4. Aufstreuungs- und Condensationsringe.

In Wasserstoffgas, mit Ruhmkorff und Leidener Flasche, auf Kupferplatten.

Fig. 18. Mit Aluminiumspitze. Farbe: weisslich.

„ 19. „ Eisenspitze. „ rothbraun.

„ 20. „ Platinspitze. „ violettbraun.

„ 21. „ Kobaltspitze. „ violettbraun.

„ 22. „ Silberspitze. „ tiefschwarz. Aussenkreis: grau.

„ 23. „ Bleispitze. „ dunkelblau, veränderlich.

„ 24. „ Antimonspitze. „ graublau, Aussenkreis: braunschwarz.

„ 25. „ Palladiumspitze. „ tiefschwarz.

„ 26. Ohne Leidener Flasche. Platinspitze auf Platinplatte. Farbe grau.

5. Gemischte Figuren.

Fig. 27. Mit dem Inductionsapparat.

„ 28. } Mit der Holtz'schen Influenzmaschine.

„ 29. }

6. Durch den Magnet abgelenkte Figuren.

Fig. 30. Aufreissungsscheiben mit verschieden starken Magnetkräften.

„ 31. } Oxydringe.

„ 32. } bei Drucken von 20—0,5 mm mit verschieden starken Magnet-

„ 33. } kräften.

„ 34. Gemischte, sogenannte positive Figur bei gewöhnlichem Luftdruck.

„ 35. Negative Figur bei 3 mm Luftdruck, auf kleiner, runder Platte.

„ 36. Negative Figur bei 0,5 mm Luftdruck, auf äquatorialem Metallstreifen.

„ 37. Aufstreuungs- und Condensationsring mit Antimonspitze.

VIII. *Ueber die Abweichungen der Ampère'schen Theorie des Magnetismus von der Theorie der electromagnetischen Kräfte; von J. Stefan.*

(Aus dem 79. Bd. der Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wiss. II. Abth.; vom 17. April 1879; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Theorie der electromagnetischen Kräfte geht von dem Satze aus, dass ein Stromelement auf einen Magnetpol eine zu der Ebene, in welcher beide enthalten sind, senkrecht gerichtete und im Pole selbst angreifende Kraft ausübt, und dass umgekehrt eine ebenso grosse vom Magnetpole ausgeübte Kraft im Stromelemente angreift derart, dass die beiden Kräfte ein

Kräftepaar bilden. Ersetzt man den Magnetpol durch den Pol eines Solenoïdes, dessen zweites Ende in unendlicher Distanz sich befindet und berechnet nach den Ampère'schen Gesetzen der Electrodynamik dessen Wirkung auf ein Stromelement, so erhält man dieselbe Kraft, welche die electromagnetische Theorie für die Wirkung des Magnetpols annimmt. Da die von Ampère angenommenen electrodynamischen Kräfte alle nach den Verbindungslinien der wirkenden Elemente gerichtet sind und dem Gesetze der gleichen Wirkung und Gegenwirkung entsprechen, so müssen umgekehrt die Kräfte, welche das Stromelement auf das Solenoïd ausübt, eine resultirende Kraft geben, welche der früher betrachteten der Grösse nach gleich, der Richtung nach aber direct entgegengesetzt ist. Diese Kraft hat also ihren Angriffspunkt nicht der electromagnetischen Theorie entsprechend im Solenoïdpole, sondern im Stromelemente.

Dieser Unterschied zwischen den beiden Theorien kommt bei der Discussion jener Versuche, durch welche continuirliche Rotationen von Magneten hervorgebracht werden, zur Geltung. Es hat schon Ampère¹⁾ das Verhältniss der beiden Theorien zu diesen Versuchen dargestellt, und ist später derselbe Gegenstand von Beer²⁾ und von Margules³⁾ zugleich mit Rücksicht auf die Theorie der sogenannten unipolaren Induction in Betrachtung genommen worden. Im allgemeinen aber ist zu bemerken, dass die Differenz zwischen der Ampère'schen und der electromagnetischen Theorie wenig beachtet und speciell die Ampère'sche Auffassung der Erscheinungen in den Hintergrund gedrängt worden ist. Es schien mir daher nicht überflüssig, das Verhältniss der beiden Theorien zu einander noch auf eine andere Art, als es bisher geschehen, zu betrachten. Zugleich soll die Untersuchung nicht auf die Ampère'sche Theorie beschränkt, sondern auf die allgemeinste Form der electrodynamischen Theorie ausgedehnt werden.

Ich glaube, dass die Abweichungen der electrodynamischen Theorie des Magnetismus von der Theorie der electromagne-

1) Ampère, Ann. de Chim. et de Phys. 37. p. 113. 1828.

2) Beer, Pogg. Ann. 96. p. 177. 1855.

3) Margules, Wien. Ber. 77. (II. Abth.) p. 805. 1878.

tischen Kräfte ihrem Wesen nach am klarsten hervortreten, wenn man nach beiden Theorien die Kräftepaare bestimmt, welche ein Stromelement auf einen Elementarmagnet ausübt.

Es stelle (Fig. 1) ef ein Stromelement, ns einen Elementarmagnet dar, beide seien zueinander parallel und zur Verbindungslinie r ihrer Mittelpunkte senkrecht. Wird ef von einem Strome i in der Richtung von e nach f durchflossen und bedeuten n und s den Nord- und Südpol des Magnetes mit den magnetischen Massen $+\mu$

und $-\mu$, so strebt nach dem Grundgesetze der electromagnetischen Action ef den Magnet senkrecht auf die Ebene (ef, r) , und zwar s vor, n hinter dieselbe zu stellen. Es übt ef auf ns ein Kräftepaar aus, dessen Moment durch:

$$\frac{ef \cdot i \cdot \mu \cdot \lambda}{r^2} = \frac{ef \cdot i \cdot m}{r^2}$$

bestimmt ist, wenn λ die Länge ns und $m = \mu \lambda$ das magnetische Moment des Magnetes bedeuten.

