Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche.

(*Di* Beppo Levi, *a Torino.*)

Memoria prima.

Un noto teorema relativo alle funzioni algebriche di una variabile dovuto al Weierstrass e, particolarmente per la sua interpretazione geometrica e per le importanti applicazioni, al sig. Noether (*) stabilisce la possibilità di trasformare l'intorno di un punto singolare qualunque di una curva piana algebrica (non multipla) nell'insieme degli intorni di un numero finito (che può essere 1) di punti semplici di un'altra curva algebrica piana, per mezzo di un numero finito di trasformazioni quadratiche piane.

Si presenta naturale la domanda se esista un teorema analogo per le superficie algebriche dello spazio ordinario, e in generale per le M_{r-1} immerse in un S_r. Limitandoci allo spazio ordinario la questione fu toccata dapprima dal sig. Noether (**) il quale affermò la possibilità di *abbassare* la singolarità di un punto o di una linea di una superficie assumendoli come

(*) Göttinger Nachrichten 1871, pag. 267, 2.ª Nota: *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln* e Math. Ann. IX-1875: *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die sing. Punkte einer alg. Curve.* Cfr. pure gli analisti: p. es. Hamburger, Zeitschrift für Mathematik u. Physik, XVI-1871. Biermann, *Theorie der analitischen Functionen,* 1887 (pag. 215 e seg.). Per la dimostrazione sintetica v. Bertini: *Sopra alcuni teoremi fondamentali sulle curve algebriche piane* (Rend. Ist. Lombardo (2)-21-1888) e un recente lavoro del sig. De Franchis: *Sopra una teoria geometrica delle singolarità di una curva algebrica piana* (Rend. Circ. Mat. Palermo XI-1897).

(**) Nella citata Nota nelle Göttinger Nachrichten.

elementi fondamentali di una trasformazione Cremoniana dello spazio. Ma il problema non era interamente risolto con ciò; mancava la dimostrazione che il procedimento indicato bastasse a risolvere ogni punto singolare.

Molto tempo dopo ritornarono sull'argomento i signori Del Pezzo (*) e Kobb (**), e, ricorrendo l'uno a trasformazioni monoidali, l'altro a trasformazioni quadratiche, proposero due dimostrazioni della possibilità di rappresentare l'intorno di un punto (o linea) singolare di una superficie per mezzo degli intorni di un numero finito di punti (o linee) semplici di una o più nuove superficie. Della proposizione del sig. Kobb fece applicazione geometrica il sig. prof. Segre nella sua Memoria: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (***).

Avendo avuto l'onore di coadiuvare il prof. Segre nella revisione delle bozze di questa Memoria, mi occupai della suddetta questione, ed ottenni fin d'allora con metodo sintetico alcuni risultati che il prof. Segre volle gentilmente annunziare alla fine del suo lavoro (p. 53).

Nello sviluppo dei concetti che mi guidarono, la materia mi venne crescendo in mano, tanto da superare ogni previsione che su quel breve cenno potesse farsi. Di questa prolissità, che va attribuita all'argomento (e da cui mi pare non possano per ora liberarsi anche altre ricerche affini) chiedo venia al lettore, che oso sperare si compiacerà dei risultati ottenuti; tanto più che, se mal non mi appongo, non sono interamente esatti i due lavori sullo stesso argomento, ultimi citati: — questo confermerò, per quanto riguarda la Memoria del sig. Kobb, nel breve esame critico che premetto alla presente Memoria.

Relativamente al lavoro del prof. Del Pezzo mi limiterò a ricordare i giudizi e le discussioni cui esso diede luogo (****); riferendomi in particolare al principio della seconda Nota del prof. Segre per l'esposizione di quei dubbi che possono far ritenere incompleto il lavoro del citato autore.

(*) *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (Rend. Circ. Palermo VI-1892).

(**) *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journal de Mathematiques (4) VIII, 1892, pag. 385). Indicherò brevemente questa Memoria con: Kobb. Essa si chiude con un rapido cenno alla questione più generale relativa alle M_{r-1} di S_r: ad esso pure debbono estendersi le osservazioni del n.° 1 del presente scritto.

(***) *Annali di Matematica* (2) XXV (dicembre 1896) pag. 1. Indicherò questa Memoria con: Segre.

(****) Del Pezzo, *Per difesa*, Stockholm, 1894. *Osservazioni sopra una Memoria del prof. Corrado Segre*, ecc. Atti dell'Acc. Pontaniana, 27 (maggio 1897). — Segre, *Intorno*

§ 1.

1. I fatti enunciati dal sig. Kobb come risultati del suo lavoro, si raccolgono nelle tre seguenti proposizioni:

a) « Sia (0, 0, 0) un punto m^{plo} della superficie algebrica:

$$F(u,\ v,\ w)=0\,.$$

« Con una sostituzione della forma:

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_1\tau+\beta_1\sigma+\gamma_1)\zeta \\ v &= (\alpha_2\tau+\beta_2\sigma+\gamma_2)\zeta \\ w &= (\alpha_3\tau+\beta_3\sigma+\gamma_3)\zeta\,, \end{aligned}$$

« facciamo corrispondere a questo punto un certo numero di punti $(a_\nu,\ b_\nu,\ 0)$
« di una superficie:

$$\overline{\Phi}(\tau,\ \sigma,\ \zeta)=0\,,$$

« in modo che l'insieme degli intorni *(domaines)* dei punti $(a_\nu,\ b_\nu,\ 0)$ rap-
« presenti tutto l'intorno del punto (0, 0, 0) della superficie $F(u,\ v,\ w)=0$.
« Operiamo quindi allo stesso modo su ogni punto multiplo della serie:

$$(a_\nu,\ b_\nu,\ 0) \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\ r),$$

« e perverremo infine a un numero finito di punti semplici:

$$(a_\mu^{(\lambda)},\ b_\mu^{(\lambda)},\ 0) \qquad (\mu=1,\ 2,\ldots,\ r),$$

« in un numero finito di superficie:

$$\Phi_\lambda(\tau_\lambda,\ \sigma_\lambda,\ \zeta_\lambda) \qquad (\lambda=1,\ 2,\ldots,\ s),$$

« i cui intorni, presi assieme, rappresentano tutto l'intorno del punto multiplo
« (0, 0, 0) della superficie $F(u,\ v,\ w)=0$. » (l. c. p. 414-415.)

b) Le coordinate dei punti della superficie $F(u,\ v,\ w)=0$ nell'intorno del punto multiplo (0, 0, 0) si possono sempre rappresentare con un numero finito di serie di potenze di due variabili (p. 415).

ad una mia Memoria « Sulla scomposizione, ecc. ». Atti di Torino, 32 (adun. 23 maggio 1897). — Del Pezzo, *Replica ad una Nota del prof. Corrado Segre in risposta ad alcune mie osservazioni,* Atti Acc. Pontaniana, 27 (giugno 1897). — Segre, *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie,* Atti di Torino, 32 (27 giugno 1897).

c) Le coordinate di tutti i punti della superficie $F(u, v, w) = 0$ si possono rappresentare con un numero finito di serie di potenze di due variabili (p. 415-419).

L'enunciato *b)* è immediata conseguenza di *a)*; ed ammesso *b)*, si deduce senza grandi difficoltà l'enunciato *c)*.

Io mi occuperò quindi solo del primo.

Si noti in primo luogo che la sostituzione (1) è il prodotto della sostituzione relativa ad un cambiamento di assi coordinati (conservante l'origine) e di una sostituzione del tipo:

$$x = x' z', \qquad y = y' z', \qquad z = z', \tag{2}$$

relativa ad una trasformazione quadratica speciale, avente l'origine delle coordinate come punto fondamentale isolato ed avente per conica fondamentale una retta doppia non passante per questo punto. (Nello spazio del punto (x, y, z) questa retta doppia è la retta all'infinito di $z = 0$, il piano della conica (retta doppia) è il piano all'infinito; nello spazio del punto (x', y', z') il punto fondamentale isolato è il punto all'infinito dell'asse delle z', la retta doppia fondamentale è la retta all'infinito del piano $z' = 0$, il piano della conica è il piano $z' = 0$.) Chiamerò nel seguito *trasformazione quadratica speciale* ogni trasformazione di questo tipo (*); e poichè non mi occuperò di operazioni analitiche, non avrò riguardo alla posizione particolare degli elementi fondamentali della trasformazione rispetto agli assi coordinati. La sostituzione (1) rappresenta adunque ancora una trasformazione quadratica speciale.

Ciò posto, si effettui col sig. Kobb sulla $F = 0$, la trasformazione quadratica speciale (1) la quale muti la superficie $F = 0$ nella $\overline{\Phi} = 0$; all'intorno del punto $A \equiv (0, 0, 0)$ di F corrisponde l'intorno di una linea $\varphi(\tau, \sigma) = 0$, $\zeta = 0$, di $\overline{\Phi}$. Su questa curva si debbono distinguere i punti multipli per la $\overline{\Phi}$. Per quanto riguarda l'enunciato *a)*, basta esaminare gli

(*) Questa trasformazione si presenta particolarmente utile negli sviluppi analitici (Cfr. oltre al lavoro del Kobb la succitata Memoria del prof. Segre), e talora anche nelle considerazioni sintetiche (Cfr. Segre n.[i] 23 e 25, pag. 30-31 e 33-35). Più proprio del nome di *trasformazione quadratica speciale* sarebbe forse quello di *trasformazione quadratica doppiamente specializzata nella conica fondamentale*, chiamando *semplicemente specializzata nella conica fondamentale* la trasformazione in cui questa conica degenera in una coppia di rette distinte ed il punto fondamentale non è su alcuna di queste rette; per brevità di linguaggio evito tali locuzioni e chiamerò semplicemente *trasformazione quadratica* l'ultima nominata ultimi punti (ed i loro intorni); si noti che questi punti sono in numero finito se $\varphi = 0$ non contiene parti multiple per la $\overline{\Phi}$; sono infiniti e costituiscono una curva in caso contrario. Se l'enunciato *a)* può dimostrarsi per questi punti della $\overline{\Phi}$ risulterà pure provato per il punto considerato di F. Ma i nuovi punti multipli sono *generalmente* di multiplicità minore di quella di questo punto; così la trasformazione quadratica abbassa *generalmente* la difficoltà della dimostrazione dell'enunciato *a)*. (Nel caso che φ contenga una parte multipla per $\overline{\Phi}$ occorre qualche ulteriore considerazione; io non mi soffermo su questo punto. V. KOBB, p. 402-405.)

Converrà quindi studiare il solo caso in cui, trasformando con una trasformazione quadratica un punto multiplo di F, si ottengano punti trasformati di $\overline{\Phi}$ aventi la stessa multiplicità.

Il sig. KOBB applica un procedimento analogo a quello con cui il WEIERSTRASS dimostra l'analogo teorema per le curve piane.

