Über das Jevons-Clifford'sche Problem.

Von A. Nagy in Rom.

Von besonderer Wichtigkeit für die Logik ist das Problem nach Zahl und Art der Typen und zugehörigen Repräsentanten aller über n logische Größen abgebbaren Aussagen ¹⁾. Die Lösung desselben setzt jedoch jene des sogenannten (verallgemeinerten) Jevons-Clifford'schen Problems voraus ²⁾.

Nachdem die Anzahl und Art der Typen und Repräsentanten der universalen — oder, was dasselbe besagt, der elementaren ³⁾ — Aussagen über 1, 2 und 3 Classen oder Begriffe (resp. logische Größen) von Jevons angegeben wurde ⁴⁾, löste bekanntlich Clifford ⁵⁾ — aber, wie man später sehen wird, nur theilweise — das analoge Problem für vier Classen. Nun fragt es sich: wie viele und was für Typen und Repräsentanten elementarer Aussagen ergeben sich für n beliebig gegebene Classen oder logische Größen überhaupt? ⁶⁾

Die Antwort schon für $n = 5$ schien große Schwierigkeiten darzubieten. Das zunächst Folgende mag als ein Beitrag zur allgemeinen Lösung angesehen werden.

¹⁾ Miss Ladd, *Studies in logic by members of the John's Hopkins University*. Boston, Brown, 1883, S. 61. Vergl. meine *Principi di logica* (Torino, Loescher, 1892) S. 100 ff.

²⁾ Über Beziehungen zwischen logischen Größen. (Monatshefte für Mathematik und Physik. IV. Jhg.) S. 152—153.

³⁾ Ebenda, S. 151.

⁴⁾ Jevons, *Proceedings of the Manchester phil. Soc.* Bd. VI, S. 65—68; *Memoirs*, 3. Serie, Bd. V, S. 119—130; *The Principles of Science*, Bd. I, S. 154—164.

⁵⁾ Clifford, *Proceedings of the Manchester phil. Soc.* Bd. XVI, S. 88—101.

⁶⁾ Venn, *Symbolic logic*. London, Macmillan, 1881, S. 258 f.: „Prof. Jevons considered that it would take several years of continuous labour even to determine the number of possible types of propositions here; and, though Prof. Clifford solved his part of the question by showing that there are 396 such types, he still considers that such a period would be required to ascertain what these types actually are. With five terms . . . the number of types is one which presumably no man will ever determine“. — Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Leipzig, Teubner, 1890, I. Bd. S. 282 f.: „Das allgemeine Gesetz scheint jedoch nicht leicht zu ermitteln . . . Schon für 3 Aushebungen ist die Typenanzahl mit ihrer den Typen zugehörigen Formenanzahl nur sehr mühsam zu gewinnen. Das Problem ist den Mathematikern zur Weiterführung empfohlen“.

Man betrachte einen Complex der Elemente (Argumente) $a_1, a_2, \dots, a_n$, welchen wir mit

$$(a_1 a_2 \dots a_n)$$

bezeichnen.

Derselbe kann irgend eine beliebige, aber festgesetzte Function dieser Argumente darstellen. In unserem Falle soll er einfach das Product der logischen Größen $a_1, a_2, \dots, a_n$ bedeuten und ein Constituent heißen. Wir setzen voraus, dass anstatt irgend eines Argumentes a_k ein gewisses andere $\bar{a}_k$ — welches die Negation des a_k sei — substituiert werden kann. Es gibt dann natürlich 2^n solcher Complexe der Constituenten, nämlich:

$$\begin{aligned} &(a_1 a_2 \dots a_n), \\ &(a_1 a_2 \dots \bar{a}_n), \\ &\dots \\ &(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n). \end{aligned}$$

Ein jeder Constituent lässt sich in jeden andern überführen lediglich dadurch, dass man gewisse Argumentbuchstaben in ihre Negationen verwandelt. Die Anzahl der zu diesem Behufe nothwendigen

Vertauschungen $\left(\frac{a_k}{\bar{a}_k}\right)$ heißt der Abstand der beiden Constituenten.