Ersetzt man ns nach der Ampère'schen Theorie des Magnetismus durch einen electrischen Strom, welcher eine unendlich kleine auf ns senkrecht stehende Fläche, etwa $\alpha\beta\gamma\delta$ umkreist, so sieht man unmittelbar, dass nach den von Ampère für die Wechselwirkung von Stromelementen aufgestellten Gesetzen ef auf den Strom $\alpha\beta\gamma\delta$ gar keine Wirkung ausüben kann, weil es auf allen Elementen des letzteren und zugleich auf r senkrecht steht.

Liegt die Axe des Magnetes in der Verbindungslinie r , so übt nach dem electromagnetischen Grundgesetze das Element ef (Fig. 2) dasselbe Kräftepaar

Fig. 2.

auf den Magnet aus, wie in dem früheren Falle. Für die jetzt angenommene Lage des Magnetes stimmt die Ampère'sche Theorie mit der electromagnetischen darin überein, dass nach ihr ef den Elementarstrom $\alpha\beta\gamma\delta$ ebenfalls und in gleichem Sinne zu drehen strebt, wie es die electromagnetische Theorie verlangt.

strebt, wie es die electromagnetische Theorie verlangt.

Es besteht nach Ampère zwischen ef und $\alpha\beta$ eine Anziehung, zwischen ef und $\gamma\delta$ eine Abstossung, und diese beiden Kräfte geben ein Paar, welches den Elementarstrom um eine zu ef parallele Axe dreht, sodass der mit $\alpha\beta\gamma\delta$ fest verbunden gedachte Punkt s vor die Ebene (ef, r) geführt wird.

Ist i' die Intensität des Stromes, welcher die Bahn $\alpha\beta\gamma\delta$ durchfliesst, so ist die von ef auf $\alpha\beta$ ausgeübte Kraft bestimmt durch $b \cdot ef \cdot i \cdot \alpha\beta \cdot i' / r^2$, ebenso gross, nur dem Zeichen nach verschieden ist die von ef auf $\gamma\delta$ ausgeübte Kraft. Das Moment der beiden kann also ausgedrückt werden durch:

$$- b \cdot \frac{ef \cdot i \cdot \alpha\beta \cdot i'}{r^2} \cdot \beta\gamma = - b \cdot \frac{ef \cdot i \cdot m}{r^2},$$

da das Product aus i' und der von diesem Strome umflossenen Fläche $\alpha\beta \cdot \beta\gamma$ gleich dem magnetischen Momente m des Magnetes ns gesetzt werden muss.

Für b , welches die der Anziehung zweier paralleler und auf ihrer Verbindungslinie senkrechter Elemente entsprechende Constante darstellt, ist -1 zu setzen, wenn man die Ströme i, i' nach electrodynamischem Maasse bestimmt, hingegen ist $b = -2$ zu nehmen, sobald i und i' in electromagnetischen Einheiten der Stromstärke ausgedrückt sein sollen. In letzterem Falle ist demnach der Ausdruck für das Moment des Kräftepaares $2ef \cdot i \cdot m / r^2$, also doppelt so gross, als nach der electromagnetischen Theorie.

Es ist noch ein dritter Fall zu betrachten. Ein in die Linie r fallendes Stromelement gh (Fig. 1) übt nach dem Grundgesetze der electromagnetischen Kräfte auf den Magnet ns kein Kräftepaar aus. Ersetzt man aber den Magnet ns durch den Strom $\alpha\beta\gamma\delta$, so erfolgt nach Ampère zwischen den Elementen gh und $\beta\gamma$ eine Abstossung zwischen den Elementen gh und $\delta\alpha$ eine Anziehung, und diese beiden Kräfte geben ein Kräftepaar, welches den Strom $\alpha\beta\gamma\delta$ um die Axe ns , also den Magnet, welchen $\alpha\beta\gamma\delta$ ersetzt, um seine eigene Axe dreht.

Ist i' die Intensität des Stromes, welcher $\alpha\beta\gamma\delta$ umfliesst, so ist die Abstossung zwischen gh und $\beta\gamma$ durch $a \cdot gh \cdot i \cdot \beta\gamma \cdot i' / r^2$ bestimmt, worin $a = 1/2$ oder $= 1$ zu setzen ist, je nachdem i

und i' nach der electrodynamischen oder electromagnetischen Einheit gemessen werden. Das Moment des von gh auf $\alpha\beta\gamma\delta$ ausgeübten Kräftepaars ist somit:

$$a \cdot \frac{gh \cdot i}{r^3} \cdot \alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot i' = a \cdot \frac{gh \cdot i \cdot m}{r^3},$$

worin wieder m das magnetische Moment des Magnetes ns bedeutet.

Die Ampère'sche Theorie des Magnetismus enthält also eine der Theorie der electromagnetischen Erscheinungen ganz fremde Art von Wirkung, nämlich die Drehung eines Elementarmagnetes um seine eigene Axe, und zwar ist diese Drehung eine continuirliche, da der Werth des Kräftepaars, während dieselbe vor sich geht, keine Veränderung erfährt.

Berechnet man die Wirkungen eines geschlossenen Stromes auf einen Elementarmagnet, so führen beide Theorien zu demselben Resultate. Die Antheile aber, welche die einzelnen Elemente des geschlossenen Stromes an der Gesamtwirkung haben, sind nach den beiden Theorien sehr verschieden.

