schen Lunge gegen den Lufteintritt relativ gross ist, so genügen die elastischen Kräfte, mit welchen der Thorax in seine natürliche Expirationsstellung überzugehen strebt, nachdem der intrauterine Druck durch die Geburt beseitigt ist, nicht zur Entfaltung von Lunge und Thorax, sondern es müssen grössere Kräfte einwirken, wie sie durch die Inspirationsmuskeln oder durch künstliche Aufblasung entwickelt werden. Ist ferner die Lunge einmal lufthaltig geworden, so genügen wiederum die elastischen Kräfte derselben nicht, den Luftgehalt wieder völlig bis zur Atelectase auszutreiben. Jedenfalls zwingt uns nichts zu der Annahme, dass die erste Entfaltung der Lunge, sei es durch Inspiration oder durch Luft-einblasung, an der Thoraxwand selbst irgend eine bleibende Veränderung hervorrufe.

(Aus dem physiologischen Laboratorium in Zürich.)

Ueber Brechung bei schiefer Incidenz, mit besonderer Berücksichtigung des Auges. II. Theil.

(Vergl. dies Archiv Bd. XVIII. S. 443—455 und Taf. VI.)

Von

L. Hermann.

5. Die Periscopie dünner Linsen.

Die Güte eines astigmatischen Bildes ist um so grösser, je kleiner der gegenseitige Abstand beider Brennpunkten, d. h. die Entfernung $F_2 - F_1$. Indessen muss man, um vergleichbare Werthe zu erhalten, auch die Grösse des Bildes berücksichtigen, ähnlich wie bei gewöhnlichen Zerstreuungsbildern. Gleich grosse Zerstreuungskreise wirken um so störender je kleiner das Bild ist.

In meiner ersten Arbeit über den vorliegenden Gegenstand (1874) habe ich deshalb den Werth

$$\frac{F_2 - F_1}{F},$$

worin F die centrale Brennweite, als ein reciprokes Maass der Güte des Bildes bei gegebenem Incidenzwinkel betrachtet. Es ergab sich für die dünne Linse

$$\frac{F_2 - F_1}{F} = \frac{(n - 1) \sin^2 \varphi}{A},$$

worin $A = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} - \cos \varphi$; d. h. bei gegebener Brennweite F und gegebenem Incidenzwinkel φ ist die Brennstrecke um so kürzer, je kleiner der Brechungsindex der Linse. Ferner ergab sich für eine geschichtete dünne Linse, von der Art der Krystalllinse, d. h. mit nach innen zunehmenden Indices und zunehmender Krümmung der Trennungsflächen, für gegebene äussere Begrenzung, gegebene Brennweite und gegebenen Incidenzwinkel eine kürzere Brennstrecke, als wenn die Linse bei sonst gleichen Verhältnissen homogen ist ¹⁾.

Indessen ergibt eine weitere Ueberlegung, dass die Grösse $\frac{F_2 - F_1}{F}$ kein ausreichendes Maass ist für die Vergleichung der Periscopie. Man betrachte die der vorigen Arbeit beigegebene Figur 2 (Band XVIII. Tafel 6 dieses Archivs). Vermindert man bei gleichbleibender centraler Brennweite den Index der dünnen Linse LL , so werden allerdings die auf den Vectoren sichtbaren Abstände $F_2 - F_1$ kleiner, wie aus obiger Betrachtung hervorgeht; jedoch rücken gleichzeitig die Punkte F_2 und F_1 der Linse näher, durch Aenderung der beiden gezeichneten Curven, welche den geometrischen Ort der beiden Brennpunkte darstellen. Die Bilder selbst also werden gleichzeitig kleiner. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich, dass man ein wirklich zuverlässiges Maass der Bildergüte erst erhält, wenn man den Werth

$$\frac{F_2 - F_1}{F_2}$$

aufstellt, dessen Nenner der Grösse des Bildes proportional ist. Man findet aber jetzt für die dünne Linse

$$\frac{F_2 - F_1}{F_2} = \sin^2 \varphi,$$

d. h. die Güte des Bildes bei einer dünnen Linse ist lediglich vom Incidenzwinkel, und nicht von den optischen Constanten der Linse abhängig. Auch für die geschichtete Linse findet man den Werth $\frac{F_2 - F_1}{F_2}$ unabhängig von den optischen Constanten. Der Vortheil, welchen die bezeichnete Schichtung durch Verkürzung der Brenn-

1) Vgl. meine im ersten Theil, S. 443, citirten Arbeiten.

strecke bei gegebenem Incidenzwinkel bietet, wird also genau dadurch aufgewogen, dass die Bilder durch Annäherung der Brennpuncten entsprechend verkleinert werden. Dies gilt natürlich nur für die unendlich dünne Linse.

6. Die Periscopie dicker Linsen.

In meiner ersten Arbeit konnte ich für dicke Linsen keine allgemeinen Ausdrücke aufstellen. Die im ersten Theil der vorliegenden Arbeit gegebenen Gleichungen liefern uns aber nunmehr hierzu die Grundlagen. Wir beschränken uns zunächst auf solche Strahlenbündel, welche durch den optischen Mittelpunct der Linse hindurchgehen.

Der Zähler desjenigen Ausdrucks, welcher ein reciprokes Maass der Güte des Bildes liefert, ist wiederum $F_2 - F_1$, und ergibt sich aus den Gleichungen 35 und 36. Der Nenner ist aber hier nicht gleich F_2 zu nehmen, denn F_2 zählt von der hinteren Linsenfläche ab, ist also kein Maass für die Grösse des Bildes. Letztere wird vielmehr gemessen durch den Abstand des zweiten Brennpuncts (in welchem wir uns die auffangende Fläche denken) von der Axe, auf dem Leitstrahl gemessen. Wir haben demnach dem gebrochenen Leitstrahl MB in Figur 6 (Reproduction der

Figur 6.