Z. B. die Constituenten

$$(a_1 a_2 a_3 \bar{a}_4)$$

und

$$(a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_4)$$

besitzen den Abstand 3. Es sind nämlich die Substitutionen

$$\left(\frac{a_2}{\bar{a}_2}, \frac{a_3}{\bar{a}_3}, \frac{\bar{a}_4}{a_4}\right)$$

erforderlich.

Jetzt betrachten wir einen zusammengesetzten Ausdruck m solcher Constituenten, d. h. irgend eine (commutative) Function, in unserem speciellen Falle die logische Summe derselben, welche gleich 0 gesetzt die betreffende universale Aussage liefert. Wir nennen sie eine m -fache oder eine Summe zu m Aushebungen, indem eben m Constituenten ausgehoben werden.

Zwei m -fache Summen heißen von demselben Typus, wenn sie sich durch Vertauschungen der Buchstaben unter einander oder mit ihren Negationen in einander überführen lassen. So z. B.

$$a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 + a_1 \bar{a}_2 a_3 a_4 + \bar{a}_1 a_2 a_3 \bar{a}_4$$

und

$$a_1 \bar{a}_2 a_3 a_4 + \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 + a_1 a_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4$$

gehören demselben Typus an — nöthige Substitutionen: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_1 & \bar{a}_3 & \bar{a}_4 \end{pmatrix}$

— während

$$a_1 a_2 + a_1 \bar{a}_2$$

und

$$a_1 \bar{a}_2 + \bar{a}_1 a_2$$

von verschiedenem Typus sind.

Die 2^n Constituenten können als Ecken eines Körpers $C_{(n)}^n$ betrachtet werden. Exponent und Index bedeuten resp. die Anzahl der Dimensionen und der vorhandenen Argumente (Buchstaben) — welcher das Analogon des Quadrats in zwei, des Würfels in drei Dimensionen und in einer räumlichen Mannigfaltigkeit von n Dimensionen ist. Passende Namen sind nach Schröder:

- C^0 Punkt (Ecke),
- C^1 Strecke (Zweieck),
- C^2 Quadrat (Vierstreck),
- C^3 Würfel (Sechsqubadrat),
- C^4 Achtzell (Achtwürfel).

Dann kämen

- C^5 Sechzehn-achtzell,
- C^6 Zweiunddreißig-sechzehnachtzell,

u. s. w.

Das Gebilde $C_{(n)}^n$ ist von n dimensional verschiedenen Gebilden: $C^0, C^1, C^2, \dots, C^{n-1}$ begrenzt und zwar gibt es der Zahl nach

$$\binom{n}{k} 2^k$$

Körper $C_{(n)}^{n-k} - k = 1, 2, \dots, n$, welche die Combinationen zu k der n Buchstaben und zwar jede mit den möglichen Vertauschungen der a mit $\bar{a}$, darstellen.

Durch die Aushebung von m Constituenten in einer Summe wird das System m solcher Ecken charakterisiert. Zum Studium desselben wird die Einführung eines neuen Gebildes, nämlich des von diesen m Ecken gebildeten vollständigen m -Eckes im n -dimensionalen Raum, von großem Nutzen sein. Ich bezeichne es kurzweg mit

$$T_{(n)}^m$$

— Exponent und Index bedeuten beziehungsweise Anzahl der Ecken und der Argumentbuchstaben (Dimensionen).

Die Analoge in unserem Raume sind:

$$\begin{aligned} T^1 & \text{ Ecke (Punkt),} \\ T^2 & \text{ Zweieck (Strecke),} \\ T^3 & \text{ Dreieck,} \\ T_{(3)}^4 & \text{ Tetraëder, } T_{(2)}^4 \text{ vollständiges Viereck,} \end{aligned}$$

u. s. w.

Ein Körper $T_{(n)}^m$ enthält $(m-1)$ dimensional verschiedene Körper, nämlich $T^1, T^2, \dots, T^{m-1}$ und zwar in der Anzahl

$$\binom{m}{k}$$

Körper $T^{m-k} - k = 1, 2, \dots, (m-1)$. So z. B. die Anzahl der Ecken, Kanten, Seiten des Tetraeders ist resp. $\binom{4}{3} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{1} = 4$.