Betrachten wir als Beispiel den in der verticalen Ebene des magnetischen Meridians stehenden Kreisstrom einer Tangentenboussole, so nehmen nach der electromagnetischen Theorie alle Elemente dieses Stromes gleichen Antheil an der Ablenkung der im Centrum angebrachten sehr kurzen Magnetnadel. Nach der Theorie von Ampère wirken die den verticalen Durchmesser des Kreises schneidenden Elemente auf die Nadel gar nicht, die an den Enden des horizontalen Durchmessers liegenden Elemente sind diejenigen, welche das stärkste Drehungsmoment liefern. Allgemein verhalten sich die von den einzelnen Elementen ausgeübten Momente wie die Quadrate der Cosinus jener Winkel, welche die zu den Elementen führenden Radien mit dem horizontalen Durchmesser bilden.

Als zweites Beispiel mag der Fall eines unendlich langen geradlinigen Stromes betrachtet werden, welcher einen ihm parallel gestellten Magnet zu drehen strebt. Nach der electromagnetischen Theorie wirkt dabei jenes Element am stärksten, welches dem Magnete am nächsten liegt. Nach der

Ampère'schen Theorie wirkt dieses Element gar nicht, und jene zwei Elemente, deren Entfernung von dem Elementarmagnete $\frac{1}{3}$ mal grösser ist, als die kürzeste, liefern zu dem gesammten Drehungsmomente den grössten Beitrag.

Die im Vorhergehenden dargestellten Unterschiede zwischen der electromagnetischen Theorie und der Ampère'schen Theorie des Magnetismus bestehen jedoch nur für den Fall, dass letzterer Theorie die von Ampère für die Wechselwirkung von Stromelementen angenommenen Gesetze zu Grunde gelegt werden. Die Erklärung der magnetischen Erscheinungen durch die Wirkungen von electricen Strömen ist jedoch nicht an die electrodynamische Theorie Ampère's gebunden, sie kann auch aus jeder anderen der möglichen electrodynamischen Theorien abgeleitet werden. Die Differenzpunkte zwischen der electromagnetischen und electrodynamischen Theorie sind aber verschieden je nach der Art der letzteren.

Ich will nun im Folgenden die electrodynamische Theorie des Magnetismus in ihrer allgemeinsten Form mit der electromagnetischen Theorie vergleichen. Es genügt jedoch dazu die Betrachtung der Kräftepaare allein nicht, sondern es müssen auch die Summen der Kräfte, welche ein Stromelement auf einen Elementarstrom ausübt, untersucht werden. Es zerfällt demnach die Aufgabe in zwei Theile.

I. Berechnung der Kräfte, welche ein Stromelement auf einen Elementarstrom ausübt.

In meiner Abhandlung über die Grundformeln der Electrodynamik¹⁾ habe ich gezeigt, dass sich die electrodynamischen Erscheinungen aus vier elementaren Kräften ableiten lassen. Um diese Kräfte kurz definiren zu können, habe ich die Bezeichnungen „longitudinale und transversale Stromelemente“ eingeführt. Diese Namen beziehen sich auf die Lage eines Stromelementes gegen die Verbindungslinie zweier. Ein in diese Verbindungslinie fallendes Element heisst longitudinal, ein auf ihr senkrecht stehendes transversal. Die vier elementaren Kräfte sind folgende:

1) Stefan, Wien. Ber. 59. II. Abth. p. 693—769. 1869.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XII.

1. Die Kraft, welche ein longitudinales Element auf ein anderes longitudinales ausübt. Sie ist nach der Verbindungslinie der beiden gerichtet.

2. Die Kraft, welche ein transversales Element auf ein anderes transversales und zu ihm paralleles ausübt. Sie ist ebenfalls nach der Verbindungslinie der beiden gerichtet.

3. Die Kraft, welche ein transversales auf ein longitudinales Element ausübt. Ihre Richtung ist der des transversalen Elementes parallel.

4. Die Kraft, welche ein longitudinales auf ein transversales Element ausübt. Ihre Richtung ist der des transversalen Elementes parallel.

Alle diese Kräfte sind dem Producte aus den Längen der Elemente und den Intensitäten der sie durchfliessenden Ströme direct, dem Quadrate der Distanz der Elemente umgekehrt proportional. Die Intensitäten der einzelnen Kräfte sind bei denselben Werthen der eben angeführten Grössen verschieden und durch vier specifische Coëfficienten bestimmt, welche ich mit a, b, c, d bezeichnet habe.

Die Kräfte, welche ein beliebig gelegenes Element auf ein zweites ausübt, werden aus den vier elementaren Kräften dadurch gefunden, dass man die Stromelemente durch ihre longitudinalen und transversalen Componenten ersetzt.

Sind zwei Stromelemente ds und ds' gegeben, die mit der von ds zu ds' führenden Verbindungslinie r die Winkel θ und θ' bilden, so sind die longitudinalen Componenten dieser Elemente $ds \cos \theta$ und $ds' \cos \theta'$, die transversalen $ds \sin \theta$ und $ds' \sin \theta'$. Es übt $ds \cos \theta$ auf $ds' \cos \theta'$ eine Kraft $a \cdot ii' ds ds' / r^2 \cdot \cos \theta \cos \theta'$ in der Richtung von r aus. Ferner übt $ds \cos \theta$ auf $ds' \sin \theta'$ eine Kraft $d \cdot ii' ds ds' / r^2 \cdot \cos \theta \sin \theta'$ aus, welche mit $ds' \sin \theta'$ gleiche Richtung hat. Die transversale Componente $ds \sin \theta$ übt auf $ds' \cos \theta'$ eine Kraft $c \cdot ii' ds ds' / r^2 \cdot \sin \theta \cos \theta'$ aus, die zur Richtung von $ds \sin \theta$ parallel ist. Endlich wirkt noch $ds \sin \theta$ auf die zu $ds \sin \theta$ parallele Componente von $ds' \sin \theta'$ mit einer nach r gerichteten Kraft. Letztere Componente ist $ds' \sin \theta \cos \omega$, wenn ω den Winkel zwischen den Ebenen (r, ds) und (r, ds') bedeutet. Die Grösse der Kraft ist demnach $b \cdot ii' ds ds' / r^2 \cdot \sin \theta \sin \theta' \cos \omega$.