La curva φ contenga il punto $\overline{A}$ m^{plo} per $\overline{\Phi}$ come A per F; essa si comporrà di rette distinte o no, per $\overline{A}$ (*). Sono allora possibili tre casi:

1.° φ si compone di più rette; allora A non è uniplanare; se inoltre si trasforma $\overline{\Phi}$ con una nuova trasformazione quadratica (p. es. speciale) avente il punto fondamentale in $\overline{A}$ ed i rimanenti elementi fondamentali convenientemente generici, la linea trasformata di $\overline{A}$ non può ridursi a un'unica retta; così $\overline{A}$ si comporta per $\overline{\Phi}$ come A per F, e non è uniplanare (**).

2.° φ si riduce ad un'unica retta; $\overline{A}$ non è uniplanare; se si assume $\overline{\Phi}$ come superficie F si ritorna al caso precedente (***).

3.° φ si riduce ad un'unica retta; $\overline{A}$ è uniplanare. Operando su $\overline{\Phi}$ come si è detto in 1.° si ottiene una superficie Φ_1 e su essa una retta φ_1 trasformata di $\overline{A}$, la quale può ancora contenere punti m^{pli} (e può esser m^{pla} essa stessa) per Φ_1; ed in particolare può avere m^{plo} il punto corrispondente alla direzione uscente da $\overline{A}$ secondo φ, senza che necessariamente questo punto sia generico per la φ_1 (in particolare può questo punto essere m^{plo} senza che lo sia un punto generico della φ_1).

(*) Cfr. KOBB, pag. 405 e SEGRE, pag. 3.
(**) KOBB, pag. 408-409.
(***) Id., pag. 409-410.

Ciò posto il Kobb trasforma la $\overline{\Phi}$, come si è detto sopra, nella Φ_1, questa in modo analogo in una nuova superficie Φ_2, e questa in una Φ_3 e così via, scegliendo come punti fondamentali successivamente un conveniente punto A_1 della φ_1, un punto della linea trasformata di questo e così via, e si propone di dimostrare che la successione di queste superficie su cui esistono punti trasformati di A m^{pli} è finita. A tal uopo egli suppone dapprima esplicitamente che il punto A_1 non corrisponda alla direzione uscente da $\overline{A}$ secondo φ; ed analoghe restrizioni pone ai punti analoghi ad $\overline{A}$ e ad A_1 nelle trasformazioni successive (*). Ora tali restrizioni non mi paiono giustificate; per vero, effettuando la trasformazione di $\overline{\Phi}$ in Φ_1 (p. es.) si viene a trasformare l'intorno di $\overline{A}$ nell'intorno di φ_1; quest'intorno si scompone poi nell'insieme degli intorni di un numero finito di punti di φ_1 applicando un noto teorema di Weierstrass e Poincaré (**), per modo che in ciascuno di questi intorni deve valere una stessa scomposizione del polimonio Φ_1, quale risulta da questo teorema. I centri di questi intorni (i punti quali A_1) non sono adunque interamente arbitrari e fra essi debbono certamente contarsi, p. es., i punti di φ_1 che hanno per Φ_1 multiplicità superiori a quella dei punti generici, e tale, per un'osservazione precedente (3.°), può essere il punto di φ_1 corrispondente alla direzione uscente da $\overline{A}$ secondo φ.

Ad ogni modo, ammettiamo queste restrizioni, e vediamo come il signor Kobb prosegue nella sua dimostrazione (***):

Dalla F si siano ottenute nel modo suindicato le superficie:

$$\overline{\Phi}=0\,,\ \Phi_1=0\,,\ \Phi_2=0\,,\ldots,\ \Phi_r=0\,;$$

siano $(\tau,\ \sigma,\ \zeta)$, $(\tau_1,\ \sigma_1,\ \zeta_1)$, $(\tau_2,\ \sigma_2,\ \zeta_2),\ldots,$ $(\tau_r,\ \sigma_r,\ \zeta_r)$ le coordinate dei punti di queste superficie corrispondenti a $(u,\ v,\ w)$ di $F=0$. Le formole di trasformazione della F nella Φ_r sono del tipo:

$$u=(\alpha_1\,\tau+\beta_1\,\sigma+\gamma_1)\,(\alpha'_3\,\tau_1+\beta'_3\,\sigma_1+\gamma'_3)\,(\alpha''_3\,\tau_2+\beta''_3\,\sigma_2+\gamma''_3)\ldots$$
$$\ldots(\alpha_3^{(r)}\,\tau_r+\beta_3^{(r)}\,\sigma_r+\gamma_3^{(r)})\,\zeta_r$$

(*) Kobb, 409.

(**) Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, pag. 107 e *Mathematische Werke*, vol. 2.° Poincaré, These pour le doctorat, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, pag. 7.

(***) L. c., pag. 410-413.

$$v = (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)(\alpha''_3 \tau_2 + \beta''_3 \sigma_2 + \gamma''_3) \dots$$
$$\dots (\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)}) \zeta_r$$
$$w = (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)(\alpha''_3 \tau_2 + \beta''_3 \sigma_2 + \gamma''_3) \dots$$
$$\dots (\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)}) \zeta_r ,$$

ossia:

$$u = [\Gamma_1 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r)] \zeta_r \qquad \Gamma_1 = \gamma_1 \gamma'_3 \gamma''_3 \dots \gamma_3^{(r)}$$
$$v = [\Gamma_2 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r)] \zeta_r \qquad \Gamma_2 = \gamma_2 \gamma'_3 \gamma''_3 \dots \gamma_3^{(r)}$$
$$w = [\Gamma_3 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r)] \zeta_r \qquad \Gamma_3 = \gamma_3 \gamma'_3 \gamma''_3 \dots \gamma_3^{(r)} ,$$

dove i tre simboli $(\tau_r \sigma_r \zeta_r)$ stanno a rappresentare tre diverse funzioni algebriche intere (non forme) di τ_r, σ_r, ζ_r, prive di termine costante.

Se $\chi(v\,w) = 0$ è il cono circoscritto a F dal punto $(\infty\, 0\, 0)$ e $\overline{L}$ e $\overline{M}$ sono due convenienti polinomi in u, v, w si ha:

$$\overline{L}\, F + \overline{M} \frac{\partial}{\partial u} F = \chi .$$

In ambi i membri di questa identità si sostituiscano a u, v, w i loro valori in τ_r, σ_r, ζ_r; il primo membro verrà a contenere almeno il fattore $\zeta_r^{(r+1)(m-1)}$; quanto al secondo afferma l'A. che, se:

$$\chi(v\,w) = (v\,w)_\lambda + (v\,w)_{\lambda+1} + \dots + (v\,w)_n ,$$

conterrà invece il fattore $\zeta_r^{\lambda_1}$ $(n > \lambda_1 \geqq \lambda)$, potendosi supporre:

$$\chi(\Gamma_2 \Gamma_3) \gtrless 0 ,$$

« poichè $\chi(v, w)$ non è riduttibile ». Di qua la disuguaglianza $(r+1)(m-1) < n$, donde un limite superiore per r.

È qui da ricordare che, in conseguenza delle restrizioni annesse relativamente alla scelta di A_1 e dei punti analoghi, γ'_3, $\gamma''_3, \dots,$ $\gamma_3^{(r)}$ non sono nulli. Inoltre si possono supporre non nulli γ_2 e γ_3 (*); quindi si possono supporre non nulli Γ_2 e Γ_3.

Ciò posto, affinchè sia $\chi(\Gamma_2 \Gamma_3) \neq 0$ per valori di Γ_2, Γ_3 corrispondenti a un r superiore a un dato intero è necessario e sufficiente che:

1.° $\chi(v, w) = 0$ non contenga il piano $\gamma_3 v - \gamma_2 w = 0$; questo si può sempre supporre verificato, al più facendo subire dapprima alla $F = 0$ una conveniente trasformazione, e assumendo come F la superficie trasformata.

(*) L. c., pag. 108.

2.° Γ_2 e Γ_3 non debbono assumere, da un certo r in poi, costantemente i valori rispettivamente di v e w per cui son soddisfatte le due equazioni:

$$\chi(v, w) = 0, \qquad \gamma_3 v - \gamma_2 w = 0,$$

il che porta al più una nuova restrizione nella scelta dei numeri γ'_3, $\gamma''_3, \ldots$, cioè di A_1 e dei punti analoghi.

Non vedo però la necessità di considerare l'irreduttibilità o meno di $\chi(v, w)$; e noto che essa non ha generalmente luogo.

Quando poi la disuguaglianza $\chi(\Gamma_2 \Gamma_3) \neq 0$ sia soddisfatta, non si potrà ancora affermare che, dopo la sostituzione di τ_r, σ_r, ζ_r a u, v, w, si ottenga in $\chi(v, w)$ soltanto $\zeta_r^{\lambda_1}$ come fattore e non una potenza superiore di ζ_r; poichè, quando sia $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\lambda = 0$ (e ciò può esser conseguenza necessaria della singolarità di F in O (*)) non è ancor provato che non possa ridursi un termine del tipo $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\mu \zeta_r^\mu$ $(\mu = \lambda + 1, \ldots, n)$ (ed anche tutti questi termini) con uno o più termini simili provenienti dallo sviluppo di espressioni del tipo:

$$(\Gamma_2 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r),\ \Gamma_3 + (\tau_r \sigma_r \zeta_r))_\nu \zeta_r^\nu, \qquad (\nu = \lambda + 1, \ldots, n)$$

(diversi necessariamente da $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\nu \zeta_r^\nu$).

2. Riprendendo nelle pagine seguenti il problema della riduzione delle singolarità delle superficie, non mi occuperò della *trasformazione delle curve singolari;* bensì studierò l'effetto di una successione di trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali isolati in un punto singolare e ne' suoi successivi trasformati *(trasformazione del punto singolare)*. Per brevità dirò che si *applica una trasformazione quadratica ad un punto singolare* quando si trasforma la superficie o la curva cui il punto appartiene, per mezzo di una trasformazione quadratica avente il punto come punto fondamentale isolato; e supporrò in generale (quando non sia detto esplicitamente il contrario) gli altri elementi fondamentali in posizione generica; la trasformazione

---

(*) Si consideri ad es. un punto doppio uniplanare A di F; esistono in generale su φ tre punti parimenti doppi per $\overline{\Phi}$, e alle direzioni corrispondenti a questi tre punti è generalmente tangente la curva intersezione di F colla prima polare di un punto generico dello spazio rispetto alla F. Esistono bensì punti eccezionali per cui ciò non è vero, i punti cioè del piano tangente in A a F, ma, scelto un tal punto per $(\infty, 0, 0)$, $(v, w)_\lambda = 0$ è l'equazione del piano tangente a F in A, e quindi, per le ipotesi fatte (che $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ sostituiti a $u\, v\, w$ annullino il primo termine dell'equazione $F = 0$ (Kobb, pag. 408)), $(\gamma_2 \gamma_3)_\lambda = 0$ onde $(\Gamma_2 \Gamma_3)_\lambda = 0$.

si potrà in generale supporre non speciale, e quando ciò non possa farsi sarà detto esplicitamente.