Die nothwendige — und für $m = 0, 1, 2, 3$ hinreichende Bedingung, damit zwei Summen von m Constituenten durch Buchstabenvertauschungen in einander überführbar sind, d. h. demselben Typus angehören, ist, dass das System der Abstände identisch sei, d. h. dass die zwei betreffenden T^m sich durch Verschiebung oder Drehung zu vollkommener Deckung bringen lassen.

Somit wird uns die Aufgabe gestellt zu ermitteln, auf wie viele Arten sich am erwähnten $C_{(n)}^n$ Ecken auswählen lassen, wenn zu einerlei Art alle diejenigen Aushebungen gezählt werden, bei welchen die Systeme der ausgewählten Ecken congruente oder symmetrisch gleiche T^m bilden, d. h. wie viele und was für von einander verschiedene T^m gibt es in $C_{(n)}^n$? Und zwar, zu jedem $m - m = 0, 1, 2, \dots, 2^n$ — wie viele und was für $T_{(n)}^m$ (Anzahl und Art der Typen zu m Aushebungen) und dann wie viele und welche Repräsentanten jedes Typus, d. h. wie viele und welche congruente T ?

Bis jetzt wurden ermittelt:

1. Anzahl und Art der Typen und Repräsentanten in $C_{(0)}^0$, $C_{(1)}^1, C_{(2)}^2, C_{(3)}^3$ (Jevons, Ladd, Schröder);

2. Anzahl und Art der Typen in $C_{(4)}^4$ (Clifford). Es fehlt noch die der zugehörigen Repräsentanten;

3. Anzahl und Art der Typen und Repräsentanten der $T_{(n)}^0$, $T_{(n)}^1$ in $C_{(n)}^n$ (Schröder);

4. Anzahl und Art der Typen — jedoch nicht der Repräsentanten — der $T_{(n)}^2$ in $C_{(n)}^n$ (Schröder);

Jetzt soll:

1. Anzahl und Art der Repräsentanten der $T_{(n)}^{(2)}$;

2. Anzahl und Art der Typen und Repräsentanten der $T_{(n)}^{(3)}$ und $T_{(n)}^{(4)}$ in $C_{(n)}^n$.

3. Einleitung zum Studium der $T_{(n)}^m$ in $C_{(n)}^n$ für beliebige m und n hinzugefügt werden.

$$T_{(n)}^0$$

1 Typus, 1 Repräsentant. Das gibt das Element 0; keine Aushebung und die nichtssagende Aussage $0 = 0$.

$$T_{(n)}^1$$

1 Typus, 2^n Repräsentanten der Form $(a_1 a_2 \dots a_n)$; d. h. die den Ecken entsprechenden Constituenten.

Für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$ ist die Anzahl resp. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64....

$$T_{(n)}^2$$

n Typen: 1. Typus, Abstand 1: $a_1 a_2 \dots a_n + \overline{a_1} a_2 \dots \overline{a_n}$

2. Typus, Abstand 2: $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n + \overline{a_1} a_2 \dots \overline{a_{n-1}} \overline{a_n}$

....

n . Typus, Abstand n : $a_1 a_2 \dots a_n + \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_n}$

Anzahl der Repräsentanten des k^{ten} Typus (Abstand k): $2^{n-1} \binom{n}{k}$

Zusammen $\binom{2^n}{2}$ Repräsentanten.

So ergeben sich die Zahlen, wo die Addenden der Reihe nach die Repräsentanten der Typen 1, 2.... n bedeuten:

für $n = 1$	1,
" $n = 2$	$4 + 2 = 6$,
" $n = 3$	$12 + 12 + 4 = 28$,
" $n = 4$	$32 + 48 + 32 + 8 = 120$,
" $n = 5$	$80 + 160 + 160 + 80 + 16 = 496$,
" $n = 6$	$192 + 480 + 640 + 480 + 192 + 32 = 1916$.