Figur 4 des 1. Theils) noch das Stück BD' hinzuzufügen, und wenn wir dasselbe mit S bezeichnen, so ist der Nenner des geforderten Ausdrucks $F_2 + S$, also

$$\frac{F_2 - F_1}{F_2 + S} = \frac{1}{B}$$

das reciproke Maass der absoluten Bildgüte B.

Der Werth von S ergibt sich aus der Betrachtung des Dreiecks GBD' zu

$$(43) \quad S = \varrho \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} = \frac{\varrho \cdot T}{n(r + \varrho) - AT} \quad (\text{nach Gleich. 37 u. 39}),$$

also

$$(44) \quad F_2 + S = \frac{\varrho}{A} \cdot \frac{n r}{n(r + \varrho) - AT}.$$

Hiernach ist

$$\frac{1}{B} = \frac{\frac{\varrho}{A} \cdot \frac{n r}{n(r + \varrho) - AT} - \frac{N\varrho}{A} \cdot \frac{n r \cos^2 \alpha - AT}{n(r + \varrho) \cos^2 \alpha - AT}}{\frac{\varrho}{A} \cdot \frac{n r}{n(r + \varrho) - AT}}$$

oder

$$(45) \quad \frac{1}{B} = \frac{1}{nr} \left\{ nr - AT - N \cdot \frac{(nr \cos^2 \alpha - AT)(n(r + \varrho) - AT)}{n(r + \varrho) \cos^2 \alpha - AT} \right\}.$$

In diesen Gleichungen ist (vgl. Seite 452 und 454 der vorigen Arbeit)

$$\begin{aligned} A &= n \cos \alpha - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} \\ N &= 1 - n^2 \sin^2 \alpha \\ T &= (r + \varrho) \cos \alpha - \sqrt{D^2 - (r + \varrho)^2 \sin^2 \alpha} \\ D &= r + \varrho - d. \end{aligned}$$

Die Gleichung 45, welche in voller Strenge das reciproke Maass der absoluten Güte des Bildes für eine homogene Linse liefert, ist zu vergleichenden Untersuchungen über die Periscopie noch nicht ausreichend. Denn sie enthält nur den Winkel α , d. h. den inneren Brechungswinkel des Strahlenbündels. Ändert man aber bei gegebener Incidenzschiefe des Bündels (welches stets durch den optischen Mittelpunkt gehen soll) irgend etwas an der Linse, so ändert sich zugleich der Winkel α . Statt des Winkels α muss also in die Gleichung 45 der Incidenzwinkel ε , d. h. der Winkel zwischen einfallendem Bündel und Axe, eingeführt werden, der von den Constanten der Linse unabhängig ist. Die verwickelte Beziehung zwischen α und ε wird durch die Gleichung

40 oder 41 dargestellt. Man hätte also aus 40 (oder 41) und 45 α zu eliminiren, um die gesuchte Beziehung zwischen Güte des Bildes und Incidenzwinkel zu erhalten. Diese Beziehung fällt aber ungemein verwickelt aus.

Um eine übersehbare Beziehung zu gewinnen, beschränken wir uns auf solche Winkel, deren Sinuspotenzen von der dritten ab vernachlässigt werden dürfen.

Mit dieser Beschränkung erhält man folgende Näherungswerthe:

$$A = (n - 1) \left(1 + \frac{n}{2} \sin^2 \alpha \right)$$

$$T = d \left(1 + \frac{r + \varrho}{2D} \sin^2 \alpha \right)$$

$$AT = (n - 1) d \left[1 + \frac{1}{2} \left(n + \frac{r + \varrho}{D} \right) \sin^2 \alpha \right],$$

und setzen wir zur Abkürzung für einen häufig vorkommenden Ausdruck

$$Q = n(r + \varrho) - (n - 1)d,$$

so nimmt mit Einsetzung dieser Werthe die Gleichung 45 die Form an:

$$(46) \quad \frac{1}{B} = \frac{1}{r} \left\{ n[nr - (n - 1)d] + \frac{(n - 1)d\varrho}{Q} \right\} \sin^2 \alpha.$$

Ferner gelangt man, durch Einführung der gleichen Vernachlässigung in eine der Gleichungen 39, 40 oder 41, zu der Gleichung

$$(47) \quad \sin \alpha = \frac{D}{Q} \sin \varepsilon,$$

so dass also die gesuchte Beziehung zwischen Bildgüte B und Incidenzwinkel ε lautet:

$$(48) \quad \frac{1}{B} = \frac{D^2}{rQ^2} \left\{ n[nr - (n - 1)d] + \frac{(n - 1)d\varrho}{Q} \right\} \sin^2 \varepsilon.$$

Es ergibt sich also (für den angegebenen Winkelbereich) der Satz:

Bei einer gegebenen Linse ist die Bildgüte dem Quadrate des Sinus des Incidenzwinkels umgekehrt proportional.