Dimostrerò che *se F è una superficie algebrica e A un suo punto* s^{plo}, *e se, applicata ad A una trasformazione quadratica, si ottiene come sua trasformata una curva a_1 di una superficie Φ_1 trasformata di F, sulla quale esistano punti* s^{pli} *per Φ_1; e se, detto A_1 uno di questi punti, si opera su esso come precedentemente su A, ottenendone una linea a_2 di una superficie Φ_2 su cui possono esistere punti* s^{pli} *per Φ_2 uno dei quali sia A_2, e così si prosegue: la successione delle superfieie Φ_1, Φ_2,... e dei punti A_1, A_2,... è finita, cioè esiste nella successione un' ultima superficie Φ_r su cui esiste una linea a_r trasformata di* A_{r-1} *su cui non esistono punti* s^{pli} *per Φ_r; purchè i punti A_1, A_2,... siano scelti in modo che, a cominciare da uno di essi in poi, non accada mai che uno di questi punti stia sulla linea trasformata di una linea* s^{pla} *passante pel punto precedente; ed in particolare da uno di essi in poi non stiano su una linea* s^{pla} *della superficie.*

Rilevo fin d'ora che si può sempre supporre che il punto dal quale in poi non accade mai ecc., sia A_1, poichè basterà in caso contrario assumere come superficie iniziale F una conveniente Φ; osservo inoltre che è evidente che i punti s^{pli} A_1, A_2,... sarebbero infiniti se, a cominciare da uno di essi in poi, appartenessero tutti alle successive trasformate di una stessa linea s^{pla} (linee tutte s^{ple} per le superficie cui rispettivamente appartengono); ma, e questo non mi pare evidente senz'altro, *può accadere che il numero dei punti* s^{pli} *A_1, A_2,... cresca oltre ogni limite quando si scelgono questi punti in modo che due o più (necessariamente consecutivi) appartengano a linee* s^{ple} *corrispondentisi* (trasformate l'una dell'altra) *delle superficie successive, pur essendo finito il numero dei punti che stanno su linee trasformate di una stessa linea* s^{pla}. La prova di questa proposizione è riservata alla Memoria seconda.

Non è necessario aggiungere che, dimostrato il suenunciato teorema, risulta pur provato, che sotto analoghe restrizioni, si può sempre, con una successione di trasformazioni quadratiche, passare dal punto O comunque singolare, ad un punto semplice. I ragionamenti relativi alla rappresentazione dell'intorno di un punto di una superficie contenuti nella Memoria del Kobb valgono allora a provare l'enunciato *a)* così modificato: — si operi come è detto in *a)* su tutti i punti (a_ν, b_ν, 0) non eccezionali secondo il teorema suenunciato; si perverrà a rappresentare l'intorno del punto (0, 0, 0) considerato di F per mezzo dell'insieme degli intorni di un numero finito di punti semplici su un numero finito di superficie e di quelli di un numero finito di nuovi punti singolari, appartenenti a linee singolari della stessa multiplicità.

La questione analitica della rappresentazione per mezzo di un numero finito di serie di potenze dell'intorno di un punto singolare di una superficie algebrica rimane per ora insoluta e precisamente rimane al punto a cui l'hanno portata l'Halphen (*) e il prof. Del Pezzo (**).

§ 2.

Questo paragrafo ed il seguente sono destinati a considerazioni sulle curve sghembe e sull'intersezione di due superficie, necessarie per il seguito, ma che non potrebbero considerarsi come parte integrante della dimostrazione che ho in animo di dare.

3. Una curva sghemba C, d'ordine m, non multipla, abbia in A punto s^{plo}. Si applichi ad A una trasformazione quadratica; la curva C si trasformerà in una curva C' su cui si trovano uno o più punti corrispondenti ad A la somma delle cui multiplicità è $\leq s$; siano A'_1, $A'_2, \ldots$ questi punti. Se essi non sono tutti semplici, si applichi ad uno di essi A'_i multiplo per C', una nuova trasformazione quadratica. C' si trasformerà in una nuova curva C'' in cui al punto considerato corrispondono uno o più nuovi punti A''_{i1}, $A''_{i2}, \ldots$ e ai rimanenti punti A'_j $(j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots)$ altrettanti punti colle stesse multiplicità rispettive; questi ultimi punti si potranno rappresentare rispettivamente cogli stessi simboli dei corrispondenti punti di C'. Si assuma un punto qualunque fra gli A''_{ik} e gli A'_j di C'', che sia multiplo per C'' e si applichi ad esso una nuova trasformazione quadratica; e così via. *Dopo un numero conveniente, finito, di trasformazioni si giungerà ad una curva $C^{(r)}$ su cui i punti trasformati di A son tutti semplici* (***).

(*) *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques.* Annali di Matematica (2) IX-1878-79, pag. 68 (v. pag. 73 e seg.).

(**) L. c., pag. 146 e seg. Gli enunciati a cui mi riferisco sono validi, almeno nella loro dimostrazione, solo con opportune restrizioni. Cfr. la fine dell'introduzione al presente scritto.

(***) Questo teorema non è veramente una novità. Non saprei però citare un luogo ove lo si trovi precisamente sotto questa forma e con una dimostrazione simile a quella

Semplificherò la dimostrazione supponendo le trasformazioni quadratiche specializzate in quanto la conica fondamentale vi sia spezzata in una coppia di rette distinte (e complanari). Ricorderò che anche nello spazio trasformato la conica fondamentale è analogamente degenere e che le rette uscenti dal punto doppio della conica fondamentale sono trasformate nelle rette uscenti dal punto analogo del 2.° spazio e la corrispondenza che così resta stabilita fra le due stelle è quadratica con elementi fondamentali le rette delle coniche e le proiettanti i punti fondamentali isolati.

Sia V il punto doppio della conica fondamentale della prima trasformazione quadratica a cui si assoggetta C e sia scelto in posizione generica rispetto a C, cioè fuori di C, fuori dei vertici dei coni di corde di C e fuori

che segue. Crederei quindi di mancare di rigore (per le sue seguenti applicazioni) s'io non ne dessi qui brevemente la dimostrazione.

Una prima prova della possibilità di sciogliere i punti singolari di una curva algebrica sghemba con trasformazioni Cremoniane fu data dal sig. Del Pezzo (loco citato, pagina 144-145) riducendo la questione all'analoga per le curve piane, e senza nulla fissare sulle trasformazioni usate; una prova diretta fu data in seguito dal sig. Pannelli nella Nota: *Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba* (Rend. Istit. Lombardo (2), 1893, pag. 216-222) facendo uso di trasformazioni cubiche speciali (a tetraedro fondamentale). Basta ciò per affermare senz'altro che si può raggiungere lo scopo con trasformazioni Cremoniane qualunque aventi punti fondamentali isolati nei punti che si trasformano. (Questa proposizione rientra in una più generale che mi riservo di pubblicare prossimamente) — La dimostrazione che io darò nel seguito può esser raffrontata, pel principio a cui s'informa, col cenno di dimostrazione contenuto nel lavoro del prof. Segre (pag. 9) ed anche con quella del Pannelli. In essa mi valgo di trasformazioni quadratiche non assolutamente generali (a conica fondamentale degenere); ed il ragionamento si estende senz'altro a provare il teorema analogo per le curve immerse in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni; per questa parte mi limiterò però a questo cenno. Un'altra dimostrazione, valida pure per le curve immerse in ogni spazio, in cui non si fa questa restrizione relativamente alle trasformazioni quadratiche usate, ho dato nella mia dissertazione di laurea (luglio 1896). Altre cure mi hanno impedito finora di pubblicare i risultati di questa mia tesi; e mi astengo dal presentare qui la suddetta dimostrazione perchè le ipotesi più generali non darebbero alcun vantaggio, mentre dovrei forse entrare in taluni particolari che mi devierebbero dal principale oggetto del presente lavoro.

Con trasformazioni Cremoniane prive di punti fondamentali isolati, è anche possibile di trasformare ogni curva gobba in una priva di punti multipli. La possibilità di una tal riduzione con trasformazioni birazionali della curva (non Cremoniane) è nota. Cfr. Poincaré: *Sur les transformations birationelles des courbes algébriques* (Comptes Rendus, tom. 117, 3 juillet 1893) e Pieri: *Trasformazione di ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli* (Rivista di Matematica, 1894).

di ogni corda di C per A e di ogni tangente a C in A. Si proietti C da V e sia Γ il cono proiettante; la VA sarà s^{pla} per Γ. Sia V' il punto doppio della conica fondamentale dello spazio trasformato. Se su C' si ha un solo punto A' trasformato di A, ancora s^{plo}, la $V'A'$ sarà retta s^{pla} del cono Γ' trasformato di Γ e V' soddisferà rispetto a C' alla stessa condizione di trovarsi in posizione generica come V rispetto a C. Si effettui allora una nuova trasformazione quadratica avente A' come punto fondamentale isolato e V' come punto doppio della conica fondamentale: le stesse cose si potranno ripetere. E così si potrà proseguire finchè si otterranno trasformati di A ancora s^{pli}. Ma dopo un numero finito di trasformazioni si deve giungere ad un cono trasformato di Γ in cui a VA corrispondono una o più generatrici di multiplicità $< s$ (per il noto teorema relativo alle curve piane, analogo a quello che qui si tratta di stabilire); dunque, dopo un numero finito di trasformazioni, minore o al più uguale al suddetto, si deve giungere ad una curva trasformata di C, su cui ad A corrispondono uno o più punti di moltiplicità $< s$. Non si può più allora affermare che il punto doppio della conica fondamentale dell'ultimo spazio trasformato sia, rispetto all'ultima trasformata di C, in posizione generica come V rispetto a C; ma scegliendo un altro conveniente punto come punto doppio della conica fondamentale di un'ulteriore trasformazione applicata ad un punto multiplo trasformato di A, si potrà proseguire l'operazione e provare così l'asserto.

Il numero delle trasformazioni necessarie a trasformare il punto A in punti semplici avrà così un limite superiore che varierà colla curva considerata, e potrà crescere quanto si vuole, ma che, assegnata la particolar curva, sarà pure assegnato e finito; è anzi facile vedere che si può assegnare un limite superiore dipendente solo dall'ordine della curva (*).