$$T_{(n)}^3$$

Die Anzahl der Typen ist durch die Reihen:

$$\begin{aligned} \text{für } n &= 1 & 0 \\ \text{für } n &= 2 & 1 \\ \text{für } n &= 3 & 2 + 1 = 3 \\ \text{für } n &= 4 & 3 + (1 + 2) = 6 \\ \text{für } n &= 5 & 4 + (1 + 2 \times 2) + 1 = 10 \\ \text{für } n &= 6 & 5 + (1 + 3 \times 2) + (1 + 2) + 1 = 16 \\ \text{für } n &= 7 & 6 + (1 + 4 \times 2) + (1 + 2 \times 2) + 1 + 2 = 23 \\ \text{für } n &= 8 & 7 + (1 + 5 \times 2) + (1 + 3 \times 2) + (1 + 2 + 3) + 1 = 32 \\ \text{für } n &= 9 & 8 + (1 + 6 \times 2) + (1 + 4 \times 2) + (1 + 2 + 2 \times 3) + \\ & & \quad + 1 + 2 + 1 = 43 \\ \text{für } n &= 10 & 9 + (1 + 7 \times 2) + (1 + 5 \times 2) + (1 + 2 + 3 \times 3) + \\ & & \quad + (1 + 2 + 3) + 1 + 2 = 56 \\ \text{für } n &= 11 & 10 + (1 + 8 \times 2) + (1 + 6 \times 2) + (1 + 2 + 4 \times 3) + \\ & & \quad + (1 + 2 + 2 \times 3) + 1 + 2 + 3 + 1 = 71 \\ \text{für } n &= 12 & 11 + (1 + 9 \times 2) + (1 + 7 \times 2) + (1 + 2 + 5 \times 3) + \\ & & \quad + (1 + 2 + 3 \times 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + 1 + 2 + 1 = 89 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

wo die Addenden durch die Formel

$$\left\{ \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} + (n-4k+5)k \right\} + \left\{ \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2} + (n-4k+3)k \right\}$$

gebildet werden, angegeben.

Jeder Typus ist durch das System der Abstände (T^2) dargestellt. Nennen wir dieselben k , λ , ξ und zwar so, dass

$$k \leq \lambda \leq \xi.$$

Zwei, nehmen wir k und λ , können wir beliebig wählen, dann ist aber der dritte der Bedingung

$$\xi = k + \lambda - 2\rho$$

($\rho = 0, 1, \dots, \frac{k}{2}$ oder $\frac{k-1}{2}$, je nachdem k eine gerade oder ungerade Zahl ist) unterworfen.

Es muss natürlich

$$k, \lambda, \xi \leq n$$

$$k + \lambda + \xi \leq 2n$$

und ferner jeder Abstand kleiner oder höchstens gleich der Summe der beiden andern sein.

Die Dreiecke (k, λ, ξ) d. h. die Typen der T^3 lauten:

für $n = 2$ (112);

für $n = 3$ (112), (123),
(222);

für $n = 4$ (112), (123), (134),
(222), (224), (233);

für $n = 5$ (112), (123), (134), (145),
(222), (224), (233), (235), (244),
(334);

für $n = 6$ (112), (123), (134), (145), (156),
(222), (224), (233), (235), (244), (246), (255),
(334), (336), (345),
(444);

für $n = 7$ (112), (123), (134), (145), (156), (167),
(222), (224), (233), (235), (244), (246), (255), (257), (266),
(334), (336), (345), (347), (356),
(444), (446), (455);

für $n = 8$ (112), (123), (134), (145), (156), (167), (178),
(222), (224), (233), (235), (244), (246), (255), (257), (266),
(268), (277),
(334), (336), (345), (347), (356), (358), (367),
(444), (446), (448), (455), (457), (466),
(556);

u. s. w.

Die Anzahl der Repräsentanten des Typus

$$(k, \lambda, k + \lambda - 2\rho)$$

ist durch die Formel

$$\frac{2^n}{\nu!} \binom{n}{k} \binom{k}{\rho} \binom{n-k}{\lambda-\rho}$$

gegeben. ν bedeutet die Anzahl der eventuellen Wiederholungen eines und desselben Abstandes im Dreiecke.

Somit ist die Anzahl der Repräsentanten des Typus (112) in $C_{(n)}^n$

$$\frac{2^n}{2!} \binom{n}{1} \binom{1}{0} \binom{n-1}{1} = 2^n \binom{n}{2},$$

diejenige des (222):

$$\frac{2^n}{3!} \binom{n}{2} \binom{2}{1} \binom{n-2}{2-1} = 2^n \binom{n}{3},$$

u. s. w.

Die Summe aller $T_{(n)}^3$ ist $= \binom{2^n}{3}$.