Offenbar ist nun der Ausdruck $B \sin^2 \varepsilon$ das natürliche vom Incidenzwinkel befreite Maass der Periscopie P, durch welches die periscopischen Eigenschaften verschiedener Linsen ohne Weiteres verglichen werden können. Wir setzen also

$$B \sin^2 \varepsilon = P,$$

und haben

$$(49) \quad \frac{1}{P} = \frac{D^2}{r Q^2} \left\{ n [nr - (n-1)d] + \frac{(n-1)d \varrho}{Q} \right\}.$$

Es erweist sich nützlich in diese Gleichung die Haupt- oder Knotenpunctdistanz E der Linse einzuführen, welche ist

$$(50) \quad E = \frac{(n-1)dD}{Q}.$$

Soll dieselbe explicite in der Gleichung 49 enthalten sein, so muss eine der vier Constanten der Linse eliminirt werden. Wir wählen dazu den Brechungsindex n . Aus 50 ergibt sich

$$(51) \quad n = \frac{d(D+E)}{D(d-E)}, \quad n-1 = \frac{E(r+\varrho)}{D(d-E)}, \quad Q = \frac{d(r+\varrho)}{d-E}.$$

Setzt man diese Werthe in 49 ein, so entsteht nach einer Reihe von Umformungen der einfache Ausdruck

$$(52) \quad \frac{1}{P} = \frac{D(D+E)}{(r+\varrho)^2} - \frac{\varrho}{r} \frac{[D(d-E) + d(r+\varrho)]^2}{d^2(r+\varrho)^2}.$$

Von den beiden Gliedern dieses Ausdrucks ist das erste bei Systemen, welche noch wirkliche Linsengestalt haben, das bei weitem einflussreichere, und gewährt schon einen sehr annähernden Ausdruck für die (reciproke) Periscopie. Es ist für r und ϱ symmetrisch. Das zweite, kleinere Glied ist dagegen für r und ϱ nicht symmetrisch. Da es für eine Linse stets negativ ist (denn $D = r + \varrho - d$ ist positiv, und ebenso $d - E$), so folgt aus ihm, dass eine gegebene Convexlinse periscopischer ist, wenn ihre stärker gekrümmte Fläche dem Objecte zugekehrt wird. Indess werden wir nochmals auf diesen Schluss zurückkommen, und überhaupt uns aus später anzugebenden Gründen enthalten, aus Gleichung 52 weitere Schlüsse zu ziehen.

7. Die Cardinalpuncte einer Linse für schiefen Strahlendurchgang.

Um zu weiteren Sätzen über den schiefen Durchgang zu gelangen, nehmen wir den optischen Mittelpunkt der Linse als leuchtend an, und suchen seine von beiden Linsenflächen gelieferten Bilder. Bei axialen Strahlen sind diese Bilder bekanntlich die beiden Hauptpuncte. Die schiefen Strahlen geben für jeden gegebenen Incidenzwinkel je zwei, also vier Brennpuncten, deren Orte

in den Linien LD und MD' der Figur 6 liegen müssen. Die Abstände des optischen Mittelpunctes von beiden Linsenflächen bei schiefer Incidenz sind die Linien CA und CB, d. h. die beiden Abschnitte der Transversale T, welche sich nach einem bekannten Satze verhalten wie die Krümmungsradien r und ϱ . Es ist also

$$CA = \frac{rT}{r + \varrho} \quad \text{und} \quad CB = \frac{\varrho T}{r + \varrho}.$$

Um die beiden von der vorderen Linsenfläche gelieferten Bilder des optischen Mittelpunctes zu finden, haben wir den Werth CA in die Gleichungen 1 und 2 für f_2 resp. f_1 einzuführen, und die Gleichungen für e zu lösen. Wir erhalten als Abstände der (virtuellen) Brennpuncten, auf der Linie LD von A nach innen gemessen, die Werthe:

$$(53) \quad \varphi_2 = \frac{rT}{n(r + \varrho) - AT} \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \frac{NrT}{n(r + \varrho) \cos^2 \alpha - AT},$$

und ebenso für die von der hinteren Fläche gelieferten virtuellen Bilder des optischen Mittelpunctes die Abstände (von B aus nach D' hin gemessen):

$$(54) \quad \psi_2 = \frac{\varrho T}{n(r + \varrho) - AT} \quad \text{und} \quad \psi_1 = \frac{N\varrho T}{n(r + \varrho) \cos^2 \alpha - AT}.$$

In dem Werthe von ψ_2 erkennen wir sofort wieder die schon oben Seite 373 bestimmte und mit S bezeichnete Strecke BD', und ebenso ergibt sich aus der Betrachtung des Dreiecks HAD, dass φ_2 nichts anderes ist als die Länge AD. Da D und D' diejenigen Punkte sind, welche im 1. Theil als die „Directions-puncte“ bezeichnet wurden, so ergibt sich:

Die schiefwinkligen zweiten Bilder¹⁾ des optischen Mittelpuncts sind die Directions-puncte (von denen schon erwähnt ist, dass sie bei abnehmendem Incidenzwinkel schliesslich in die Knoten- oder Hauptpuncte übergehen).

Die Directions-puncte sind also auch untereinander conjugirt, der eine das zweite Bild des andern.

Die ersten Bilder E und E' des optischen Mittelpuncts, welche

1) Es wäre besser gewesen, wenn von Anfang an die Indices 1 und 2 für beide Brennpuncten vertauscht worden wären; denn die jetzt mit dem Index 2 versehenen stellen durchweg den einfacheren Fall dar. Ich habe jedoch die von mir angewandte Bezeichnung schon in der Literatur vorgefunden, und eine Aenderung würde jetzt Verwirrung anrichten.

von A und B um die Strecken φ_1 resp. ψ_1 entfernt sind, liegen dagegen nicht in der Axe, sondern in den Linien AD und BD', von den Directions- und Seitenpunkten um die Strecke $DE = \varphi_2 - \varphi_1$, resp. $D'E' = \psi_2 - \psi_1$ entfernt. Ich werde sie als „Seitenpunkte“ bezeichnen; also

die schiefwinkligen ersten Bilder des optischen Mittelpuncts sind die Seitenpunkte,

welche ebenfalls unter einander conjugirt sind.