(*) Modificando leggermente il precedente ragionamento sarebbe anche facile provare che si ha la relazione:

$$\Sigma s(s-1) < m(m-1),$$

ove con s si indichino le multiplicità di A e degli altri punti multipli di C e quelle dei punti trasformati successivi di questi e la Σ si estenda a tutte queste s. Questa formola anche più completa (assegnando il significato dell'eccesso dell'un membro sull'altro) ho dimostrato nella mia dissertazione già nominata.

§ 3.

4. Due superficie F e F_1 passino per un punto A colle multiplicità rispettive s e σ; è noto che il punto A sarà multiplo almeno secondo $s\sigma$ nell'intersezione di F e F_1; e tale sarà appunto questa multiplicità quando le due superficie non hanno in A un cono tangente comune. È facile estendere questo teorema a determinare i caratteri della curva intersezione di F e F_1 in A (le multiplicità dei punti A, $A'_i\,(i=1,\ldots)$, $A''_{ik}\,(i,\,k=1,\ldots),\ldots$ del paragrafo precedente (*)), o meglio le loro funzioni S che saranno definite in seguito.

Chiamerò, per semplicità, *multiplicità di un punto nell' intersezione di due superficie* — ovvero *multiplicità d' intersezione di due superficie in un punto* — la somma dei prodotti delle multiplicità di questo punto sulle diverse parti (curve algebriche irreduttibili) della curva intersezione delle due superficie, per le multiplicità rispettive di queste parti.

La multiplicità di A nell' intersezione di F e F_1 è il numero delle intersezioni in A delle sezioni piane f e f_1 di F e di F_1 fatte con un piano generico π per A. Si applichi ad A una trasformazione quadratica; le superficie F ed F_1 si mutino nelle Φ_1 e Ψ_1; il piano segante si muterà in un nuovo piano π_1 e le f e f_1 nelle intersezioni φ_1 e ψ_1 di questo piano con Φ_1 e Ψ_1. φ_1 e ψ_1 sono trasformate di f e f_1 con una trasformazione quadratica piana avente A per punto fondamentale; quindi i caratteri (multiplicità) dei punti immediatamente successivi ad A sulle curve f e f_1 (nel senso della teoria del sig. Noether) sono uguali alle multiplicità, su Φ_1 e Ψ_1 rispettivamente, dei punti in cui il piano π_1 interseca le curve che, su queste superficie, corrispondono al punto A.

Si applichino le stesse considerazioni alla determinazione delle multiplicità di φ_1 e ψ_1 nei punti successivi ai loro punti trasformati di A, e lo stesso si faccia per tutte le curve loro trasformate successive, e si ricordi un teorema del sig. Noether che dà il numero delle intersezioni di due curve piane in un loro punto comune (**); si otterrà la regola seguente per determinare la multiplicità di A nell'intersezione di F e F_1:

(*) In altri termini quelli fra i numeri s della nota precedente che si riferiscono ad A e ai suoi trasformati.

(**) Cfr.: *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Ann., 23, 1884) e Math. Ann., 9, 1875, l. c.

Le superficie Φ_1 e Ψ_1 abbiano comuni le curve a'_1, a'_2,... trasformate di A; siano A'_{11}, A'_{12},..., A'_{21},... i punti d'intersezione di queste linee con π_1; s'_{11}, s'_{12},..., s'_{21},... le loro multiplicità su Φ_1, σ'_{11}, σ'_{12},..., σ'_{21},... quelle su Ψ_1 (essendo π_1 generico sarà $s'_{11}=s'_{12}=\ldots$; $s'_{21}=\ldots$;...; $\sigma'_{11}=\sigma'_{12}=\ldots$;...); si applichino ad A'_{11}, A'_{12},... nuove trasformazioni quadratiche, e siano i numeri s''_{1111}, s''_{1112},..., s''_{1121},..., s''_{1211}, ..., σ''_{1111}, σ''_{1112}, ... determinati analogamente ai precedenti numeri s'_{ik} e σ'_{ik}; e così via. La multiplicità cercata sarà espressa da:

$$\sum s\,\sigma,$$

ove la Σ è estesa alle multiplicità s e σ di A su F e F_1, e a tutti numeri s e σ ora definiti, in modo che siano accoppiati i numeri aventi gli stessi apici e indici.

5. Si considerino ora i numeri s del paragrafo precedente (*) corrispondenti alle diverse parti dell'intersezione di F e F_1 e a un determinato punto $A^{(r)}$, trasformato di A considerato come punto di queste curve; si indichi con $S^{(r)}$ la somma dei prodotti di questi numeri per le multiplicità delle curve cui appartengono. Si riuscirà facilmente a calcolare questo numero se si osserva che, per la precedente definizione della multiplicità d'intersezione di due superficie in un loro punto comune, questa multiplicità può scomporsi nella somma di più parti corrispondenti ciascuna ad una parte (curva algebrica, riduttibile o non) dell'intersezione delle due superficie passante pel punto considerato: detta C una qualunque di queste parti dell'intersezione di F e F_1 passante per A, la corrispondente parte della multiplicità d'intersezione di F e F_1 in A sarà la somma dei prodotti delle multiplicità di A sulle diverse parti (curve algebriche irreduttibili) di C per le multiplicità rispettive di queste parti nell'intersezione di F e F_1.

(*) Altrove sarà provato che, nella determinazione di questi numeri si possono togliere alcune delle restrizioni imposte alla trasformazione nel paragrafo precedente; fra l'altre quella che la trasformazione sia quadratica, bastando tener conto del comportamento degli elementi fondamentali della trasformazione rispetto alla linea, nelle vicinanze del punto che si trasforma (cfr. con un'analoga affermazione nella 1.ª nota relativa al n.° 3). Rimando la dimostrazione di questo teorema perchè, quantunque importante per le sue conseguenze, esso passa in seconda linea nella ricerca presente. Intanto mi permetterò, per brevità di linguaggio, di non tener conto nel seguito di talune fra le dette restrizioni. Ognuno potrà rilevare che in tutto quanto segue esse si potrebbero tutte mantenere senza nulla alterare del ragionamento (cfr. la nota al n.° 14).

Ciò posto, si assoggettino F e F_1 alla successione di trasformazioni quadratiche che conducono da A ad $A^{(r)}$, siano Φ_r e Ψ_r le ultime superficie trasformate rispettivamente di F e F_1. Φ_r e Ψ_r si intersecheranno secondo una linea composta della trasformata dell'intersezione di F e F_1 e di un sistema di linee corrispondenti ad A. La multiplicità d'intersezione di Φ_r e Ψ_r in $A^{(r)}$ sarà la somma di $S^{(r)}$ e della parte di detta multiplicità corrispondente alla linee comuni a Φ_r e Ψ_r, trasformate di A, e passanti per $A^{(r)}$. Si ricava da questa osservazione la regola seguente per calcolare $S^{(r)}$: Si distinguano le diverse parti (curve algebriche irreduttibili) della linea trasformata di A comune a Φ_r e a Ψ_r, passanti per $A^{(r)}$; per ciascuna di esse si determini la multiplicità di $A^{(r)}$ su di essa e la multiplicità d'intersezione di Φ_r e Ψ_r in un suo punto generico (questa multiplicità è la multiplicità della curva nell'intersezione di Φ_r e Ψ_r) e si faccia il prodotto di questi due numeri; si determini inoltre la multiplicità di intersezione Φ_r e Ψ_r in $A^{(r)}$. La differenza fra questa multiplicità d'intersezione e la somma di quei prodotti è il numero $S^{(r)}$.

Nel seguito le linee trasformate di A, passanti per $A^{(r)}$ saranno generalmente rette: allora $S^{(r)}$ è la differenza fra la multiplicità d'intersezione di Φ_r e Ψ_r in $A^{(r)}$ e la somma delle loro multiplicità d'intersezione nei punti generici di queste rette.

Queste considerazioni servono utilmente a stabilire alcuni legami fra il comportamento di F e F_1 in A e quello delle loro trasformate nei punti trasformati di A. È infatti evidente che $S^{(r)}$ è nullo sempre e solo quando per $A^{(r)}$ non passano curve trasformate di parti dell'intersezione di F e F_1, e che esso non può essere mai negativo; che inoltre si ha sempre, per un determinato punto $A^{(r)}$ e per un suo trasformato $A^{(r+1)}$, $S^{(r)} \geqq S^{(r+1)}$. In particolare $S^{(r)}$ è minore o al più uguale alla multiplicità d'intersezione di F e F_1 in A.

§ 4.

6. In questo paragrafo e nel seguente è contenuta la dimostrazione del teorema enunciato nel n.° 2. Si distinguono in esso due casi principali l'uno trattato completamente nel paragrafo presente ed enunciato esplicitamente al principio del n. 14, l'altro discusso ed esaurito nel paragrafo seguente ed enunciato alla fine dello stesso n.° 14.

Il concetto fondamentale della dimostrazione consiste nel determinare, nel primo caso, una linea d'ordine non superiore a un ordine assegnato, che passi per A con punto multiplo e le cui trasformate passino con punti multipli rispettivamente per $A', A'', \ldots$ e nell'applicare a questa linea la proposizione del § 2. Al secondo caso non sono applicabili i ragionamenti con cui dimostro pel primo l'esistenza di questa linea; ma esso si risolve distinguendovi due nuovi casi: 1.° questa linea esiste; il ragionamento del n.° 15 si applica immediatamente; — 2.° questa linea non esiste; si dimostra che da questa ipotesi consegue senz'altro un limite superiore al numero dei punti della successione $A', A'', \ldots$ che hanno per la superficie F la stessa multiplicità s di A.

Il secondo dei due casi principali nominati non ha nulla di paragonabile coi fatti che s'incontrano nello studio delle curve; vi si incontra una novità analoga a quella che si scorge nel caso d'eccezione enunciato nel n.° 2. Il primo invece offre qualche analogia coll'unico caso che s'incontra nello studio delle curve piane, e non sarà inutile un breve raffronto fra il metodo che io qua seguirò e quelli noti di Weierstrass e Noether (*). Userò in questo raffronto le locuzioni relative ai punti successivi di una varietà, note per le curve piane, introdotte per le curve gobbe e per le superficie dal prof. Segre (**) e che io ripeto per maggior chiarezza nel numero seguente.

Sia F una curva piana algebrica che abbia il punto A come punto s^{plo}. Si assoggetti F ad una trasformazione quadratica (piana) avente A come punto fondamentale, e gli elementi fondamentali rimanenti in posizione convenientemente generica; si otterrà una curva trasformata Φ_1 su cui ad A corrisponderanno uno o più punti; si otterrà un punto s^{plo} trasformato di A, solo (non sempre) quando esso sia l'unico punto di Φ_1 corrispondente ad A. Quando questo accada, sia A' il detto punto. Su Φ_1 e sul suo punto A' si ripeta l'operazione fatta su F e sul suo punto A, e così si prosegua: si deve provare che dopo un numero finito conveniente di operazioni non si potrà più ottenere un trasformato di A s^{plo} per la curva cui appartiene; altrimenti detto, si deve provare che il numero dei punti s^{pli} di F successivi ad A è finito (se F non è una curva s^{pla}). Si riesce in questa dimostrazione

(*) Cfr. le citazioni al principio della Memoria; io mi riferirò qua particolarmente al metodo del sig. Noether; quello del sig. Weierstrass non ne differisce sostanzialmente per la parte di cui qui si tratta.