So ergeben sich die Zahlen, wo die Addenden der Reihe nach die Anzahl der successiven T^3 Typen bedeuten:

für $n = 2$ 4

für $n = 3$ 24 + 24 + 8 = 56

für $n = 4$ 96 + 192 + 64 + 64 + 48 + 96 = 560

für $n = 5$ 320 + 960 + 640 + 160 + 320 + 480 + 960 + 320 +
+ 320 + 480 = 4960

für $n = 6$ 960 + 3840 + 3840 + 1920 + 384 + 1280 +
+ 2880 + 5760 + 5760 + 1920 + 960 + 960 + 5760 + 640 +
+ 3840 + 960 = 41664

u. s. w.

$$T_{(n)}^4$$

Die Anzahl der Typen ist durch die Summen folgender Reihen angegeben:

für $n = 2$ 1

für $n = 3$ (1 + 3) + 1 + 1 = 6

für $n = 4$ (1 + 2 × 3) + 1 + 4 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 18

für $n = 5$ (1 + 3 × 3) + (1 + 4 + 6) + 1 + 4 + 1 + (1 + 2 + 3) +
+ 1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 = 44

für $n = 6$ (1 + 4 × 3) + (1 + 4 + 2 × 6) + 1 + 4 + 6 + 1 + 4 + 1 +
+ (1 + 2 + 2 × 3) + (1 + 3 + 5) + 1 + 3 + 6 + 1 + 3 + 1 + 2 +
+ 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 89

für $n = 7$ (1 + 5 × 3) + (1 + 4 + 3 × 6) + (1 + 4 + 6 + 8) +
+ 1 + 4 + 6 + 1 + 4 + 1 + (1 + 2 + 3 × 3)

.....

Jedoch müssen diese Anzahlen um eine oder mehrere Einheiten vermehrt werden, weil jetzt ein bestimmtes $T_{(n)}^4$ d. h. ein gegebenes Abstände-System nicht mehr zur Feststellung eines Typus genügt.

So kann das Tetraeder (222) (222) (222) (222) zweifacher Art sein, d. h. eine sogenannte eigentliche Gruppe (proper group) oder eine uneigentliche (improper)¹⁾ bilden, je nachdem zu den 4 Ecken eine mit jeder im Abstände 1 stehende Ecke in $C_{(n)}^4$ vorhanden ist oder nicht. Z. B.

$$a_1 a_2 a_3 \bar{a}_4 + a_1 a_2 \bar{a}_3 a_4 + a_1 \bar{a}_2 a_3 a_4 + \bar{a}_1 a_2 a_3 a_4$$

ist eine eigentliche (die fragliche Ecke ist $a_1 a_2 a_3 a_4$),

$$a_1 a_2 a_3 \bar{a}_4 + a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 + \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 + \bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 \bar{a}_4$$

hingegen eine uneigentliche Gruppe. Die eine ist auf die andere nicht reducierbar, sie stellen somit zwei verschiedene Typen dar.

Man muss also von jetzt an außer dem Körper T^m noch seine Lage in C untersuchen, d. h. auch den Körper T^{n-m} in Betracht ziehen. Somit für $n = 4, 5, 6$ ist die Anzahl der T^4 Typen resp. 19, 45, 90.

Für $n = 8$ ist die angegebene Zahl um zwei Einheiten zu vermehren, indem außer dem erwähnten Tetraeder

$$(222) (222) (222) (222),$$

noch das

$$(444) (444) (444) (444)$$

doppelt erscheint.

Zum Kennzeichen der Typen dienen die zum $T_{(n)}^4$ gehörigen $T_{(n)}^3$ und $T_{(n)}^2$, nämlich die Systeme der 4 Dreiecke und der 6 Kanten (Abstände). Da bei der Abzählung der Kanten der Dreiecke jede Kante des Tetraeders zweimal vorkommt, so sind die des vierten Dreiecks mit den drei übrigen schon bestimmt. Und wenn die Kanten

$$k, \lambda, \xi, \mu, \eta, \zeta$$

sind, so lauten die T^3 respective:

$$(k, \lambda, \xi)$$

$$(k, \mu, \eta)$$

$$(\lambda, \mu, \zeta)$$

$$(\xi, \eta, \zeta).$$

¹⁾ Clifford op. cit. S. 92.