Zur Lösung von Aufgaben allgemeinerer Art ist es jedoch nothwendig, die Ausdrücke für die Componenten dieser Kräfte nach drei aufeinander senkrechten Richtungen im Raume, nach den drei Coordinatenaxen zu kennen. Bildet r die Winkel λ , μ , ν mit diesen Axen, so erhält man für die durch die Constanten a und b gekennzeichneten Kräfte die verlangten Componenten durch Multiplication dieser Kräfte mit den Cosinus der Winkel λ , μ , ν .

Die Richtung der durch die Constante c bestimmten Kraft ist parallel zu der auf r senkrecht stehenden Linie $ds \sin \theta$. Die Winkel u , v , w , welche diese Linie mit den Coordinatenaxen einschliesst, lassen sich durch die Winkel α , β , γ ausdrücken, welche die Richtung von ds mit den Axen einschliesst. Da die Projection von ds auf die Axe x gleich ist der Summe der Projectionen der zwei Componenten $ds \cos \theta$ und $ds \sin \theta$ auf dieselbe Axe, so ist:

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \cos u.$$

Diese Gleichung bestimmt $\cos u$, und zwei analoge Gleichungen geben $\cos v$, $\cos w$.

In gleicher Weise kann man die Winkel u' , v' , w' , welche die mit $ds' \sin \theta'$ gleich gerichtete, durch d bestimmte Kraft mit den Axen bildet, durch die Winkel α' , β' , γ' ausdrücken, welche ds' mit den Axen einschliesst, indem die Gleichung:

$$\cos \alpha' = \cos \theta' \cos \lambda + \sin \theta' \cos u'$$

mit den zwei anderen analogen besteht.

Die zu der Axe der x parallelen Componenten der vier Kräfte sind sonach durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$(1) \quad \begin{cases} a. \frac{ii \, ds \, ds'}{r^2} \cdot \cos \theta \cos \theta' \cos \lambda \\ b. \frac{ii \, ds \, ds'}{r^2} \sin \theta \sin \theta' \cos w \cos \lambda \\ c. \frac{ii \, dt \, ds'}{r^2} (\cos \theta' \cos \alpha - \cos \theta \cos \theta' \cos \lambda) \\ d. \frac{ii \, ds \, ds'}{r^2} (\cos \theta \cos \alpha' - \cos \theta \cos \theta' \cos \lambda). \end{cases}$$

Die letzten zwei Ausdrücke kann man übrigens auch erhalten, wenn man jede der zwei transversal wirkenden Kräfte

durch eine nach r , und eine nach ds , beziehungsweise ds' gerichtete ersetzt.

Führt man statt des Winkels ω den Winkel ε ein, welchen die Richtungen von ds und ds' miteinander bilden, so lässt sich die Summe der vier Componenten darstellen durch:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{ii' ds ds'}{r^2} [(a - b - c - d) \cos \theta \cos \theta' \cos \lambda + b \cos \varepsilon \cos \lambda \\ & \quad + c \cos \theta' \cos \alpha + d \cos \theta \cos \alpha']. \end{aligned} \right.$$

Dies ist die Formel (6) der citirten Abhandlung. Ich habe diese Formel noch in eine andere Gestalt gebracht, welche besonders zur Berechnung der Kräfte, welche von einem Elemente auf eine geschlossene Leitung oder umgekehrt ausgeübt werden, geeignet ist, nämlich in folgende:

$$(3) \quad ii' ds ds' \left[m \frac{d^2}{ds ds'} \left(\frac{r' - r}{r} \right) + n \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds} + p \frac{d}{ds'} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds'} + q \frac{r' - r}{r^3} \cos \varepsilon \right].$$

Es ist dies die Formel (10) der Abhandlung über die Grundformeln der Electrodynamik. Darin bedeuten m, n, p, q aus den Constanten a, b, c, d zusammengesetzte Ausdrücke, welche durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$(4) \quad \begin{cases} 3m = -a + b + c + d & 3p = -a + b - 2c + d \\ 3n = +a - b - c + 2d & 3q = +a + 2b - c - d. \end{cases}$$

In derselben Abhandlung habe ich nachgewiesen, dass aus der gesammten Erfahrung über electrodynamische Wirkungen nur eine Bestimmungsgleichung für die vier Constanten a, b, c, d resultire, nämlich die Gleichung:

$$5) \quad p = q \text{ oder } 2a + b + c - 2d = 0.$$

Die Werthe der Constanten a, b, c, d sind auch abhängig von den gewählten Maasseinheiten. Dadurch, dass man bestimmte Einheiten einführt, gewinnt man noch eine zweite Gleichung. Diese ist:

$$(6) \quad q = -\frac{1}{2} \text{ oder } a + 2b - c - d = -\frac{3}{2},$$

wenn die Stromintensitäten in electrodynamischen Maassen ausgedrückt werden. Werden dieselben jedoch auf die electromagnetische Maasseinheit bezogen, so ist die letztere Bestimmungsgleichung zu ersetzen durch:

$$(7) \quad q = -1 \text{ oder } a + 2b - c - d = -3.$$

Die Gleichungen (5) und (6) oder statt der letzteren (7) sind die einzigen Bedingungen, an welche man bei der Wahl der Werthe a, b, c, d gebunden ist.

Um die Summe aller zur Axe der x parallelen Kräfte, welche ein Stromelement ds auf eine geschlossene Leitung s' ausübt, zu erhalten, hat man den Ausdruck (3) über die geschlossene Bahn s' zu integrieren. Die mit m und p multiplicirten Glieder fallen dabei weg, weil sie vollständige Differentiale nach s' sind. Es bleibt zu $ii' ds$ nur der Factor:

$$(8) \quad n \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds'} ds' + q \int \frac{x' - x}{r^3} \cos \varepsilon ds'$$

zu berechnen übrig.