(**) Loco citato, pag. 2-4.

considerando l'intersezione di F colla prima polare, rispetto ad essa, di un punto generico del piano (che si assume come unico ulteriore punto fondamentale della prima trasformazione quadratica, assumendo poi i suoi trasformati successivi — finchè ciò è possibile, il che è certamente finchè si ottengono punti trasformati di A s^{pli} — come punti analoghi per le trasformazioni successive); questa prima polare passa per A ed ha comuni con F tutti i punti successivi ad A e multipli per F. Secondo un teorema del NOETHER già citato (*), i punti comuni alle due curve, — effettivi o successivi a punti effettivi, — contano nel numero delle intersezioni delle due curve come altrettanti punti, a distanze finite fra loro, comuni alle due curve, ed aventi su esse le stesse multiplicità. Esprimendo che il numero di queste intersezioni di F e della sua prima polare in A e nei punti infinitamente prossimi ad A è $\leq n(n-1)$ (detto n l'ordine di F) si ha evidentemente un limite superiore al numero dei punti s^{pli} di F infinitamente prossimi ad A.

Per A e pei punti s^{pli} di F infinitamente prossimi ad A passano, oltre la prima polare di un punto generico del piano rispetto alla F, anche tutte le polari di un tal punto che hanno indice $< s$. Nel ragionamento precedente si può quindi alla prima polare sostituire una di queste e si può anche sostituire *un'altra* di queste polari a F. I limiti che allora si otterranno saranno generalmente (cioè se $s > 2$) superiori a quello ottenuto precedentemente, ma, pel solo scopo della dimostrazione che si ha in vista, hanno pari utilità.

Nel caso delle superficie si potrà tentare un metodo analogo a quello ora riassunto, sostituendo al gruppo delle intersezioni di due curve la linea intersezione di due superficie; ma nuove difficoltà si presentano. Per vero:

In primo luogo, se una superficie passa pel punto A della superficie F, la interseca certamente secondo una linea passante per A; ma non necessariamente il passaggio di detta superficie per un punto di F successivo ad A conduce seco il passaggio per questo punto della linea intersezione delle sue superficie. È facile persuadersene ritornando p. es. sull'ultimo numero del paragrafo precedente. Questo fatto è capitale nel seguito.

Appunto il bisogno di provare il passaggio di tale intersezione per determinati punti m'indusse a non far uso di una prima polare, bensì di una

(*) Nel ragionamento del WEIERSTRASS (cfr. BIERMANN, loco citato) in luogo di questo teorema si utilizza la rappresentazione del risultante di F e della sua prima polare come funzione appartenente al modulo determinato da queste due funzioni.

$s-1^{ma}$ che passa semplicemente (ed è questo l'essenziale) per A e pei punti s^{pli} di F successivi ad A. Inoltre ho sostituito alla F stessa una sua polare d'indice $\geqq 0$ e $< s-1$; mi si è presentata essenziale questa sostituzione nei ragionamenti dei n.i 10-13 (e 17 nel paragrafo seguente); non è forse essenziale per la dimostrazione del nostro teorema (cfr. una nota al n.° 14). Anzi, nel concetto fondamentale della dimostrazione, non è forse essenziale nemmeno l'uso della polare $s-1^{ma}$; la si potrebbe sostituire ad es. una superficie che passasse semplicemente per A, A',...; trovai però l'introduzione delle polari utile al rigore.

I numeri 10-12 sono destinati precisamente a dimostrare il passaggio dell'intersezione delle due polari di F sunnominate per i punti considerati. Il n.° 12 è forse il più gravoso alla lettura. Il lettore cui tale paresse, potrebbe abbandonarlo senz'altro (insieme col n.° 11 che solo in esso si applica) poichè espongo nel n.° 16 un ragionamento che si può sostituire a quello del n.° 12 per quanto riguarda il teorema a cui si tende. Ho dato la precedenza al metodo del n.° 12 perchè più diretto, più ricco di risultati e più consono col metodo del n.° 10 e con quello che si segue per le curve.

Nel n.° 13 ho enunciata una proposizione che non pare priva d'importanza, immediata conseguenza dei ragionamenti precedenti, ma che non trova applicazione nel seguito.

In secondo luogo, il passaggio dell'intersezione sunnominata pei punti considerati non è più sufficiente, come per le curve, a condurre a termine il ragionamento; convien conoscere le multiplicità dei detti punti su quell'intersezione. Il calcolo di queste multiplicità sarebbe tutt'altro che semplice; l'ho evitato sostituendo all'intersezione suddetta una sua proiezione sulla F. Come con ciò si riesca si vede nel n.° 14 e credo non richieda schiarimenti.

7. Come ho annunciato nel numero precedente, ricorderò anzitutto alcune locuzioni relative alla *scomposizione di un punto multiplo* introdotte, per quanto riguarda le varietà spaziali, dal prof. Segre nel citato lavoro (pag. 2-4) (*).

(*) Le presenti definizioni differiscono alcun poco nella forma da quelle a cui alludo, per evitare considerazioni di *punti infinitamente vicini* che servono a dar ragione delle definizioni stesse; tali considerazioni ho evitate per semplicità, essendo esse assolutamente estranee al presente lavoro. Ho invece introdotto la definizione nuova di varietà tangenti o secanti un'altra in un punto successivo a un dato.

Sia F una superficie, ovvero un ramo di curva algebrica, piana o gobba, e sia A un suo punto s^{plo}. Applicata ad A una trasformazione quadratica, F si muti in una nuova varietà Φ_1, su cui esista una varietà (piana: linea o punto) a_1 trasformata di A; dirò che a_1 *appartiene ad* F *essendovi successivo ad* A. Se a_1 è una linea, nel qual caso F è una superficie, *ogni punto di* a_1 *sarà pure successivo ad* A *su* F.

Su Φ_1 e sui punti di a_1 (linea o punto di Φ_1) si possono ripetere le stesse definizioni; dirò pure *successivi ad* A *di due posti su* F i punti e le linee di Φ_1 successivi ad a_1 secondo la definizione precedente; e dirò tali punti e linee successivi ad un punto A' di F successivo ad A quando sono successivi al punto A' (di a_1) di Φ_1. In modo analogo si definiranno i punti e le linee di F successive ad A di tre, quattro,... posti.

Una varietà tangente o secante Φ_1 in un punto trasformato di A si dirà *tangente o secante* F *nel corrispondente punto successivo ad* A. Analogamente si definiranno le varietà tangenti e secanti F in punti successivi di due, di tre,... posti ad A.

8. Una superficie F abbia in A punto s^{plo}. Sia V un punto qualunque dello spazio. La k^{ma} polare di V rispetto ad F ($k < s$) passa sempre per A avendovi in generale e almeno la multiplicità $s-k$: sia F_k questa polare.

Si applichi ad A una trasformazione quadratica avente la conica fondamentale spezzata in due rette per V. Sia V' il punto doppio della conica fondamentale dello spazio trasformato. Ad una punteggiata su una retta per V la trasformazione fa corrispondere una punteggiata proiettiva su una retta per V', corrispondendosi nella proiettività i punti V e V'; quindi il gruppo dei punti d'intersezione di una retta generica per V con la F_k si trasforma nel gruppo dei punti d'intersezione di una retta per V' colla polare k^{ma} di V' rispetto alla Φ_1 trasformata di F; quindi la trasformata Φ_1^k della F_k è contenuta nella k^{ma} polare di V' rispetto a Φ_1 (e nel caso che questa polare contenga altre parti, queste son coni di vertice V'). È facile verificare, ad es. col calcolo degli ordini, che Φ_1^k è soltanto una parte della suddetta polare sempre e solo quando, le rette per V in cui si spezza la conica fondamentale del primo spazio essendo scelte in modo generico, A è per F_k multiplo secondo un numero $> s-k$. Il teorema delle polari miste dà immediatamente che condizione necessaria e sufficiente perciò è che la retta AV sia generatrice più che $s-k^{pla}$ per il cono tangente in A a F (*).

(*) Con considerazioni analoghe il prof. SEGRE studia il comportamento delle prime polari nei punti successivi di F (l. c., pag. 34).

Come si vedrà, ogni volta che dovremo richiamare queste considerazioni, questa condizione non sarà soddisfatta.

9. Nel seguito applicherò soltanto trasformazioni quadratiche a conica fondamentale spezzata in due rette che supporrò distinte, ma potrebbero anche essere coincidenti. Effettuando trasformazioni successive supporrò inoltre il punto doppio della conica fondamentale della prima trasformazione scelto in modo generico, e quelli delle trasformazioni successive coincidenti ciascuno col punto doppio della conica fondamentale dello spazio trasformato rispetto alla trasformazione precedente. Indicherò, come sopra, con V, V', V'',... questi punti.

10. La superficie F abbia in A punto s^{plo}. Applicata ad A una trasformazione quadratica (n.° 9) la F si trasformi nella superficie Φ_1, su cui ad A corrispondano punti non tutti s^{pli}; ma esista almeno un punto A' trasformato di A, s^{plo} per Φ_1. La linea trasformata di A si comporrà di rette per A' (n.° 1).

Distinguerò due casi:

1.° La linea a_1 trasformata di A su Φ_1 si compone di più rette per A'. Si consideri la p^{ma} polare di V' rispetto a Φ_1 e sia Φ_1^p; essa taglia il piano di a_1 (che passa per V'), fuori della conica fondamentale della trasformazione, secondo una curva a_1^p, composta di $s-p$ rette (quando ogni retta sia contata con conveniente multiplicità) per A', polare di V' rispetto alla intersezione di Φ_1 col piano di a_1 (il fascio a_1 le cui rette siano contate ciascuna con conveniente multiplicità). Si supponga di far assumere a p tutti i valori (intieri) fra 1 e $s-1$ (inclusi gli estremi); una stessa retta del fascio A' non potrà appartenere simultaneamente ad a_1 e a tutte le a_1^p (essendo ora escluso che a_1 si riduca ad una sola retta contata s volte); e poichè a_1^{s-1} si compone di una sola retta, esiste certamente una superficie Φ_1^p ($p=0, 1,\ldots, s-2$; $\Phi_1^0\equiv\Phi_1$) che sega Φ_1^{s-1} sul piano di a_1 — e fuori della conica fondamentale — nel solo punto A'. Sia Φ_1^p questa superficie; per A' passa l'intersezione di Φ_1^p e Φ_1^{s-1}, senza passarvi con una parte giacente sul piano di a_1. Ma Φ_1^p e Φ_1^{s-1} sono le trasformate delle polari F_p e F_{s-1} di V rispetto a F ($F_0\equiv F$) (n.° 8); dunque *A' è successivo ad A sull' intersezione di F_p e F_{s-1}*.