Beim Incidenzwinkel Null fallen Knoten-, Directions- und Seitenpunkte zusammen. Mit zunehmendem Incidenzwinkel rücken die Directions- und Seitenpunkte von den Knotenpunkten fort, und zwar erstere in der Axe, letztere in einer eigenthümlichen Curve, indem sie sich sowohl von der Mitte als von der Axe der Linse entfernen.

Weitere wichtige Beziehungen erhält man, wenn man die Entfernungen der Brennpuncte der Linse nicht von der Axe, sondern von den gleichnamigen inneren Cardinalpuncten aus bemisst, also die Werthe $F_2 + \psi_2$, $F_1 + \psi_1$, $f_2 + \psi_2$, $f_1 + \psi_1$, $e_2 + \varphi_2$, $e_1 + \varphi_1$ einführt. Man erhält dann aus den Gleichungen 26, 27¹⁾, 35, 36, 53, 54 die folgenden, deren Ableitung ich dem Leser überlasse:

$$(55) \quad \frac{1}{e_2 + \varphi_2} + \frac{1}{f_2 + \psi_2} = \frac{1}{F_2 + \psi_2}$$

$$(56) \quad \frac{1}{e_1 + \varphi_1} + \frac{1}{f_1 + \psi_1} = \frac{1}{F_1 + \psi_1}.$$

Diese Gleichungen gelten in voller Strenge. Bezeichnet man ferner mit E_2 und E_1 die vorderen Hauptbrennweiten der Linse für schiefe Incidenz, so ergibt sich aus denselben Ungleichen:

$$(57) \quad E_2 + \varphi_2 = F_2 + \psi_2 \quad \text{und} \quad E_1 + \varphi_1 = F_1 + \psi_1,$$

so dass man die folgenden, ebenfalls völlig strengen Gleichungen erhält:

$$(58) \quad \frac{E_2 + \varphi_2}{e_2 + \varphi_2} + \frac{F_2 + \psi_2}{f_2 + \psi_2} = 1$$

$$(59) \quad \frac{E_1 + \varphi_1}{e_1 + \varphi_1} + \frac{F_1 + \psi_1}{f_1 + \psi_1} = 1,$$

1) Diese beiden Gleichungen sind zuvor für Mitteldurchgang umzugestalten, indem $M = N$, $B = A$, $\beta = \alpha$ gesetzt wird.

welche den bekannten Gleichungen für centralen Durchgang völlig analog und zur Berechnung der schiefwinkligen Bilder endlich entfernter Objecte sehr wichtig sind. Für die dünne Linse gehen sie in die schon angeführten Gleichungen 11 und 12 über.

Man ersieht hieraus, dass die Directions- und Seitenpunkte zu den schiefwinkligen Brennpuncten genau in gleicher Beziehung stehen, wie bei normalem Durchgang die Haupt- oder Knotenpunkte, so dass wir volles Recht haben, sie als schiefwinklige Cardinalpunkte der Linse zu bezeichnen.

Von grossem Interesse ist es noch, die gegenseitigen Distanzen dieser Punkte zu berechnen.

Für die Distanz der Directionspunkte $DD' = \mathcal{A}_2$ haben wir schon die Gleichung 42 berechnet, wonach

$$\mathcal{A}_2 = \frac{D \cdot AT}{n(r + \varrho) - AT}.$$

Bis auf Grössen dritter Ordnung genau erhalten wir hieraus

$$\mathcal{A}_2 = \frac{(n-1) dD}{Q} + \frac{(n-1) dD}{2Q} \cdot n(r + \varrho) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha,$$

und da die Distanz der Haupt- oder Knotenpunkte

$$E = \frac{(n-1) dD}{Q},$$

so ist

$$(60) \quad \mathcal{A}_2 = E + \frac{E}{2} n(r + \varrho) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha.$$

Bezeichnen wir weiter mit $\mathcal{A}_1 = EE'$ die Distanz beider Seitenpunkte, so finden wir dieselbe aus dem Dreieck NEE' (Fig. 6), in welchem $NE' = DD' = \mathcal{A}_2$, $NE = \varphi_2 - \varphi_1 + \psi_2 - \psi_1$ und Winkel $ENE' = 180^\circ - \varepsilon$. Es ist also

$$(61) \quad \mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_2^2 + (\varphi_2 - \varphi_1 + \psi_2 - \psi_1)^2 + 2\mathcal{A}_2(\varphi_2 - \varphi_1 + \psi_2 - \psi_1) \cos \varepsilon.$$

Eine genaue Berechnung ergiebt einen höchst complicirten Ausdruck. Beschränken wir uns aber auf den schon früher gewählten Gültigkeitsbereich, so haben wir

$$\mathcal{A}_2^2 = E^2 + E^2 n(r + \varrho) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha \text{ (aus 60),}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 + \psi_2 - \psi_1 = n(r + \varrho) d \frac{nQ - (r + \varrho)}{Q^2} \sin^2 \alpha \text{ (aus 53, 54);}$$

da ferner

$$nQ - (r + \varrho) = (n-1)(nD + r + \varrho) = (n-1)(D + Q),$$

so können wir schreiben

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 + \psi_2 - \psi_1 &= n(n-1)(r+e)d \frac{D+Q}{Q^2} \sin^2 \alpha \\ &= n(r+e)E \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Endlich ist nach Gleichung 42

$$A_2 \cos \varepsilon = \sqrt{A_2^2 - A^2 T^2 \sin^2 \alpha},$$

und da dieser Werth in 61 nur als Factor eines schon mit $\sin^2 \alpha$ multiplicirten Gliedes vorkommt, so ist in unserm Falle dafür zu setzen

$$(n-1)d \sqrt{\frac{D^2}{Q^2} - \sin^2 \alpha}, \text{ oder } \frac{(n-1)dD}{Q} = E.$$