Wäre statt der gegenwärtigen die umgekehrte Aufgabe, die Bestimmung der Kräfte, welche die Leitung s' auf das Element ds ausübt, vorgelegt, so hätte man zuerst die Formel (3) durch jene zu ersetzen, welche die von dem Elemente ds' auf das Element ds ausgeübte Kraftcomponente darstellt, also durch:

$$ii' ds ds' \left[-m \frac{d^2}{ds ds'} \left(\frac{x' - x}{r} \right) + n \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx}{ds} + p \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds'} - q \frac{x' - x}{r^3} \cos \varepsilon \right].$$

Bei der Integration nach s' fallen jetzt die mit m und n multiplicirten Glieder aus, es bleibt bei $ii' ds$ der Factor:

$$(9) \quad p \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds'} ds' - q \int \frac{x' - x}{r^3} \cos \varepsilon ds'$$

und dieser liefert, da $p = q$ und q durch die Gleichung (6) oder (7) bestimmt ist, für alle electrodynamischen Theorien denselben Werth.

Bringt man den Ausdruck (8) in die Form:

$$(n + q) \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds} ds + q \left[\int \frac{x' - x}{r^3} \cos \varepsilon ds' - \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds'} ds' \right],$$

so ist der mit q multiplicirte Theil dem absoluten Werthe nach gleich dem Ausdrucke (9), dem Zeichen nach aber demselben entgegengesetzt.

Der Ausdruck für die Kraft, welche ein Stromelement auf

einen geschlossenen Leiter ausübt, besteht demnach aus zwei Theilen. Der eine Theil:

$$(10) \quad q \int \left[\frac{x' - x}{r^3} \cos \varepsilon - \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds} \right] ds'$$

ist für alle electrodynamischen Theorien derselbe und ist dem absoluten Werthe nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt demjenigen, welcher die von dem geschlossenen Leiter auf das Stromelement ausgeübte Kraft darstellt. Der andere Theil:

$$(n + q) \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds} ds'$$

ist derjenige, durch den sich die verschiedenen Theorien von einander unterscheiden. Dieser Theil ist zugleich derjenige, durch welchen sich diese Theorien von der electromagnetischen unterscheiden, da letztere für die von einem Elementarmagnet auf ein Stromelement ausgeübte Kraft denselben Ausdruck liefert, welchen die electrodynamischen Theorien für die Wirkung eines Elementarstromes auf ein Stromelement geben.

Es ist aber nach den Gleichungen (4):

$$3(n + q) = 2a + b - 2c + d$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (5):

$$3(n + q) = -3c + 3d,$$

also:

$$n + q = d - c.$$

Der Unterschied zwischen der electromagnetischen Theorie und der electrodynamischen ist daher in Bezug auf die von einem Stromelemente auf einen Elementarmagnet ausgeübten Kräfte durch den Ausdruck:

$$(11) \quad (d - c) \int \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dx'}{ds} ds' \quad \text{bestimmt.}$$

Die Ampère'sche Theorie enthält die den Constanten d und c entsprechenden Kräfte nicht, sie steht daher bezüglich der Ausdrücke für die Kräfte mit der electromagnetischen Theorie in vollständiger Uebereinstimmung.

Diese Uebereinstimmung besteht aber auch noch für die Theorien, welche transversal wirkende Kräfte enthalten, sobald diese Kräfte der Bedingung:

$$c = d$$

genügen. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der, dass die zwischen zwei Stromelementen thätigen Kräfte den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Elemente nicht progressiv zu bewegen vermögen, also sich entweder gegenseitig aufheben oder sich auf ein Kräftepaar reduciren. Diese Bedingung wird eben auch von den in der electromagnetischen Theorie eingeführten Kräften erfüllt.

Der Ausdruck (10) lässt sich, wie bekannt, zunächst für den Fall, als s' eine sehr kleine ebene Fläche umkreist, leicht berechnen, und auf diesen Fall lässt sich auch der allgemeine einer beliebigen geschlossenen Bahn zurückführen. Führt man:

$$\cos \epsilon = \cos \alpha \frac{dx'}{ds'} + \cos \beta \frac{dy'}{ds'} + \cos \gamma \frac{dz'}{ds'}$$

ein, so kann man das in (10) vorkommende Integral darstellen durch:

$$\frac{d}{dx} \int \frac{\cos \alpha dx' + \cos \beta dy' + \cos \gamma dz'}{r} - \frac{d}{ds} \int \frac{dx'}{r}.$$

Die nach der Leitung ds' auszuführenden Integrationen bestehen also in der Bestimmung der Integrale:

$$A = \int \frac{dx'}{r}, \quad B = \int \frac{dy'}{r}, \quad C = \int \frac{dz'}{r}.$$

Die zu berechnende Grösse erhält demnach die Form:

$$\cos \alpha \frac{dA}{dx} + \cos \beta \frac{dB}{dx} + \cos \gamma \frac{dC}{dx} - \frac{dA}{ds},$$

oder da:

$$\frac{d}{ds} = \cos \alpha \frac{d}{dx} + \cos \beta \frac{d}{dy} + \cos \gamma \frac{d}{dz}$$

ist, die Form:

$$\cos \gamma \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz} \right) - \cos \beta \left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right).$$

Es werde in der sehr kleinen von s' umschriebenen Fläche ein Punkt, etwa der Schwerpunkt der Fläche, gewählt, seine Coordinaten seien a', b', c' . Durch ihn werden drei zu den Axen x, y, z parallele Axen gelegt und bezüglich dieses neuen Axensystems seien ξ', η', ζ' die dem Stromelemente ds' entsprechenden Coordinaten, sodass:

$$x' = a' + \xi', \quad y' = b' + \eta', \quad z' = c' + \zeta'.$$

Die Distanz der Punkte x, y, z und a', b', c' soll R heissen. λ_1, μ_1, ν_1 sollen die Winkel sein, welche R mit den Coordinatenachsen einschliesst. Es bestehen sonach folgende Gleichungen:

$$R \cos \lambda_1 = a' - x, \quad R \cos \mu_1 = b' - y, \quad R \cos \nu_1 = c' - z,$$

$$R^2 = (a' - x)^2 + (b' - y)^2 + (c' - z)^2,$$

$$r^2 = R^2 - 2R(\xi' \cos \lambda_1 + \eta' \cos \mu_1 + \zeta' \cos \nu_1) + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