Man kann also das Tetraeder sowohl mit den Abständen (T^2)

$$(k, \lambda, \xi, \mu, \eta, \zeta)$$

als auch mit dem Dreieckesystem

$$(k, \lambda, \xi) (k, \mu, \eta) (\lambda, \mu, \zeta) (\xi, \eta, \zeta)$$

bezeichnen. Wir ordnen die Dreiecke so, dass die mit den Ziffern $(k, \lambda, \xi), (k, \mu, \eta), \dots$ gebildeten Zahlen in zunehmender Ordnung folgen. Auch die $k, \lambda, \mu, \xi, \eta, \zeta$ sind so angeordnet, dass

$$k \leq \lambda \leq \xi; k \leq \mu \leq \eta; \lambda \leq \mu \leq \zeta; \xi \leq \eta \leq \zeta \text{ ist.}$$

Drei der Abstände können beliebig gewählt werden, sie seien k, λ, μ . Die übrigen müssen dann den Bedingungen

$$\xi = k + \lambda - 2\rho, \quad \eta = k + \mu - 2\sigma, \quad \zeta = \lambda + \mu - 2\tau$$

genügen, wo

$$\rho = 0, 1, \dots, \frac{k}{2} \text{ oder } \frac{k-1}{2}$$

$$\sigma = 0, 1, \dots, \frac{k}{2} \text{ oder } \frac{k-1}{2}$$

$$\tau = 0, 1, \dots, \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \frac{\lambda-1}{2}$$

ist, je nachdem k und λ gerade oder ungerade Zahlen sind.

Es muss ferner $k + \lambda + \xi \leq 2n, k + \mu + \eta \leq 2n, \lambda + \mu + \zeta \leq 2n$ (also $k + \lambda + \mu + \frac{\xi + \eta + \zeta}{2} \leq 3n$) und die Summe irgend zweier einem Dreiecke angehöriger Abstände nicht größer als der dritte sein.

Die T^4 Typen lauten demgemäß:

für $n = 2$ (112) (112) (112) (112);

für $n = 3$ (112) (112) (112) (112), (112) (112) (112) (222), (112) (112) (123) (123),

(112) (123) (123) (222),

(123) (123) (123) (123),

(222) (222) (222) (222) — nur „improper“.

für $n = 4$ (112) (112) (112) (112), (112) (112) (112) (222), (112) (112) (123) (123),

(112) (123) (123) (222), (112) (123) (123) (233), (112) (123) (134) (224),

(112) (134) (134) (233),

für $n = 4$ (123) (123) (123) (123), (123) (123) (134) (134), (123) (123) (222) (233), (123) (123) (233) (233),
 (123) (134) (224) (233),
 (134) (134) (134) (134),
 (222) (222) (222) (222) „proper“ und „improper“, (222) (222) (224) (224),
 (222) (233) (233) (233),
 (224) (224) (224) (224),
 (233) (233) (233) (233);

für $n = 5$ (112) (112) (112) (112), (112) (112) (112) (222), (112) (112) (123) (123),
 (112) (123) (123) (222), (112) (123) (123) (233), (112) (123) (134) (224),
 (112) (134) (134) (233), (112) (134) (134) (244), (112) (134) (145) (145),
 (112) (145) (145) (244),
 (123) (123) (123) (123), (123) (123) (134) (134), (123) (123) (222) (233),
 (123) (123) (224) (334),
 (123) (123) (233) (233), (123) (123) (235) (235),
 (123) (134) (224) (233), (123) (134) (233) (334), (123) (134) (244) (334)
 (123) (145) (224) (235), (123) (145) (235) (334),
 (134) (134) (134) (134), (134) (134) (145) (145), (134) (134) (233) (244),
 (134) (134) (334) (334),
 (134) (145) (235) (244),
 (145) (145) (145) (145),
 (222) (222) (222) (222) „proper“ und „improper“, (222) (222) (224) (224),
 (222) (224) (224) (244),
 (222) (233) (233) (233), (222) (233) (235) (235),
 (222) (244) (244) (244),
 (224) (224) (224) (224), (224) (224) (244) (244)
 (224) (233) (233) (334),
 (224) (235) (235) (334),
 (233) (233) (233) (233), (233) (233) (235) (235), (233) (233) (334) (334),
 (233) (244) (334) (334),
 (235) (235) (235) (235),
 (244) (244) (244) (244),
 (334) (334) (334) (334);

