{p^2 + q^2} = J \left(\frac{z''}{z'} \right) \quad (10).$$

Nun ist längs der einzelnen Begrenzungsstücke k konstant; gehen wir also längs der ξ -Achse weiter, so erhalten wir durch Differentiation nach ξ

$$k \frac{ps + qt}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{\partial}{\partial \xi} J \left(\frac{z''}{z'} \right) \quad (11).$$

Nun ist für $d\xi = d\zeta = \text{reell}$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} J \left(\frac{z''}{z'} \right) = J \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right).$$

Die rechte Seite wird also einfach

$$J \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right).$$

Die linke Seite wird

$$k \sqrt{p^2 + q^2} R \left(\frac{z''}{z'} \right)$$

oder bei Benützung von (10):

$$J \left(\frac{z''}{z'} \right) R \left(\frac{z''}{z'} \right)$$

und das ist

$$= \frac{1}{2} J \left(\frac{z''}{z'} \right)^2.$$

Wir erhalten somit die Bedingung dafür, daß die Krümmung konstant ist,

$$J \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 \right\} = 0 \quad (12).$$

Wäre der Ausdruck $\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2$ überall regulär, so könnten wir aus dem Verschwinden seines Imaginärteils längs der reellen Achse schließen, daß er überall Null wäre. Nun sollen den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ die Punkte in der z -Ebene entsprechen, an denen der Kreisbogen an die Geraden anschließt; in diesen Punkten hat $z = f(\zeta)$ eine Singularität, also auch der Ausdruck (12).

Den Charakter dieser Singularität erkennen wir daraus, daß an diesen Punkten die Krümmung sich sprungweise ändert; es muß also (10) der Imaginärteil von $\left(\frac{z''}{z'} \right)$ eine Singularität haben wie der Imaginärteil von $c \ln (\xi \pm 1)$. Wir erfüllen das, indem wir für $\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2$ in den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ einfache Pole annehmen. Schließlich haben wir im Unendlichen $z = \zeta^{3/2}$, also

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 = -\frac{5}{8} \zeta^{-2}.$$

Im Unendlichen muß also $\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2$ wie $-\frac{5}{8} \frac{1}{\zeta^2}$ gegen Null gehen. Setzen wir

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{z''}{z'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 = -\frac{5}{8} \frac{1}{\zeta^2 - 1} \quad (13),$$

so sind die Bedingungen für $\zeta = \pm 1$ und im Unendlichen erfüllt; ebenso gilt (12), so daß die Konstanz der Krümmung längs der einzelnen Begrenzungsstücke gesichert ist. In (13) haben wir die Differentialgleichung gefunden, der unsere Abbildungsfunktion genügt. Wir verwandeln sie in eine lineare Differentialgleichung, wenn wir $w = \frac{1}{\sqrt{z'}}$ als neue Variable einführen. Gl. (13) wird dann:

$$w'' - \frac{5w}{16(\zeta^2 - 1)} = 0 \quad (14).$$

In dieser Form verwenden wir die Gleichung zur Integration; wir entwickeln die Lösung einmal im Unendlichen, dann in der Umgebung von $\zeta = 0$ und bestimmen die Integrationskonstanten der Entwicklung am Nullpunkt so, daß sich diese Entwicklung in den Punkten $\zeta = -1$ und $\zeta = +1$ an die Entwicklung um $\zeta = \infty$ anschließt. Die erste Entwicklung konvergiert außerhalb, die zweite innerhalb des Einheitskreises, so daß wir damit die ganze Abbildung beherrschen.

Setzen wir also im Unendlichen (unter Berücksichtigung des Charakters von $z = f(\zeta)$ im Unendlichen)

$$w = C_1 \zeta^{-1/4} + C_5 \zeta^{-5/4} + C_9 \zeta^{-9/4} + \dots \quad (15),$$

so erhalten wir für die Koeffizienten aus der Differentialgleichung die Rekursionsformeln:

$$C_{8n+9} = \frac{(8n+1)(8n+5)}{(8n+9)(8n+13)-5} C_{8n+1} \dots \dots \dots (16),$$

wo C_1 als Integrationskonstante stehen bleibt, und C_5 , C_{13} , C_{21} usw. Null werden. Numerisch ergeben sich daraus die Werte:

$$C_9 = 0,0446 C_1, C_{17} = 0,0148 C_1, C_{25} = 0,0073 C_1, C_{33} = 0,0044 C_1, C_{41} = 0,0039 C_1 \quad (17).$$