Mit Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung wird:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{\xi' \cos \lambda_1 + \eta' \cos \mu_1 + \zeta' \cos \nu_1}{R^2}.$$

Die Integrale A, B, C kann man nach Einführung der neuen Coordinaten auch in folgender Weise anschreiben:

$$A = \int \frac{d\xi'}{r}, \quad B = \int \frac{d\eta'}{r}, \quad C = \int \frac{d\zeta'}{r}.$$

Nach Einsetzung des obigen Ausdruckes für $1/r$ kommen zunächst die Integrale von $d\xi', d\eta', d\zeta', \xi'd\xi', \eta'd\eta', \zeta'd\zeta'$ vor, welche alle über die geschlossene Contour s' genommen. = 0 sind. Es bleiben noch die Integrale von $\eta'd\xi', \xi'd\eta'$ u. s. w. übrig. Diese bedeuten die Projectionen der von s' umschlossenen Fläche auf die Coordinatenebenen. Ist der Inhalt dieser Fläche f' , und bezeichnet man die Winkel, welche die Normale zu f' mit den Coordinatenachsen bildet, mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, so bestehen folgende Gleichungen:

$$\int \eta' d\zeta' = - \int \zeta' d\eta' = f' \cos \alpha_1, \quad \int \zeta' d\xi' = - \int \xi' d\zeta' = f' \cos \beta_1, \\ \int \xi' d\eta' = - \int \eta' d\xi' = f' \cos \gamma_1.$$

Somit wird:

$$A = \frac{f'}{R^2} (\cos \mu \cos \gamma_1 - \cos \nu \cos \beta_1)$$

$$B = \frac{f'}{R^2} (\cos \nu \cos \alpha_1 - \cos \lambda \cos \gamma_1)$$

$$C = \frac{f'}{R^2} (\cos \lambda \cos \beta_1 - \cos \mu \cos \alpha_1).$$

Man kann diese Formeln noch in einer anderen Weise ausdrücken, wenn man:

$$\cos \lambda_1 = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \cos \mu_1 = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \cos \nu_1 = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right)$$

einführt, also:

$$A = f' \cos \gamma_1 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right) - f' \cos \beta_1 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$B = f' \cos \alpha_1 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right) - f' \cos \gamma_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$C = f' \cos \beta_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{R} \right) - f' \cos \alpha_1 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right)$$

schreibt. Diese Werthe liefern nunmehr die Formel:

$$\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz} = -f' \frac{d}{dy} \left[\cos \alpha_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{R} \right) + \cos \beta_1 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right) + \cos \gamma_1 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right) \right],$$

bei deren Ableitung von der Relation:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

Gebrauch gemacht ist.

Die Differentialquotienten von $1/R$ nach x, y, z kann man durch die negativen Differentialquotienten derselben Grösse nach a', b', c' ersetzen. Ferner kann man, mit n' die zur Fläche f' errichtete Normale bezeichnend:

$$\cos \alpha_1 = \frac{da'}{dn'}, \quad \cos \beta_1 = \frac{db'}{dn'}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{dc'}{dn'},$$

$$\cos \alpha_1 \frac{d}{da'} \left(\frac{1}{R} \right) + \cos \beta_1 \frac{d}{db'} \left(\frac{1}{R} \right) + \cos \gamma_1 \frac{d}{dc'} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{d}{dn'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

und somit: $\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz} = f' \frac{d^2}{dn' dy} \left(\frac{1}{R} \right)$ setzen.

Auf dieselbe Weise findet man:

$$\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} = f' \frac{d^2}{dn' dz} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Das in (10) vorkommende Integral ist demnach bestimmt durch:

$$\frac{d}{dn'} \left[\cos \gamma \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right) - \cos \beta \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right) \right].$$

Das in (11) vorkommende Integral ist:

$$\frac{dA}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\cos \gamma_1 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right) - \cos \beta_1 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right) \right].$$

Sonach erhält man für die der *Axe* der x parallele Componente der Kraft, welche ein Stromelement auf einen Elementarstrom ausübt, eine Grösse, bestimmt durch das Product aus $ids \cdot if'/R^2$ und dem Factor:

$$(d-c) \frac{d}{ds} \left[\cos \gamma_1 \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right) - \cos \beta_1 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right) \right] \\ + q \frac{d}{dn} \left[\cos \gamma \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{R} \right) - \cos \beta \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{R} \right) \right].$$

Zur Berechnung specieller Aufgaben ist es bequemer, diesen Ausdruck als Function der Winkel, welche die Lagen des Stromelementes und des Elementarstromes bestimmen, zu haben. Es sollen noch die Winkel δ und δ_1 eingeführt werden, welche ds und die Axe des Elementarstromes mit R bilden. Die Cosinus derselben sind durch die Gleichungen:

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \lambda_1 + \cos \beta \cos \mu_1 + \cos \gamma \cos \nu_1$$

$$\cos \delta_1 = \cos \alpha_1 \cos \lambda_1 + \cos \beta_1 \cos \mu_1 + \cos \gamma_1 \cos \nu_1$$

gegeben.