Wir erhalten somit aus 61, da das zweite Glied der rechten Seite wegen des Factors $\sin^2 \alpha$ ganz ausfällt,

$$A_1^2 = E^2 + E^2 n(r+e) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha + 2E^2 n(r+e) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha,$$

so dass

$$(62) \quad A_1 = E + \frac{3}{2} E n(r+e) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha.$$

Aus 60 und 62 folgt also:

$$(63) \quad A_1 - A_2 = E \cdot n(r+e) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha = (\varphi_2 + \psi_2) - (\varphi_1 + \psi_1)^1)$$

und hieraus die merkwürdige, natürlich nur für den angegebenen Winkelbereich gültige Beziehung

$$(64) \quad 3A_2 - A_1 = 2E.$$

Durch die Distanz der Haupt- und der Directionspuncte ist also jedesmal auch die der Seitenpuncte gegeben, ohne dass die unmittelbaren Constanten der Linse in Betracht kommen.

8. Modificirte Bemessung der Bildgüte und der Periscopie.

Ueberraschend einfache Ausdrücke erhält man, wenn man auch in den oben bezeichneten Werthen für B und P statt der Brennweiten F_2, F_1 , die Längen $F_2 + \psi_2, F_1 + \psi_1$ einführt, d. h. die Bilddistanzen von den zugehörigen inneren Cardinalpuncten aus misst. Wir setzen also

1) Die Gleichung $A_1 = A_2 + (\varphi_2 + \psi_2) - (\varphi_1 + \psi_1)$ erhält man kürzer direct durch Betrachtung des Dreiecks ENE' unter Berücksichtigung der angenommenen Kleinheit des Winkels ε .

$$(65) \quad \frac{1}{B'} = \frac{(F_2 + \psi_2) - (F_1 + \psi_1)}{F_2 + \psi_2}, \quad \text{und} \quad P' = B' \sin^2 \varepsilon,$$

zunächst ohne Prüfung der physicalischen Bedeutung dieses Ausdrucks.

Aus den bisherigen Gleichungen ergibt sich

$$(66) \quad F_2 + \psi_2 = \frac{1}{A} \cdot \frac{n r \varrho}{n(r + \varrho) - AT}$$

$$(67) \quad F_1 + \psi_1 = \frac{N}{A} \cdot \frac{n r \varrho \cos^2 \alpha}{n(r + \varrho) \cos^2 \alpha - AT}.$$

Führt man auch hier Näherungswerthe ein, so ist, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{n r \varrho}{(n-1)Q} = F \quad \text{und} \quad n + \frac{r + \varrho}{D} = \frac{Q + D}{D};$$

$$(68) \quad F_2 + \psi_2 = F - \frac{F}{2} \left(n - (n-1) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) d \right) \sin^2 \alpha,$$

$$(69) \quad F_1 + \psi_1 = F_2 + \psi_2 - F \left(n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} \right) \sin^2 \alpha,$$

so dass

$$(70) \quad \frac{1}{B'} = \left(n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} \right) \sin^2 \alpha = \frac{D^2}{Q^2} \left(n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} \right) \sin^2 \varepsilon$$

und

$$(71) \quad \frac{1}{P'} = \frac{D^2}{Q^2} \left(n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} \right).$$

Bildet man weiter durch Division der Gleichungen 60 und 63 den Ausdruck

$$\frac{A_1 - A_2}{A_2} \left(= 2 \cdot \frac{A_2 - E}{E} \right) = n(r + \varrho) \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{Q} \right) \sin^2 \alpha,$$

so erhält man durch Umformung, da

$$\begin{aligned} n(r + \varrho) \frac{D + Q}{DQ} &= \frac{n(r + \varrho)}{n-1} \cdot \frac{nQ - (r + \varrho)}{DQ} = \frac{r + \varrho}{(n-1)D} \left(n^2 - \frac{n(r + \varrho)}{Q} \right) \\ &= \frac{d - E}{E} \left(n^2 - \frac{n(r + \varrho)}{Q} \right), \end{aligned}$$

$$(72) \quad 2 \cdot \frac{A_2 - E}{d - E} = \left(n^2 - \frac{n(r + \varrho)}{Q} \right) \sin^2 \alpha,$$

und subtrahirt man endlich die Gleichung 72 von 70, so erhält man die merkwürdige Gleichung

$$(73) \quad \frac{1}{B'} = 2 \frac{A_2 - E}{d - E} + \sin^2 \alpha.$$

Ferner kann man noch aus den Gleichungen 70 und 73 $\sin^2 \alpha$ eliminiren, und erhält so

$$(74) \frac{1}{B'} = 2 \frac{A_2 - E}{d - E} \cdot \frac{n^2 Q - (n-1)d}{n^2 Q - n(r+e)} = 2 \frac{A_2 - E}{d - E} \left(1 + \frac{Q}{n^2 Q - n(r+e)} \right).$$

Diese Gleichung enthält den Incidenzwinkel nur noch in dem Werth A_2 . Für Umformungen der Gleichungen 72–74 ist zu beachten, dass

$$2 \frac{A_2 - E}{d - E} = \frac{A_1 - A_2}{d - E} = \frac{(\varphi_2 + \psi_2) - (\varphi_1 + \psi_1)}{\varphi_2 + \psi_2}.$$