2.° La linea a_1 trasformata di A su Φ_1 si riduce ad una sola retta per A', di multiplicità $s'<s$. Il piano $a_1 V'$ è piano tangente a Φ_1 in tutti i punti di a_1 diversi da A' e dagli altri possibili punti s^{pli} di Φ_1 su a_1. Conti esso come $s'-k$ fra i piani tangenti a Φ_1 nei punti generici di a_1. La super-

ficie Φ_1^k, k^{ma} polare di V' rispetto a Φ_1, avrà a_1 come retta $s' - k^{pla}$ e nei punti generici di essa avrà $a_1 V'$ come unico piano tangente; avrà inoltre A' come punto $s - k^{plo}$. La superficie Φ_1^{s-1}, $s - 1^{ma}$ polare di V' rispetto a Φ_1, passerà invece semplicemente per a_1 senza avervi il piano $a_1 V'$ come piano tangente in punti non appartenenti alla conica fondamentale della trasformazione. La multiplicità di un punto generico di a_1 nell'intersezione di Φ_1^k e Φ_1^{s-1} è adunque $s' - k$ mentre la multiplicità di A' nell'intersezione medesima è $\geqq s - k$. Ricordando adunque che Φ_1^{s-1} e Φ_1^k sono le trasformate delle polari di ugual indice F_{s-1} e F_k di V rispetto ad F per la trasformazione applicata ad A, si ha che *A' è successivo ad A sull'intersezione di F_k e F_{s-1}*. (Anche qui potrebbe essere $k = 0$; allora $\Phi_1^0 \equiv \Phi_1$, $F_0 \equiv F$.)

I risultati precedenti sono evidentemente applicabili al caso in cui alla superficie F si sostituisca una sua qualunque trasformata dopo una serie di trasformazioni quadratiche (del n.° 9). Quindi:

Sopra una superficie F si fissi una qualunque successione di punti A, A', A'',..., $A^{(r)}$, tutti s^{pli} per F; si trasformi F per mezzo di una successione di trasformazioni quadratiche applicate ad A, A',..., $A^{(r-1)}$, giungendo infine ad una superficie Φ_r su cui $A^{(r)}$ è punto effettivo; per $A^{(r)}$ passano una o più linee di Φ_r corrispondenti ad A per la trasformazione prodotto delle successive trasformazioni effettuate. Ad $A^{(r)}$ siano successive su Φ_r una o più rette di multiplicità minore di s, e su queste, fuori delle linee trasformate di A sunnominate, un punto s^{plo} $A^{(r+1)}$. Sia F_{s-1} la polare $s - 1^{ma}$ di un punto generico V rispetto a F; esiste sempre un'altra polare F_p di V rispetto ad F $(0 \leqq p < s - 1)$ che interseca F_{s-1} secondo una linea di cui A, A', A'',..., $A^{(r+1)}$ sono punti successivi.

Osservazione. Condizione essenziale dei precedenti ragionamenti è che a_1 si componga di rette passanti per A' — ovvero di parti irreduttibili di cui una sola (che però può esser multipla) passi per A' — e che A' abbia per Φ_1 multiplicità maggiore di quella dei punti generici di ciascuna parte di a_1 passante per A'; non è essenziale che la multiplicità di A' sia uguale a quella di A. A questo caso più generale si estendono adunque immediatamente i precedenti risultati; al numero s basterà sostituire la multiplicità di A' nell'intersezione di Φ_1 colla retta $A' V'$.

11. Nell'ultimo enunciato del numero precedente si può supporre, in particolare, che $A, A', A'', \ldots, A^{(r)}$ si succedano su un ramo di sezione piana di F. Si faccia variare il piano secante in modo che assuma tutte le posizioni possibili per A, od anche soltanto per una retta passante per A, e non

appartenente al cono tangente in A ad F. Se per tutte le sezioni piane generiche (fra queste) si verificasse che $A^{(r)}$ avesse come successivo un fascio di rette, e su una retta di tal fascio esistesse un punto $A^{(r+1)}$ di multiplicità superiore a quella generica di essa, corrispondentemente ad ogni sezione piana dovrebbe esistere una coppia di superficie F_{s-1} e F_k, la cui intersezione avrebbe almeno i punti A, A',..., $A^{(r)}$ comuni con la detta sezione piana; ma, essendo i numeri s e k interi minori od al più uguali alla multiplicità di A su F, il numero di queste coppie di superficie F_{s-1} e F_k è finito, onde non può la detta proprietà verificarsi per tutte le sezioni piane considerate.

Se si ha riguardo al fatto che ad un punto di una linea multipla di una superficie, il quale non abbia per la superficie multiplicità maggiore dei punti generici della linea è sempre successivo sulla superficie un fascio di rette il cui centro sta sulla suddetta linea multipla, si conchiude che *su una sezione piana generica di una superficie, passante per un punto multiplo della superficie medesima, e successivamente a questo punto, esistono solo punti che non hanno multiplicità maggiore dei punti generici delle linee successive cui appartengono*; *e queste linee, eccezione fatta per la prima, sono tutte rette e non contengono punti di multiplicità maggiore della generica, ciascuna fuori della linea che la precede.* Le sezioni piane eccezionali passano per particolari generatrici (in numero finito) del cono tangente alla superficie nel punto multiplo considerato.

12. La superficie F abbia in A punto s^{plo}. Un piano generico per A sega F secondo una curva piana f avente in A punto s^{plo}. È noto che è finito il numero dei punti s^{pli} di f successivi ad A (*). Ma ogni punto s^{plo} di F successivo ad A ed appartenente a detto piano secante dà luogo ad un punto s^{plo} di f; dunque *se si considera un punto generico A' successivo ad A su F, un punto generico successivo a questo su F, e così via, la successione di quelli fra questi punti che sono s^{pli} per F è finita. — A questo riguardo si comportano come generici i punti successivi di una sezione piana generica.*

Ciò posto, ad A sia successiva su F una retta s^{pla} a'; su a' si considerino due punti: A'_1 fissato comunque purchè fuori dell'eventuale linea s^{pla} di F per A, ed A'_2 scelto in modo generico su a'. Ad A'_1 e ad A'_2 siano successive rispettivamente le rette s^{ple} a_1'' e a_2''; sia A''_{11} un punto fissato ad arbitrio su a_1'', purchè fuori di a' (cioè, considerati a_1'' e A''_{11} su una superficie Φ_2, trasformata di F dopo le due trasformazioni successive applicate

(*) Cfr. le citazioni al principio della Memoria.

l'una ad A e l'altra ad A'_1, A''_{11} non stia sull'incontro di a_1'' colla linea trasformata di a'); sia inoltre A''_{12} un punto generico di a_1'', e A_2'' il punto di a_2'' su un piano π_1 generico per $A\,A'_2$. Analogamente, ad A''_{11}, A''_{12}, A_2'' siano successive su F rispettivamente le rette s^{ple} a_{11}''', a_{12}''', a_2''' su cui si fissino i punti A'''_{111}, A'''_{112}, A_{12}''', A_2''' definiti in modo analogo ai precedenti punti A''_{11}, A''_{12}, A_2'' — cioè in modo che A'''_{111} sia fissato ad arbitrio su a'''_{11} purchè fuori di a''_1, A'''_{112} sia generico su a'''_{11}, A'''_{12} sia su a'''_{12} e su un piano π_2 generico per A'_1 e A''_{12}, A_2''' sia l'intersezione di a_2''' con π_1 — e così via. Dopo un numero finito di operazioni si giungerà ad una retta s^{pla} $a_2^{(r)}$, al cui punto $A_2^{(r)}$ situato su π_1 non è successiva una retta s^{pla}. Ma i punti A', A'',... non possono essere più che s^{pli}; tutti quelli che appartengono a linee s^{ple} sono adunque s-planari; ed, in particolare, ad $A_2^{(r)}$ saranno successive più rette distinte (costituenti un fascio il cui centro è su $a_2^{(r)}$) ovvero una sola retta di multiplicità $< s$ e lungo la quale il piano fondamentale dell'ultima trasformazione è tangente ad F.

Si supponga che i punti A'_1, A''_{11}, ..., $A^{(r)}_{11\ldots 11}$ siano stati scelti in modo che all'ultimo di essi sia ancora successiva una retta s^{pla}. Allora fra i punti $A^{(r)}_{11\ldots 11}$, $A^{(r)}_{11\ldots 12}$, $A^{(r)}_{11\ldots 2}$, ..., $A_2^{(r)}$ ne esistono certamente due consecutivi (nell' ordine in cui qui sono scritti) tali che al primo è successiva una retta s^{pla}, al secondo una o più rette di multiplicità minore. Indicherò con $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$ e con $\mathbf{A}_2^{(r)}$ rispettivamente questi due punti. Per la legge seguita nella scelta dei punti A successivi, esiste un punto $A_{1\ldots}^{(r-t)}$ $(t \leqq r)$ a cui $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$ e $\mathbf{A}_2^{(r)}$ sono entrambi successivi, senza esserlo entrambi a punti successivi a questo; indicherò con $\mathbf{A}^{(r-t)}$ questo punto. (Se $t = r$, $\mathbf{A}_{12}^{(r)} \equiv A_{12}^{(r)}$, $\mathbf{A}_2^{(r)} \equiv A_2^{(r)}$, $\mathbf{A}^{(r-t)} \equiv A$.) $\mathbf{A}^{(r-t)}$ sta coi punti che lo seguono precedendo $\mathbf{A}_2^{(r)}$ e con $\mathbf{A}_2^{(r)}$ stesso, su un piano $\pi_{(r-t+1)}$, generico per $\mathbf{A}^{(r-t)}$, ed $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$ sta col punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ che lo precede essendo immediatamente successivo ad $\mathbf{A}^{(r-t)}$ (e coi punti successivi ad $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ e precedenti $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$) su uno stesso piano π_{r-t+2} generico per $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$. Indicherò con $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ questo punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$; e in generale con $\mathbf{A}_{12}^{(q)}$ i punti della successione cui appartiene $\mathbf{A}_{12}^{(r)}$, e con $\mathbf{A}_2^{(q)}$ i punti della successione cui appartiene $\mathbf{A}_2^{(r)}$.