Der obige Factor lässt sich dann durch:

$$(c-d) [\cos \beta \cos \gamma_1 - \cos \gamma \cos \beta_1 + 3 \cos \delta (\cos \beta_1 \cos \nu_1 - \cos \gamma_1 \cos \mu_1)] \\ + q [\cos \beta \cos \gamma_1 - \cos \gamma \cos \beta_1 - 3 \cos \delta (\cos \beta \cos \nu_1 - \cos \gamma \cos \mu_1)]$$

darstellen, und erhält man daraus durch cyclische Vertauschung der Winkel die Formeln für die Componenten nach den beiden anderen Axen.

II. Berechnung der Kräftepaare, welche ein Stromelement auf einen Elementarstrom ausübt.

Es werde innerhalb der vom Strome s' umkreisten Fläche der Schwerpunkt, dessen Coordinaten a', b', c' sind, als Anfangspunkt der Coordinaten ξ', η', ζ' , welche zu dem Elemente ds' gehören, gewählt. Sind dX', dY', dZ' die von ds auf das Element ds' ausgeübten Kräfte, so sind:

$$dZ' \cdot \eta' - dY' \cdot \zeta', \quad dX' \cdot \zeta' - dZ' \cdot \xi', \quad dY' \cdot \xi' - dX' \cdot \eta'$$

die Momente, mit welchen diese Kräfte den Elementarstrom um drei durch den Schwerpunkt gehende Axen zu drehen streben. Um die gesammten Drehungsmomente zu erfahren, hat man die obigen Ausdrücke über die ganze Leitung s' zu summieren.

Um speciell das für die Axe der x geltende Moment zu finden, hat man sonach das Integral von $dZ' \cdot \eta' - dY' \cdot \zeta'$ zu bilden. Die Werthe von dY' und dZ' sind nach der Formel (2) bestimmt durch:

$$dY' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} [(a-b-c-d) \cos \theta \cos \theta' \cos \mu + b \cos \varepsilon \cos \mu + c \cos \theta' \cos \beta + d \cos \theta \cos \beta']$$

$$dZ' = \frac{ii' ds ds'}{r^2} [(a-b-c-d) \cos \theta \cos \theta' \cos \nu + b \cos \varepsilon \cos \nu + c \cos \theta' \cos \gamma + d \cos \theta \cos \gamma'].$$

Setzt man in diesen Formeln:

$$\cos \mu = \frac{b' + \eta' - y}{r}, \quad \cos \nu = \frac{c' + \zeta' - z}{r},$$

$$\cos \beta' = \frac{d\eta'}{d\varepsilon'}, \quad \cos \gamma' = \frac{d\zeta'}{ds'},$$

und bildet die Ausdrücke für die Momente, so enthalten diese folgende vier Integrale:

$$\text{I. } \int \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r^3} [(c' - z) \eta' - (b' - y) \zeta'] ds',$$

$$\text{II. } \int \frac{\cos \varepsilon}{r^3} [(c' - z) \eta' - (b' - y) \zeta'] ds',$$

$$\text{III. } \int \frac{\cos \theta'}{r^2} [\cos \gamma' \cdot \eta' - \cos \beta' \cdot \zeta'] ds',$$

$$\text{IV. } \int \frac{\cos \theta}{r^3} [\eta' d\zeta' - \zeta' d\eta'].$$

Wenn der Strom s' eine sehr kleine Fläche umkreist, so kann man in diesen Integralen R für r setzen und statt der Winkel, welche r mit den Axen bildet, jene einführen, unter welchen R gegen die Axen geneigt ist. Demgemäss ist zunächst $\cos \theta = \cos \delta$ anzunehmen, und ferner:

$$\cos \theta' ds' = \cos \lambda_1 d\xi' + \cos \mu_1 d\eta' + \cos \nu_1 d\zeta'$$

zu setzen.

Man findet nun leicht, dass sich obige Integrale auf folgende Ausdrücke reduciren:

$$\text{I. } \frac{f' \cos \delta}{R^3} (\cos \alpha_1 - \cos \lambda_1 \cos \delta_1)$$

$$\text{II. } \frac{f'}{R^3} (\cos \alpha_1 \cos \delta - \cos \alpha \cos \delta_1)$$

$$\text{III. } \frac{f'}{R^2} (\cos \alpha_1 \cos \delta - \cos \lambda \cos \varepsilon_1)$$

$$\text{IV. } \frac{f'}{R^2} \cdot 2 \cos \alpha_1 \cos \delta.$$

Darin ist ein neuer Winkel ε_1 eingeführt, es ist der Winkel, welchen ds mit der Axe des Elementarstromes einschliesst. Sein Cosinus ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos \varepsilon_1 = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1.$$

Man erhält sonach für das gesuchte Drehungsmoment eine Grösse, welche durch das Product aus $ids \cdot i'f''/R^2$ in den Ausdruck:

$$(a + d) \cos \alpha_1 \cos \delta - (a - b - c - d) \cos \lambda_1 \cos \delta \cos \delta_1 \\ - b \cos \alpha \cos \delta_1 - c \cos \lambda_1 \cos \varepsilon_1$$

bestimmt ist.

Die electromagnetische Theorie liefert für das nach der Axe der x zerlegte Kräftepaar, welches ds auf einen Elementarmagnet ausübt, eine Formel, welche $idsm/R^2$ als den einen. und:

$$\cos \alpha \cos \delta_1 - \cos \lambda_1 \cos \varepsilon_1$$

als zweiten Factor enthält.

Der Vergleich dieses Factors mit dem aus der electrodynamischen Theorie abgeleiteten lehrt, dass die beiden nur unter der Annahme:

$$a = 0, d = 0, b + c = 0$$

zusammenfallen, eine Annahme, die, wie ich in der schon öfter citirten Abhandlung gezeigt habe, mit der Grassmann'schen Formel einerlei ist.

Diese Theorie ist daher die einzige, welche dieselben Kräftepaare, wie die electromagnetische Theorie liefert. Wie aber im Vorhergehenden nachgewiesen worden ist, stimmen mit der letzteren in Bezug auf die Ausdrücke für die Kräfte nur jene electrodynamischen Theorien überein, in welchen die Bedingung $c = d$ erfüllt ist. Dies ist in der Grassmann'schen, in welcher $d = 0$ und c von Null verschieden angenommen ist, nicht der Fall, sie weicht also von der electromagnetischen in den Ausdrücken für die Kräfte ab.