Endlich kann man aus 74 noch n mittels der Gleichungen 51 herauschaffen, und erhält dann

$$(75) \frac{1}{B'} = \frac{2(A_2 - E)}{E(d - E)(D + E)} \cdot \frac{d^2(D + E)^2 - DE(d - E)^2}{d^2 - DE + 2dD}$$

und ebenso kann man aus 74 r , e und Q herauschaffen (mittels 51) und erhält

$$(76) \frac{1}{B'} = 2 \frac{A_2 - E}{d - E} \left(1 + \frac{d}{n[E + (n-1)d]} \right).$$

Untersuchen wir nunmehr die physicalische Bedeutung des Werthes B' , für welchen wir so merkwürdige und einfache Beziehungen gefunden haben. Früher maassen wir die Astigmatie des Bildes nach der Länge der Brennstrecke, bezogen auf die Grösse des Bildes; dies war der Werth $\frac{1}{B}$; $\frac{1}{B'}$ dagegen ist die Differenz der beiden Bildgrössen, bezogen auf ihre absolute Grösse; denn die Grössen der Bilder sind, wie man leicht findet, den Werthen $F_2 + \psi_2$, resp. $F_1 + \psi_1$, proportional; im Nenner aber ist es, bei dem gewählten Näherungsgrade, einerlei, ob wir $F_1 + \psi_1$ oder $F_2 + \psi_2$ oder auch F setzen.

Offenbar lässt sich auch B' , ebensogut wie B , als ein Maass der Bildgüte, und P' so gut wie P als ein Maass der Periscopie betrachten. Die neuen Maasse aber unterscheiden sich von den früheren dadurch, dass in ihnen r und e durchweg symmetrisch vorkommen, so dass es gleichgültig ist, welche Seite der Linse dem Objecte zugekehrt wird. Für die dünne Linse geben beide Messweisen gleiche Resultate.

Der Grösse nach unterscheiden sich die Werthe $\frac{1}{B}$ und $\frac{1}{B'}$ dadurch, dass ersterer, bei gleichem Nenner, einen um den Betrag $\psi_2 - \psi_1$ grösseren Zähler hat.

Das neue Maass der Bildgüte, B' , erscheint mir als das richtigere, weil eine Correctur des astigmatischen Bildes vor Allem beide Bilder gleich gross zu machen hätte; wir kommen hierauf

im nächsten Paragraphen zurück. Die bedeutend einfacheren Ausdrücke scheinen dies zu bestätigen.

Zusatz. Die äusseren Brennpuncte beider Flächen einer Linse sind bekanntlich unter einander conjugirt; das von dem einen ausgehende Strahlenbündel geht parallelstrahlig durch die Linse und vereinigt sich nach der zweiten Brechung im anderen. Dasselbe gilt natürlich auch für schiefen Durchgang; wir gewinnen so zwei weitere Paare conjugirter Puncte, das eine mit dem Index 1, das andere mit dem Index 2 versehen. Um die Lage derselben für den Fall des Durchgangs durch den optischen Mittelpunkt zu finden, hat man einfach in den Gleichungen 1 f_2 resp. $f_1 = \infty$ zu setzen und für e zu lösen; für die zweite Fläche ist ϱ statt r zu nehmen. Man erhält für die erste Fläche

$$(77) \quad G_2 = \frac{r}{A}, \quad G_1 = \frac{r \cos^2 \varphi}{A} = \frac{Nr}{A}.$$

Bemisst man die Abstände vom zugehörigen Directions- resp. Seitenpuncte aus, so erhält man

$$(78) \quad G_2 + \varphi_2 = \frac{n r (r + \varrho)}{n (r + \varrho) - AT}; \quad G_1 + \varphi_1 = \frac{n N r (r + \varrho) \cos^2 \alpha}{n (r + \varrho) \cos^2 \alpha - AT};$$

und ferner ergibt sich leicht

$$(79) \quad \frac{(G_2 + \varphi_2) - (G_1 + \varphi_1)}{G_2 + \varphi_2} = \frac{1}{B'},$$

so dass man nur die Lage der äusseren schiefen Brennpuncte der einen Linsenfläche zu kennen braucht, um das Maass der Bildgüte und Periscopie zu gewinnen.

Bezeichnet man ferner als Seitenverschiebung Σ den Verticalabstand des einfallenden und gebrochenen Bündels (DP in Fig. 6), so ergibt sich

$$(80) \quad \Sigma = A_2 \sin \varepsilon,$$

und bis auf Grössen dritter Ordnung genau:

$$\Sigma = E \sin \varepsilon.$$

9. Bestimmung der corrigirenden Cylindergläser.

Die Astigmatie eines Bildes lässt sich auch nach der optischen Kraft desjenigen Cylinderglases bemessen, welches das eine Bild an den Ort des anderen verlegt. Nach einem bekannten Princip ist die optische Kraft, oder der reciproke Werth der Brennweite eines solchen Glases gleich der Differenz der reciproken Werthe der beiden gleich zu machenden Brennweiten, wenn beide von demselben Puncte aus zählen und an diesen Punct das corrigirende Glas verlegt wird.