I punti A si ottengono su altrettante superficie (contando due volte le superficie su cui stanno le coppie di punti $A^{(q)}_{11\ldots 1}$, $A^{(q)}_{11\ldots 2}$) trasformate di F con convenienti successioni di trasformazioni quadratiche, che supporremo scelte come si è detto al n.° 9. Rappresenterò colla lettera Φ una qualunque di queste superficie, apponendovi i medesimi indici e apici del punto A che vi si considera; sarà $\Phi^{(q)}_{11\ldots 11} \equiv \Phi^{(q)}_{11\ldots 12}$; dovendo parlare di questa superficie senza considerarvi in particolare uno dei punti $A^{(q)}_{11\ldots 11}$, $A^{(q)}_{11\ldots 12}$ la indicherò con $\Phi'^{(q)}_{11\ldots 1}$. Ciascuna superficie Φ appartiene ad uno spazio in cui esiste un determinato punto V; a questo punto si apporranno gli stessi apici e indici che alla superficie. Per quanto riguarda i punti indicati colle lettere $\mathbf{A}$, si indicheranno le superficie corrispondenti con le lettere $\mathbf{F}$ e i corrispondenti punti V con le lettere $\mathbf{V}$ seguendo la stessa legge precedente per gli indici e gli apici; infine indicherò con $\mathbf{a}^{(q)}_{12}$ e $\mathbf{a}^{(q)}_{2}$ le rette su cui stanno rispettivamente i punti $\mathbf{A}^{(q)}_{12}$ e $\mathbf{A}^{(q)}_{2}$, con $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ quella su cui stanno $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_{1}$ e $\mathbf{A}^{(r-t+1)}_{2}$ e con $\mathbf{a}^{(r+1)}_{12}$, $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ le linee successive rispettivamente ad $\mathbf{A}^{(r)}_{12}$ e ad $\mathbf{A}^{(r)}_{2}$. (La prima sarà una retta s^{pla}, la seconda una o più rette di un fascio, di multiplicità $< s$.)

Distinguo due casi:

1.° $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ si compone di più rette distinte. — Si considerino le polari p^{me} $(p = 0,\ 1, \ldots,\ s-1)$ dei punti $V^{(q)}_{j}$ (*) rispetto alle corrispondenti $\Phi^{(q)}_{j}$ e siano $\Phi^{(q)p}_{j}$; sia poi F_p la p^{ma} polare di V rispetto a F. Poichè V non è sul cono (piano) tangente a F in A, Φ'^{p} è la trasformata di F_p mediante la trasformazione applicata ad A (n.° 8); e poichè a' è s^{pla}, V' non è sul cono tangente a Φ' in alcun punto di a' (fuori della conica fondamentale della trasformazione); V' è adunque, rispetto ad A'_1 e ad A'_2, nelle stesse condizioni di V rispetto ad A. Ripetendo quest'osservazione si giunge a vedere che tutti i punti $\mathbf{V}^{(q)}_{j}$ $(q = r-t+1,\ r-t+2, \ldots,\ r;\ j = 12,\ 2)$ sono fuori dei coni tangenti rispettivamente alle $\mathbf{F}^{(q)}_{j}$ nei punti delle $\mathbf{a}^{(q)}_{j}$ non appartenenti alle coniche fondamentali delle trasformazioni, e che le $\mathbf{F}^{(q+1)p}_{j}$ sono le trasformate di F_p per le corrispondenti successioni di trasformazioni; queste $\mathbf{F}^{(q+1)p}_{j}$ sono quindi pure le trasformate di $\mathbf{F}^{(r-t)p}$ e di $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$. Inoltre le $\mathbf{F}^{(q)p}_{j}$ passano per le rispettive rette $\mathbf{a}^{(q)}_{j}$ colla multiplicità $s-p$ e la $\mathbf{F}^{(r+1)p}_{12}$ passa per $\mathbf{a}^{(r+1)}_{12}$ colla stessa multiplicità $s-p$; quanto alla $\mathbf{F}^{(r+1)p}_{2}$, essa taglia il piano di $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ fuori della conica fondamentale della trasformazione secondo la linea (fascio di rette concentrico ad $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$) p^{ma} polare di $\mathbf{V}^{(r+1)}_{2}$ rispetto all'intersezione di questo piano colla $\mathbf{F}^{(r+1)}_{2}$ (il fascio $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$ le cui rette siano contate con convenienti multiplicità).

Per un'osservazione fatta al n.° 10 — 1.° caso — non tutte le $\mathbf{F}^{(r+1)p}_{2}$ $(0 \leq p < s-1)$ passano per la retta d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r+1)s-1}_{2}$ col piano di $\mathbf{a}^{(r+1)}_{2}$; si fissi un valore di p per cui ciò non avvenga; questo valore indicherò ancora con p. La multiplicità d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ e $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$

(*) Coll'indice j rappresento uno qualunque dei gruppi di indici $1\ldots 11$, $1\ldots 12$, $1\ldots 1, \ldots, 2$.

in un punto generico $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ della $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ è (n.° 4):

$$t(s-p)\ (*),$$

mentre quella delle stesse superficie in $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ è:

$$\geqq (t+1)(s-p).$$

Adunque $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$ e $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ s'intersecano, oltre che secondo la $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ e secondo altre linee non passanti per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$, secondo una linea C per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$. Ma, pel modo onde sono stati scelti i punti A'_1, $A''_{11}, \ldots$, $A^{(r)}_{11\ldots1}$, pel punto $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ non passa altra linea generata dalle trasformazioni successive (cioè altra trasformata di A) che $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$; quindi C è trasformata di una curva appartenente all'intersezione di F_p e F_{s-1}.

Nella serie dei punti A, A'_1, $A''_{11}, \ldots$, $A^{(r)}_{11\ldots1}$ precedentemente definita, esiste sempre, in questo primo caso, un punto $A^{(r-t+1)}_{11\ldots}$ $(0 < t \leqq r)$ tale che i punti successivi A, $A'_1, \ldots$ $A^{(r-t+1)}_{11\ldots}$ appartengono tutti alla linea d'intersezione di F_{s-1} con una conveniente F_p.

2.° $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ si riduce ad una sola retta di multiplicità $s' < s$. — Ho provato al n.° 11 che, se, come noi supponiamo, il piano π_{r-t+1} è generico per $\mathbf{A}^{(r-t)}$, sulla $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ non esistono punti di multiplicità maggiore di s' (fuori di $\mathbf{a}_2^{(r)}$ e della conica fondamentale della trasformazione); in particolare non sarà più che s'^{plo} il punto $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ in cui $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ è incontrata dal piano π_{r-t+1}. Il piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ è ora tangente alla $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$ in tutti i punti di $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ fuori di $\mathbf{a}_2^{(r)}$; supporrò che esso conti come $s'-k\ (k < s')$ fra i piani tangenti a $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$ nel punto $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ (**).

(*) Questa è precisamente la detta multiplicità d'intersezione poichè il piano π_{r-t+1} non è tangente in $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ alla linea d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ e di $\mathbf{F}^{(r-t+1)p}$ (che, per la parte passante per un punto generico della $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$, si riduce a questa retta); ad ogni modo a noi basterebbe affermare che la detta multiplicità è $\leqq t(s-p)$.

(**) È facile provare che, per una scelta generica di π_{r-t+1}, questo vale lo stesso che dire che sia $s'-k$ la multiplicità del piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ nel fascio dei piani tangenti a $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$ nei punti generici di $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ (cioè fuori di $\mathbf{a}_2^{(r)}$ e della conica fondamentale); infatti si supponga che quest'ultima multiplicità sia $s'-k_1$; se $k_1 \neq k$, dovrà essere $k_1 > k$. Sia $\mathbf{\Psi}^{(r+1)}$ la polare k_1^{ma} di $\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ rispetto a $\mathbf{F}_2^{(r+1)}$; questa polare avrà $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ come retta $s'-k_1^{pla}$ e il punto $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ avrà multiplicità $> s'-k_1$ su di essa (cfr. n.° 8). Ma la $\mathbf{\Psi}^{(r+1)}$ è la trasformata della F_{k_1}, k_1^{ma} polare di V rispetto ad F; adunque F_{k_1} avrà, nella fatta ipotesi, successivamente al punto $\mathbf{A}_2^{(r)}$ una retta su cui si trova un punto di multiplicità maggiore della sua generica. Secondo il n.° 11 questo non può verificarsi se π_{r-t+1} è generico.

Consideriamo le polari k^{me} e $s-1^{me}$ dei punti $V_j^{(q)}$ rispetto alle corrispondenti $\Phi_j^{(q)}$ e siano rispettivamente rappresentate coi simboli $\Phi_j^{(q)k}$, $\Phi_j^{(q)s-1}$, e coi simboli analoghi siano rappresentate le polari dei punti $\mathbf{V}$ rispetto alle $\mathbf{F}$ corrispondenti; siano poi F_k e F_{s-1} rispettivamente la polare k^{ma} e la $s-1^{ma}$ di V rispetto ad F. Reggono qui tutte le cose dette in generale per le $\Phi_j^{(q)p}$ a proposito del caso precedente. Di più per la $\mathbf{F}_2^{(r+1)k}$ abbiamo che essa ha la retta $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ come $s'-k^{pla}$ e in $\mathbf{A}_2^{(r+1)}$ (*) ha il piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\,\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ come unico piano tangente; e per la $\mathbf{F}_2^{(r+1)s-1}$ che essa passa semplicemente per la $\mathbf{a}_2^{(r+1)}$ senza avervi il piano $\mathbf{a}_2^{(r+1)}\,\mathbf{V}_2^{(r+1)}$ tangente fuori della conica fondamentale. E poichè le $\mathbf{F}_j^{(q)k}$, $\mathbf{F}_j^{(q)s-1}$ sono le trasformate di $\mathbf{F}^{(r-t+1)k}$ e di $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$, la multiplicità d'intersezione di $\mathbf{F}^{(r-t+1)k}$ con $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ in $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$, punto generico di $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ è:

$$t(s-k)+s'-k\,,$$

mentre quella delle stesse superficie in $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$ è:

$$\geqq (t+1)(s-k).$$

Adunque, anche in questo caso le due superficie $\mathbf{F}^{(r-t+1)k}$, $\mathbf{F}^{(r-t+1)s-1}$ s'intersecano, oltre che secondo la $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ e secondo altre linee non passanti per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$, secondo una linea C passante per $\mathbf{A}_1^{(r-t+1)}$. Come nel caso precedente si giunge ora ad enunciare che *anche in questo secondo caso esiste nella serie dei punti $A, A'_1, \ldots, A_{41\ldots1}^{(r)}$ un punto $A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ $(0<t\leqq r)$ tale che i punti successivi $A, A'_1, \ldots, A_{11\ldots}^{(r-t+1)}$ appartengono tutti alla linea d'intersezione di F_{s-1} con una conveniente F_p $(0\leqq p<s-1)$.*

Importa di rilevare che F_{s-1} e F_p sono polari rispetto ad F del punto V assegnato a priori fuori del cono tangente ad F in A.