Es folgt somit das Resultat, dass von den electrodynamischen Theorien des Magnetismus gar keine mit der electromagnetischen Theorie in vollständiger Uebereinstimmung steht.

Von den Theorien, welche für die Kräfte dieselben Ausdrücke liefern, wie die electromagnetische, steht der letzteren

jene am nächsten, welche alle vier elementaren Kräfte annimmt mit den spezifischen Intensitäten $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$ oder $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$, je nachdem man das electrodynamische oder das electromagnetische Strommaass wählt. Das nach der Axe der x geschätzte Kräftepaar ist dann unter Anwendung des letzteren Strommaasses durch den Factor

$$2 \cos \alpha_1 \cos \delta + \cos \alpha \cos \delta_1 - \cos \lambda_1 \cos \varepsilon_1$$

bestimmt.

Dieser Factor unterscheidet sich von dem aus der electromagnetischen Theorie abgeleiteten durch das erste Glied. Dieses stellt die nach der Axe der x genommene Componente eines Kräftepaares dar, dessen Axe mit der Normale zum Elementarstrom, also mit der magnetischen Axe des Magnetes zusammenfällt. Der absolute Betrag dieses Paares ist $2 \ddot{u} f' / R^2 ds \cos \delta$. Es rührt von der in die Linie R fallenden Componente von ds her, und sucht den Elementarstrom um dessen Axe zu drehen. Nach der electromagnetischen Theorie kann die longitudinale Componente $ds \cos \theta$ kein Kräftepaar liefern, es kommt in derselben auch eine Drehung eines Elementarmagnetes um seine Axe nicht vor. Letzteres ist, abgesehen von der besonderen Art der zur Begründung der Theorie verwendeten Thatsachen, auch schon dadurch bedingt, dass die magnetischen Pole als Punkte betrachtet werden.

Zum Schluss will ich noch bemerken, dass die im Vorhergehenden angegebene Berechnung der Kräftepaare, welche ein Stromelement auf einen Elementarstrom ausübt, in viel einfacherer Weise sich ausführen lässt, wenn man dem letzteren die Gestalt eines unendlich kleinen Rechteckes verleiht, wie es in der Einleitung bei der Vergleichung der electromagnetischen Theorie mit der Ampère'schen gemacht wurde.

Die drehende Wirkung eines Stromelementes auf einen Elementarstrom lässt sich nämlich auf vier einfache Fälle, ähnlich wie es bezüglich der Kräfte zwischen zwei Stromelementen der Fall ist, zurückführen. Denn, sowie letztere, kann man auch die Elementarströme in Componenten zerlegen, unter welchen die Projectionen der von dem Strome umkreisten Fläche auf bestimmte Ebenen zu verstehen sind.

Die erwähnten vier elementaren Fälle sind durch die in der Einleitung enthaltenen zwei Figuren dargestellt.

1. Ein longitudinales Element gh wirkt auf einen Elementarstrom $\alpha\beta\gamma\delta$ mit ebenfalls longitudinaler Axe (Fig. 2) drehend durch die auf $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ wirkenden durch die Constante d characterisirten Kräfte. Die Drehung geschieht um die mit R zusammenfallende Axe des Elementarstromes mit einem Momente, welches durch $2d \cdot i' gh \cdot i' \alpha\beta\gamma\delta$ bestimmt ist.

2. Ein longitudinales Element gh wirkt auf einen Elementarstrom mit transversaler Axe (Fig. 1) drehend durch die auf $\beta\gamma$ und $\delta\alpha$ ausgeübte Abstossung und Anziehung und durch die auf $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ wirkenden transversalen durch die Constante d characterisirten Kräfte. Die Drehung geschieht wieder um die Axe des Elementarstromes mit einem Momente $(a+d) igh \cdot i' \alpha\beta\gamma\delta$.

3. Ein transversales Element ef wirkt auf einen Elementarstrom $\alpha\gamma\beta\delta$ mit longitudinaler Axe (Fig. 2) drehend durch die auf $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ ausgeübte Anziehung und Abstossung. Die Drehung geschieht um eine zu ef parallele Axe mit dem Momente.
 $-b \cdot ief \cdot i' \alpha\beta\gamma\delta$.

4. Ein transversales Element ef wirkt auf einen Elementarstrom $\alpha\beta\gamma\delta$ mit ebenfalls transversaler und zu ef paralleler Axe (Fig. 1) drehend durch die auf die Elemente $\beta\gamma$ und $\delta\alpha$ ausgeübten transversalen Kräfte. Die Drehung geschieht um die Verbindungslinie R als Axe mit einem Momente
 $-c \cdot ief \cdot i' \alpha\beta\gamma\delta$.

Zu diesen vier Sätzen könnte man noch als fünften hinzufügen, dass ein transversales Element auf einen Elementarstrom mit gleichfalls transversaler aber zur Richtung des Elementes senkrechter Axe kein Kräftepaar ausübt.

Sind ein gegen R unter δ geneigtes Stromelement und ein Elementarstrom, dessen Axe mit R den Winkel δ' bildet, und der die Fläche f umkreist, gegeben, so sind in den Ausdrücken für die Momente gh und $ef = ds \cos \delta$ und $= ds \sin \delta$ zu nehmen; ferner ist $\alpha\beta\gamma\delta$ in 1. $= f' \cos \delta_1$, in 2. $= f' \sin \delta_1$, in 3. $= f' \cos \delta_1$ und in 4. $= f' \sin \delta_1 \cos \omega_1$ zu setzen. Die Zerlegung dieser Momente nach den Coordinatenaxen geschieht in derselben Weise, wie die der Kräfte.