Nennen wir die Brennweite des gesuchten Cylinderglases Φ , und versetzen wir dasselbe, senkrecht zum Leitstrahl, an den Ort des zweiten Directionspoints, so ergibt sich

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{F_1 + \psi_2} - \frac{1}{F_2 + \psi_2},$$

und man erhält

$$(81) \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{D^2}{r^2 \varrho Q} \left\{ n [n r - (n-1) d] + \frac{(n-1)d \varrho}{Q} \right\} \sin^2 \varepsilon$$

und aus der Vergleichung dieses Ausdrucks mit 48 findet man

$$(82) \quad \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{B} \cdot \frac{(n-1)Q}{nr\varrho} = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{F},$$

so dass also

$$\Phi = B \cdot F$$

und

$$P = \frac{\Phi}{F} \sin^2 \varepsilon.$$

Setzen wir aber, vorbehaltlich physicalischer Deutung des Ausdrucks,

$$\frac{1}{\Phi'} = \frac{1}{F_1 + \psi_1} - \frac{1}{F_2 + \psi_2},$$

so ergibt sich

$$(83) \quad \frac{1}{\Phi'} = \frac{n-1}{nr\varrho} \cdot \frac{D^2}{Q} \left(n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} \right) \sin^2 \varepsilon,$$

oder

$$(84) \quad \frac{1}{\Phi'} = \frac{1}{B'} \cdot \frac{1}{F} \quad \text{oder} \quad \Phi' = B' \cdot F,$$

und

$$P' = \frac{\Phi'}{F} \sin^2 \varepsilon.$$

Wie man sieht, steht der Werth Φ' zu Φ in genau derselben Beziehung wie B' zu B . Die physicalische Bedeutung von Φ' ist aber leicht übersehbar; es ist nämlich die Brennweite eines Cylinderglases, welches das Bild homocentrisch machen würde, wenn die Brennweiten beider Brennpunkte von demselben Punkte ausgingen, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Eine wahre Correctur des Bildes wie es wirklich ist, ist überhaupt nicht durch eine einfache Cylinderlinse möglich, sondern man muss die Verschiebung der einen Brennweite gegen die andere (bis Seitenpunkt auf Directions- und Directionspunkt fällt) fingiren, um zu einer corrigirenden Linse zu gelangen, deren Brennweite dann Φ' ist. Man sieht hieraus, dass in der That die Werthe B' , P' , Φ' theoretisch richtigere Maasse sind, als die entsprechenden ohne Index.

Die Astigmatie durch die corrigirende (fingirte) Cylinderlinse zu messen, empfiehlt sich besonders deshalb, weil dieses Maass zugleich für unendlich und für endlich entfernte Objecte gilt, also allgemeiner ist als B' und P' . Es ist nämlich nach Gleichung 55 und 56 für ein endlich entferntes Object vom Abstand $e_1 = e_2 = e$ (vgl. I. Theil S. 448), sobald dieser so gross ist, dass die Differenz von φ_1 und φ_2 dagegen verschwindet,

$$\frac{1}{f_1 + \psi_1} - \frac{1}{f_2 + \psi_2} = \frac{1}{F_1 + \psi_1} - \frac{1}{F_2 + \psi_2} = \frac{1}{\Phi'}.$$

10. Vergleichung der Periscopie verschiedener Linsen.

Um die Periscopie verschiedener Linsen bequem zu vergleichen, benutzen wir die Gleichung 71:

$$\frac{1}{P'} = \frac{D^2}{Q^2} \left(n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} \right).$$

1. Unendlich dünne Linsen. Hier ist $d=0$, $D=r+e$, $Q=n(r+e)$. Es ergibt sich also $P'=1$. Die Periscopie unendlich dünner Linsen ist also gleich 1, was schon aus dem 5. Paragraphen hervorgeht, da dort $\frac{1}{B'} = \sin^2 \varphi = \sin^2 \varepsilon$ sich ergab, also $P' = B' \sin^2 \varepsilon = 1$.

2. Kugellinsen, und überhaupt Linsen, deren Dicke gleich der Summe beider Krümmungsradien ist. Hier ist $D=0$, also $P'=\infty$; solche Linsen sind unendlich periscopisch, was schon die Anschauung lehrt, da jedes durch den optischen Mittelpunkt gehende Strahlenbündel durch beide Flächen senkrecht hindurchgeht.

3. Andere Fälle. Für solche ist es zweckmässig, die Gleichung 71 etwas umzuformen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} n^2 - \frac{(n-1)d}{Q} &= n^2 + \frac{Q - n(r+e)}{Q} = n^2 + 1 - \frac{n(r+e)}{Q} \\ &= n^2 + 1 - n \left(1 - \frac{E}{d} \right)^1, \end{aligned}$$

ferner nach Gleichung 50:

$$\frac{D}{Q} = \frac{E}{(n-1)d},$$

also

1) Vgl. Gleichung 51.

$$(85) \quad \frac{1}{P'} = \frac{E^2}{(n-1)^2 d^2} \left(n^2 - n + 1 + n \frac{E}{d} \right) \\ = \frac{E^2}{d^2} \left[1 + \frac{n}{(n-1)^2} \left(1 + \frac{E}{d} \right) \right].$$

Aus dieser Gleichung, in welcher die Krümmungsradien nicht vorkommen, folgt, dass von allen Linsen mit gegebener Dicke und gegebenem Brechungsindex diejenige am meisten periscopisch ist, welche die kleinste Hauptpunctdistanz besitzt. Die unendlich dünne und die Kugellinse haben beide $E=0$, indess ist für erstere auch $d=0$, also $\frac{1}{P'} = \frac{0}{0}$; der wahre Werth ($=1$) ist aber schon oben ermittelt. Die unendlich dünne Linse ist unter allen Linsen gleicher Brennweite die am wenigsten periscopische.

Führen wir statt des Brechungsindex die Krümmungsradien der Linse ein, wozu die Gleichungen 51 dienen, so erhalten wir

$$\frac{1}{P'} = \frac{E^2}{d^2} + \frac{D(D+E)(d-E)}{d(r+\varrho)^2} \left(1 + \frac{E}{d} \right),$$

und mit Einsetzung des Werthes von D , sowie nach mehreren Umformungen

$$(86) \quad \frac{1}{P'} = 1 - \frac{d^2 - E^2}{d(r+\varrho)} \left(2 - \frac{d-E}{r+\varrho} - \frac{E}{d} \right).$$

Hieraus folgt, dass unter allen Linsen von gegebener Gestalt (r, ϱ, d) diejenige am meisten periscopisch ist, welche die kleinste Hauptpunctdistanz besitzt.

Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass dieser Satz nur für eine homogene Linse bewiesen ist, also nicht etwa ohne Weiteres auf die Krystalllinse übertragen werden darf, obgleich diese, wie eine einfache Betrachtung lehrt¹⁾, eine viel kleinere Haupt-

1) Helmholtz hat nachgewiesen (physiologische Optik S. 75), dass die Krystalllinse vermöge ihres eigenthümlichen geschichteten Baues eine kürzere Hauptpunctdistanz hat, als eine homogene Linse von gleicher äusserer Gestalt und vom Brechungsvermögen des Kerns. Hieraus folgt aber a fortiori dass die Hauptpunctdistanz der Krystalllinse kleiner ist als die einer homogenen Linse von gleicher Gestalt und gleicher Brennweite; denn bekanntlich ist der Index der letzteren Linse (der sogenannte Totalindex der Krystalllinse) grösser als der des Kerns der Krystalllinse, ihre Hauptpunctdistanz ist also noch grösser als die der homogenen Linse vom Kernindex, da nach Gleichung 50 die Hauptpunctdistanz mit dem Index zunimmt. Bei gegebener Brennweite und gegebener äusserer Gestalt wird also die Hauptpunctdistanz durch diejenige Schichtungsart, welche die Krystalllinse besitzt, beträchtlich vermindert.

punctdistanz besitzt, als eine homogene Linse von gleicher Gestalt und gleicher Brennweite, so dass es scheinen könnte, als seien schon durch das Vorstehende ihre periscopischen Vorzüge nachgewiesen. Schlüsse auf nicht homogene Linsen wären nur aus solchen Gleichungen gestattet, in welchen nur Cardinaldistanzen, und keine unmittelbaren optischen Constanten der Linse vorkommen. Es gelingt aber nicht, aus den Gleichungen 73—76 r , ϱ und d , etwa durch Einführung von F und $\mathcal{A}_2$, herauszuschaffen.

Die periscopischen Eigenschaften centrirter Systeme, insbesondere von der Art der Krystalllinse, werden vielmehr den Gegenstand einer weiteren Mittheilung bilden.

Zusatz zum 1. Theile dieser Arbeit.

Im ersten Theil (S. 449, 451) ist nachgewiesen worden, dass der geometrische Ort des zweiten Brennpuncts sowohl für eine einfache Fläche als für eine dünne Linse eine durch den centralen Brennpunct gehende Kugelfläche, ihr Schnitt in der Ebene der Zeichnung ein Kreis ist. Dieser Kreis ist jedoch nicht, wie S. 451 gesagt worden ist, identisch für die einfache Fläche und für die Linse von gleicher Brennweite. Die Zeichnung Fig. 2, Taf. VI ist nur für die Linse gültig; hier ist nämlich die Gleichung 13, welche sowohl für die Fläche wie für die Linse den Werth der zweiten Brennweiten darstellt,

$$F_2 = \frac{nr}{n^2 - 1} \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \cos \varphi \right),$$

zugleich excentrische Polargleichung eines Kreises, dessen Polarwinkel $= \varphi$ sind; sein Radius ist $\frac{n^2 r}{n^2 - 1} = \frac{n F}{n + 1}$, und die Excentricität des Pols gleich $\frac{n r}{n^2 - 1} = \frac{F}{n + 1}$. Für die einzelne Fläche dagegen ist diese Gleichung, wenn sie zugleich Polargleichung des Kreises der zweiten Brennpuncte sein soll, so umzuformen, dass die Brechungswinkel ψ als Polarwinkel auftreten; sie nimmt dann die Form an

$$F_2 = \frac{n^2 r}{n^2 - 1} \left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \sin^2 \psi} + \cos \psi \right);$$

dies ist die excentrische Polargleichung eines Kreises vom Radius

$\frac{n r}{n^2 - 1} = \frac{F}{n + 1}$, und von der Polcentricität $\frac{n^2 r}{n^2 - 1} = \frac{n F}{n + 1}$; beide Grössen also umgekehrt wie früher. Ich gebe noch in Fig. 7 die

Fig. 7.

hieraus folgende Figur der Curven für die einfache brechende Fläche (und zwar für gleiche centrale Brennweite $H F$, wie sie in Fig. 2 des ersten Theils für die dünne Linse angenommen war). Die vom Incidenzpunkt H an den Kreis $F_2 F_2$ gelegte Tangente $H R$ ist zugleich der äusserste mögliche gebrochene Strahl (bei grösserem Incidenzwinkel findet totale Reflexion statt), und tangirt zugleich die Curve der ersten Brennpunkte $F_1 F_1$ bei S ; und zwar geht die Normale an den Punct S durch den Krümmungsmittelpunct K der brechenden Fläche. Die Beweise für die letzteren Sätze überlasse ich dem Leser.

Die in Fig. 5 des ersten Theils gegebene, einem Kreise sehr nahe kommende Curve, welche den Ort der zweiten Brennpunkte für die dicke Linse darstellt, lässt sich betrachten als eine Curve, deren Pol im Directions- und sich mit diesem verschiebt, deren Vektoren aber gleich $F_2 + \psi_2$ sind; die Gleichung 66 würde also die Polargleichung dieser Curve darstellen, wenn man von der Verschiebung des Poles absähe, und statt α den Polarwinkel ε in die Gleichung einföhrte (mittels 40 oder 41).