Für $n = 6$ fügen sich außer den obenerwähnten 45 noch folgende weitere 45 Typen hinzu:

(112) (145) (145) (255), (112) (145) (156) (246),
 (112) (156) (156) (255),
 (123) (134) (235) (345), (123) (134) (246) (336),
 (123) (145) (244) (345), (123) (145) (255) (345),
 (123) (156) (235) (336), (123) (156) (246) (345),
 (134) (134) (334) (444), (134) (134) (345) (345),
 (134) (145) (334) (345), (134) (145) (345) (444),
 (134) (156) (235) (246), (134) (156) (336) (345),
 (145) (145) (156) (156) (145) (145) (244) (255), (145) (145) (345) (345),
 (145) (156) (246) (255),
 (156) (156) (156) (156),
 (222) (235) (235) (235),
 (222) (244) (246) (246),
 (222) (255) (255) (255),
 (224) (224) (246) (246),
 (224) (233) (235) (345),
 (224) (235) (255) (345),
 (224) (244) (244) (444),
 (224) (246) (246) (444),
 (233) (233) (336) (336),
 (233) (235) (235) (255), (233) (235) (334) (345),
 (233) (244) (345) (345),
 (233) (246) (334) (336),
 (233) (255) (345) (345),
 (235) (235) (255) (255), (235) (235) (345) (345),
 (235) (244) (334) (345),
 (244) (244) (246) (246), (244) (244) (444) (444),
 (246) (246) (246) (246),
 (255) (255) (255) (255),
 (334) (334) (345) (345),
 (334) (345) (345) (444),
 (336) (336) (336) (336),
 (444) (444) (444) (444) — „improper“.

Die Anzahl der Repräsentanten des Typus

$$(k, \lambda, k + \lambda - 2\rho, \mu, k + \mu - 2\sigma, \lambda + \mu - 2\tau)$$

scheint durch die Formel

$$\frac{2^n}{\nu!} \binom{n}{k} \binom{k}{\rho} \binom{n-k}{\lambda-\rho} \cdot \sum_{\xi=0}^{\rho} \binom{\rho}{\xi} \binom{k-\rho}{\sigma-\xi} \binom{\lambda-\rho}{\tau-\xi} \binom{n-k-\lambda+\rho}{\mu-\sigma-\tau+\xi}$$

angegeben zu werden, jedoch habe ich dieselbe noch nicht genau revidiert.

ν soll wie früher die Anzahl der eventuellen Wiederholungen eines Abstandes im Dreiecke $(k, \lambda, k + \lambda - 2\rho)$ bedeuten. Wenn im Tetraeder ein Dreieck r mal wiederholt erscheint, so muss obige Anzahl durch r dividiert werden. — Für $\rho = 0$ lautet die Formel einfach:

$$\frac{2^n}{\nu!} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lambda} \binom{k}{\sigma} \binom{\lambda}{\tau} \binom{n-k-\lambda}{\mu-\sigma-\tau}$$

Z. B. die Anzahl der $(1, 1, 2, 2, 1, 1)$ d. h. der $(112)(112)(112)(112)$ ist

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2^n}{2!} \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{n-2}{2-2}$$

d. h.

$$\frac{1}{4} 2^n \binom{n}{2}.$$

Die Summe aller $T_{(n)}^4$ ist $= \binom{2^n}{4}$.

$$T_{(n)}^m$$

Da die Typen und Repräsentanten des Körpers $T_{(n)}^k$ den Typen und Repräsentanten des Complementären $T_{(n)}^{2^n-k}$ genau entsprechen, so genügt es die ersten $(2^{n-1} + 1)$ Körper zu betrachten; somit für $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ die Körper $T^0, T^1, \dots$ bis inclusive $T_{(2)}^2, T_{(3)}^4, T_{(4)}^8, T_{(5)}^{16}, T_{(6)}^{32}, \dots$