Setzt man diese ein und schätzt den Rest nach elementaren Methoden ab, so erhält man für

$$\zeta = \pm 1 \quad w(1) = C_1(1,092 \pm 0,004), \quad w(-1) = C_1 e^{i\pi/4}(1,092 \pm 0,004) \quad (18).$$

Für die Entwicklung am Nullpunkte setzen wir an:

$$w = \gamma_0 + \gamma_1 \zeta + \gamma_2 \zeta^2 + \gamma_3 \zeta^3 + \dots \dots \dots (19)$$

und erhalten für die Koeffizienten die Rekursionsformeln

$$\gamma_{\nu+2} = \frac{\nu(\nu-1) - \frac{5}{16}}{(\nu+2)(\nu+1)} \gamma_{\nu} \dots \dots \dots (20).$$

γ_0 und γ_1 bleiben als Integrationskonstanten unbestimmt, für die übrigen ergibt die numerische Auswertung:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= -0,1563 \gamma_0, & \gamma_3 &= -0,0521 \gamma_1 \\ \gamma_4 &= -0,0220 \gamma_0, & \gamma_5 &= -0,0148 \gamma_1 \\ \gamma_6 &= -0,0086 \gamma_0, & \gamma_7 &= -0,0069 \gamma_1 \\ \gamma_8 &= -0,0045 \gamma_0, & \gamma_9 &= -0,0040 \gamma_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21).$$

Setzt man diese Werte ein und schätzt wieder den Rest ab, so ergibt sich mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{2} \text{ vH}$

$$\left. \begin{aligned} w(1) &= 0,791 \gamma_0 + 0,906 \gamma_1 \\ w(-1) &= 0,791 \gamma_0 - 0,906 \gamma_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22).$$

Diese Werte müssen den oben ermittelten gleich sein, d. h. es ist:

$$\begin{aligned} 0,791 \gamma_0 + 0,906 \gamma_1 &= 1,092 C_1, \\ 0,791 \gamma_0 - 0,906 \gamma_1 &= 1,092 e^{i\pi/4} C_1, \end{aligned}$$

woraus sich γ_0 und γ_1 berechnen:

$$\gamma_0 = 0,690 (1 + e^{i\pi/4}) C_1, \quad \gamma_1 = 0,603 (1 - e^{i\pi/4}) C_1 \dots \dots \dots (23).$$

Die übrig bleibende Integrationskonstante C_1 bestimmt sich aus der Krümmung des abrundenden Kreisbogens unserer Ecke. An einem beliebigen Randpunkte ist die Krümmung $k = \frac{1}{|z'|} J \left(\frac{z''}{z'} \right)$ oder, in $w = \frac{1}{\sqrt{z'}}$ ausgedrückt:

$$k = -2 |w|^2 J \left(\frac{w'}{w} \right) \dots \dots \dots (24).$$

Setzen wir hier die Werte von w und w' für $\zeta = 0$ ein, $w(0) = \gamma_0$, $w'(0) = \gamma_1$, so ergibt sich $k_0 = -2 \gamma_0 \overline{\gamma_0} J \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0} \right)$ oder

$$k_0 = -2 J(\overline{\gamma_0} \gamma_1) \dots \dots \dots (25).$$

Daraus ergibt (23)

$$k_0 = 1,18 C_1^2 \dots \dots \dots (26),$$

und damit ist unsere Aufgabe soweit gelöst, als sie für unsere Aufgabe von Bedeutung ist. Auf die Aufstellung der Reihen für z können wir verzichten, da für die Spannungsberechnung nur $z' = \frac{1}{w^2}$ in Frage kommt und wir dieses auch nur im innersten Punkte des Kreisbogens brauchen, d. h. für $\zeta = 0$, weil uns ja nur die Maximalspannung interessiert.