Um das System der Abstände ins Auge zu fassen, wendet man, wie für die $T_{(n)}^3$ und $T_{(n)}^4$, folgende Schematismen an: für $T_{(n)}^5$: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$. — Die T^2 (Kanten, Abstände) sind progressiv numeriert — die $T_{(n)}^4$ sind:

$$\begin{aligned} &(1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ &(1, 2, 3, \quad \quad \quad 7, 8, 9) \\ &(1, \quad \quad 4, 5, \quad \quad 7, 8, \quad 10) \\ &\quad (2, \quad 4, \quad 6, 7, \quad 9, 10) \\ &\quad \quad (3, \quad 5, 6, \quad 8, 9, 10). \end{aligned}$$

Diese sollen wieder lauter mögliche, d. h. in $C_{(n)}^n$ wirklich befindliche T^4 sein. Sie sind so eingeordnet, dass die von den eingeklammerten Ziffern gebildeten Zahlen successiv wachsen, d. h.

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \leq (1, 2, 3, 7, 8, 9) \leq \dots \leq (3, 5, 6, 8, 9, 10).$$

Es ist dann natürlich auch für die T^3 und T^2 .

$$(1, 2, 3) \leq (1, 4, 5) \leq (2, 4, 6) \leq (3, 5, 6)$$

$$(1, 2, 3) \leq (1, 7, 8) \leq (2, 7, 9) \leq (3, 8, 9)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(3, 5, 6) \leq (3, 8, 9) \leq (5, 8, 10) \leq (6, 9, 10)$$

und

$$(1) \leq (2) \leq (3); (1) \leq (4) \leq (5); (2) \leq (4) \leq (6); (3) \leq (5) \leq (6)$$

u. s. w.

Von den Abständen (1), (2) (10) können 4 — nehmen wir (1), (2), (4), (7) beliebig gewählt werden. Dann sind die übrigen von der Form

$$(3) = (1) + (2) - 2\rho$$

$$(5) = (1) + (4) - 2\sigma$$

$$(6) = (2) + (4) - 2\tau$$

$$(8) = (1) + (7) - 2\upsilon$$

$$(9) = (2) + (7) - 2\varphi$$

$$(10) = (4) + (7) - 2\psi$$

wo ρ, σ, υ die Werte von 0 bis $\frac{(1)}{2}$ oder $\frac{(1)-1}{2}$

τ, φ die Werte von 0 bis $\frac{(2)}{2}$ oder $\frac{(2)-1}{2}$

und ψ die Werte von 0 bis $\frac{(7)}{2}$ oder $\frac{(7)-1}{2}$

je nachdem (1), (2) und (7) gerade oder ungerade Zahlen sind, annehmen. Mit diesen Bedingungen kann man die Tabelle der bezüglichen Typen der T^5 entwerfen, woraus man die Typen für die erwünschte Argumentenanzahl n erhält, indem man die Typen, welche den ferneren Bedingungen:

$$(1) + (2) + (3) \leq 2n, (1) + (4) + 5 \leq 2n \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(6) + (9) + (10) \leq 2n$$

Genüge leisten, herausnimmt.

Für $T_{(n)}^6$: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)
 sind die T_n^6 : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14)
 (1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15)
 (1, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15)
 (2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)
 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15)

Jede Kante kommt 4mal vor. 5 können arbiträr gewählt werden, dann sind die übrigen einigen den früheren analogen Bedingungen unterworfen.

Und so weiter für die anderen $T_{(n)}^m$, welche aus m Körpern $T_{(n)}^{m-1}$ zusammengesetzt sind, wo die Abstände $(m-2)$ mal vorkommen. Von denselben sind $(m-1)$ arbiträr, die übrigen müssen gewissen Bedingungen Genüge leisten, in welchen die Parameter $\rho, \sigma, \tau \dots$ erscheinen.

Die Anzahl der Repräsentanten dürfte durch eine Verallgemeinerung der für T^3 und T^4 angegebenen Formeln ausdrückbar sein.

Die Repräsentanten aller Typen des $T_{(n)}^m$ sind im Ganzen

$$\binom{2^n}{m}$$

und die Summe der Repräsentanten sämtlicher Typen ist, nach einem bekannten Theorem:

$$\sum_{m=0}^{2^n} \binom{2^n}{m} = 2^{2^n},$$

welche Anzahl der von Peano ¹⁾ angegebenen entspricht.

¹⁾ Peano, *Calcolo geometrico*, Torino, Bocca, 1888. S. X.