3. Die maximale Spannung in der einspringenden Ecke. Nach Abschnitt 1 erhalten wir die Spannungskomponenten in der Umgebung der Ecke in der Form:

$$\tau_{xz} - i \tau_{yz} = G \omega F'(z)$$

aus der Ableitung des komplexen Potentials $F(z)$ für eine die Ecke umströmende Potentialströmung, dessen Ableitung im Unendlichen von der Form $F'(z) = \frac{0,988 G \omega}{\sqrt{z}}$ ist. Da

in der ζ -Ebene die Stromlinien einfach die Geraden $\eta = \text{konst.}$ sind, so wird das gesuchte komplexe Strömungspotential

$$F(z) = A \zeta \dots \dots \dots (27),$$

die Spannungen werden also:

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\omega A \frac{d\zeta}{dz} = G\omega A w^2 \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Die Konstante A bestimmt sich aus der vorstehenden Bedingung für das Unendliche; im Unendlichen wird $\frac{d\zeta}{dz} = w^2 = C_1^2 \zeta^{-1/2}$, daraus folgt durch Integration $\zeta = \left(\frac{3}{2} C_1^2 z\right)^{2/3}$, also

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\omega A C_1^2 \left(\frac{3}{2} C_1^2 z\right)^{-1/3} = G\omega \sqrt[3]{\frac{2}{3}} A C_1^{4/3} z^{-1/3} \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Uebereinstimmung mit (4) erfordert $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} A C_1^{4/3} = 0,988$ oder $A = 1,13 C_1^{-4/3}$. Die größte Spannung tritt im innersten Punkt des abrundenden Kreisbogens auf, d. h. für $\zeta = 0$, hier wird

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\omega A |w_0|^2 = G\omega A \gamma_0 \bar{\gamma}_0.$$

Wir erhalten daraus für die maximale Spannung

$$\tau_{\max} = G\omega 1,13 C_1^{-4/3} 1,625 C_1^2 = \frac{1,74}{\sqrt[3]{\rho}} G\omega \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Dies ist unser Hauptresultat, es gibt uns vor allen Dingen die Art des Unendlichwerdens von $\tau_{\max}$ mit abnehmendem Abrundungshalbmesser.

Es ist zweckmäßig, sich von der Spezialisierung $b = 1$ frei zu machen und das eben gewonnene Resultat noch in etwas veränderter Form darzustellen. Erstrecken sich die Schenkel des Winkeleisens ins Unendliche, so geht die Spannung an dem Rande gegen den Wert $\tau_\infty = G\omega b$ und zwar nähert sich sowohl an der Oberseite wie an der Unterseite τ diesem Werte sehr rasch (exponentiell). Auch für Winkeleisen endlicher Länge unterscheidet sich die Maximalspannung an den Schenkeln nur wenig von diesem Werte. Mit Benutzung dieser Spannung schreibt sich (30)

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_\infty} = 1,74 \sqrt[3]{\frac{b}{\rho}} \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

wobei die Spezialisierung $b = 1$ aufgegeben ist. Es läge natürlich nahe, die Abrundung so zu wählen, daß $\tau_{\max} = \tau_\infty$ würde, doch wäre das schon eine so starke Abrundung, daß unsere Näherungsmethode nicht mehr anwendbar wäre. An einigen Beispielen stärkerer Abrundung hat Hr. Dassen in einer Aachener Dissertation das Resultat erhalten, das für starke Abrundung ziemlich unabhängig von dem Krümmungshalbmesser $\tau_{\max} = 2 \tau_\infty$ gesetzt werden kann.

134

Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern.

Von C. WEBER in Hildesheim.

Zu den ungelösten Aufgaben der Elastizitätslehre gehört die Frage nach der Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. Von Wichtigkeit ist besonders die Spannungserhöhung am Rande der Löcher. In vorliegender Arbeit gebe ich die bei einer früheren Gelegenheit¹⁾ angekündigte Lösung für den Fall der allseitig oder in einer Richtung gezogenen unendlichen Scheibe mit zwei Löchern. Am Schluß wird ein Zahlenbeispiel durchgerechnet und werden Schlußfolgerungen für die mehrfach durchlochte Scheibe gezogen.

1. Aufsuchung einer Teillösung.

Die zwei verschieden großen Löcher, Abb. 1, gehören dem Systeme einer zweipoligen Kreisschar an, deren Polabstand gleich der Längeneinheit genommen ist. Durch die

Abb. 1

¹⁾ Diese Zeitschr. 2, 1922, S. 185–187.