Anche qui, come al n.° 10, si può supporre che, come superficie F, oggetto delle considerazioni precedenti, si assuma la trasformata di una superficie data F dopo una successione di trasformazioni quadratiche (del n.° 9). Quindi:

Sopra una superficie F si fissi una qualunque successione di punti $A, A', A'', \ldots, A^{(r)}$ (**) tutti s^{pli} per F, tale che ad $A^{(r)}$ sia successiva una serie di punti $A^{(r+1)}, \ldots$ s^{pli} per F, ed appartenenti a rette (successive) s^{ple} per F senza che mai due di essi appartengano ad una medesima di queste rette; si supponga che la seconda successione contenga un numero di punti mag-

(*) Od anche nei punti generici; cfr. nota prec.

(**) Non occorre dire che la r ha ora significato differente che nelle linee precedenti.

giore di quello dei punti s^{pli} *di* F *successivi ad* $A^{(r)}$ *e giacenti su un piano generico per* $A^{(r)}$ (*). *Sia* F_{s-1} *la* $s - 1^{ma}$ *polare di un punto generico* V *rispetto ad* F*; esiste sempre un'altra polare* F_p *di* V *rispetto ad* F $(0 \leq p < s-1)$ *che interseca* F_{s-1} *secondo una linea di cui* $A, A', \ldots, A^{(r)}, A^{(r+1)}$ *sono pnnti successivi.*

13. *Osservazione.* Si è precedentemente supposto che ad $A^{(r)}_{11\ldots 1}$ fosse successiva una retta s^{pla}. Gli stessi ragionamenti condurrebbero a risultati analoghi se si supponesse che ad $A^{(r)}_{11\ldots 1}$ fosse successiva una sola retta di multiplicità $s'' < s$, essendo del resto s'' qualunque nel primo dei due casi precedentemente distinti, $> s'$ — ovvero $= s'$ e tale che il numero analogo a k vi sia $k_1 < k$ —, nel secondo.

In altri casi i ragionamenti precedenti sono capaci d'applicazione; rilevo quello in cui si supponesse $a^{(r)}_{11\ldots}$ e con essa $A^{(r)}_{11\ldots}$ di multiplicità $< s$. Basterebbe allora in quanto precede considerare i punti $A^{(r-1)}$ in luogo degli $A^{(r)}$ e pei due punti della serie $A^{(r-1)}_{11\ldots 11}, A^{(r-1)}_{11\ldots 12}, A^{(r-1)}_{11\ldots 2}, \ldots, A^{(r-1)}_{2}$ analoghi ad $\mathbf{A}^{(r)}_{12}$ e ad $\mathbf{A}_2^{(r)}$ ragionare sul primo come sopra si è ragionato sul secondo, e sul secondo come sopra sul primo. Si giungerebbe allora al risultato che il punto $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ (così chiamando ancora l'analogo del punto $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ del numero precedente) appartiene alla linea d'intersezione di F_{s-1} con una conveniente F_p. Ma questo non è possibile se $\mathbf{A}_2^{(r-t+1)}$ è punto generico della linea $\mathbf{a}^{(r-t+1)}$ cui appartiene. Si conchiude, tenendo anche presente il risultato del n.° 11, che *se il punto* A *è* s^{plo} *su una superficie* F *e al punto* A *sono successivi sulla sezione piana di* F *generica (passante per esso)* ν *punti* s^{pli}, *ogni successione di punti di* F *il cui primo punto sia* A *contiene* ALMENO ν *punti* s^{pli} *(necessariamente consecutivi);* e *ogni successione* GENERICA *di tali punti contiene* PRECISAMENTE ν *punti* s^{pli}.

14. Su una superficie F d'ordine dato n si consideri un punto s^{plo} A ed una successione di punti s^{pli} di cui A sia il primo: $A, A', \ldots$; e si supponga che mai due di questi punti stiano sulla stessa linea s^{pla} passante per A, nè sulla stessa linea (retta) s^{pla} successiva ad A; sia r tale che $A^{(r)}$ ovvero un punto successivo ad $A^{(r)}$ (immediatamente o non) nella successione $A, A', \ldots$ non stia, col punto che immediatamente lo precede, sulla stessa retta succes-

(*) Applicando la proposizione del numero seguente si ha che questa ipotesi equivale all'altra che *la seconda successione contenga un numero di punti maggiore di quello dei punti* s^{pli} *di* F *successivi ad* $A^{(r)}$ *ed appartenenti ad un ramo generico tracciato su* F *e che passi per* $A^{(r)}$.

siva ad A. Dopo quanto precede è facile assegnare un limite superiore per il numero r.

Di fatto, nelle presenti ipotesi, fissati n e r, risulta fissato un numero r_1 (*) tale che, se esiste una serie di più di r_1 punti successivi ad $A^{(r)}$ ed s^{pli} per F, esiste sempre una superficie $F_p\,(0 \leqq p < s-1)$ (**), che interseca F_{s-1} secondo una linea di cui una parte C irreduttibile passa pei punti successivi $A, A', \ldots, A^{(r)}$. Il numero $r + r_1$ cresce con r; se quindi si determina un limite superiore al numero dei punti $A, A', \ldots$ che possono stare su C risulta determinato per $r + r_1$ un limite, per modo che, se la successione $A, A' \ldots$ contiene un numero di punti superiore od uguale a questo limite, r ha per limite superiore quello suddetto del numero dei punti $A, A', \ldots$ che stanno su C; se la successione $A, A', \ldots$ contiene un minor numero di punti, è questo il limite superiore di r.

Ciò posto, l'ordine C sarà:

$$m \leqq (n-p)(n-s+1) \leqq n\,(n-s+1).$$

Sia ora O un punto generico dello spazio, cioè tale che non appartenga al cono tangente a F in A, nè al cono tangente a F condotto da un punto generico fissato ad arbitrio di C, nè alla $A\,V$. Da O si proietti C e sia Γ il cono proiettante; esso interseca F secondo una linea C_1 d'ordine:

$$m\,n = m_1.$$

In conseguenza delle ipotesi fatte tutte le linee di F successive ad A su cui stanno $A', A'', \ldots$ sono rette e ciascuna (salvo quelle per A') è appoggiata ad una immediatamente precedente; lo stesso avviene per le linee di Γ successive ad A, poichè ogni punto $A^{(i)}$ ha in Γ la multiplicità generica della linea di Γ successiva ad A cui appartiene; basta, per persuadersene, osservare che, in caso contrario esisterebbero (n.° 10 e relativa osservazione) due polari

(*) Se il punto di cui si parla, che non sta col precedente sulla stessa retta successiva ad A, sta su una retta successiva ad A, di multiplicità $< s$, $r + r_1$ è il posto di questo punto nella successione; quindi l'esistenza degli r_1 punti di cui si parla nel testo non è allora una condizione.

(**) Si può notare che si potrebbe supporre senz'altro $p = 0$. Infatti, essendo C d'ordine $m \leqq n\,(n-s+1)$ (cfr. le linee seguenti del testo), quando r sia superiore ad un certo limite, C deve giacere interamente su F, poichè ha in A riunite almeno $r\,s$ intersezioni con F. (Pel computo delle intersezioni di una curva e di una superficie in un punto partendo dai caratteri dei loro punti successivi, cfr. Segre, pag. 9-11.)

di V rispetto a Γ che s' intersecherebbero secondo una linea passante per A, A', ..., $A^{(i)}$, il che è assurdo poichè Γ è un cono ed A e A' non appartengono ad una stessa generatrice. Adunque, poichè Γ e F non si toccano in A, non hanno comune alcuna linea successiva ad A cui appartengano punti della successione A, A, ... Infine, pel modo in cui si è scelto O, Γ e F non si toccano secondo una linea.

Segue che per $A, A', \ldots, A^{(r)}$ passano una o più parti di C_1, ciascuna di multiplicità $< s$, mentre nei punti A, A', ..., Γ e F, hanno multiplicità d'intersezione $\geqq s$, (per A', ... queste multiplicità coincidono coi numeri S del n.° 5). Se quindi si considera la curva C_2 composta di tutte le parti di C_1 contate ciascuna una volta sola, questa curva passerà con punti multipli per $A, A', \ldots, A^{(r)}$. Ma, se m_2 è l'ordine di C_2,

$$m_2 \leqq m_1;$$

si può quindi assegnare [n.° 3 (*)] un limite superiore (funzione della sola m_2 e della multiplicità di A su C_2) al numero di questi punti. Il numero r ha adunque un limite superiore assegnato (che può considerarsi come funzione della sola n e di s).

Risulta così provato che la successione dei punti $A, A', \ldots$ dianzi definita ha un termine, a meno che esista un numero r (inferiore necessariamente al suddetto limite) tale che i punti successivi ad $A^{(r)}$ stiano ciascuno col precedente su una stessa linea (retta) successiva ad A. L'esame di questo caso si farà nel paragrafo seguente.

(*) Per la validità dei risultati di questo numero nel caso presente ricordo quanto dissi nella nota relativa al n.° 5. Aggiungo che si può evitare l'applicazione del teorema di cui là si parla. Basta, per vero, osservare che nel § 2 e nei paragrafi seguenti si può, alla trasformazione quadratica considerata, sostituire la trasformazione quadratica speciale (suo caso particolare) mantenendo fisso un punto della retta doppia fondamentale, come nel presente paragrafo si teneva fisso il punto doppio della conica fondamentale. Si può, se ciò è del caso, assumere su ogni retta doppia fondamentale, due differenti punti come punti V nel senso del § 2 e in quello del paragrafo presente, restando questo fisso nelle trasformazioni successive, e variando quello per le trasformazioni successive stesse, per modo che lo si potrà scegliere in modo sufficientemente generico perchè si possano applicare i ragionamenti del § 2.

§ 5.

15. *Su una linea a di una superficie F, di multiplicità $< s$ per essa, esiste un numero finito di punti successivi s^{pli} per F.* Sia, di fatto, A un punto s^{plo} di F su a. Ogni superficie F_1 passante per a e che non tocchi F lungo a sega F secondo una linea composta di a contata un certo numero di volte e di una linea residua t passante per A. Sia inoltre il punto A semplice per a; si potrà fare in modo che F_1 passi per A colla multiplicità dei punti generici di a su essa, ad es con punto semplice, e che non vi sia tangente ad F. Se allora su a sono successivi ad A altri punti s^{pli} per F, la linea t passa per A e per tutti questi punti (§ 3).

La superficie F_1 può ora essere il cono che proietta a da un punto convenientemente generico dello spazio. La linea t ha allora un ordine assegnato. Le linee t ed a, entrambe di ordine assegnato, hanno comune solo un numero finito di punti successivi ad A (non è questo altro che un caso particolare del teorema del § 2); adunque è finito il numero dei punti s^{pli} di F su a, successivi ad A, punto semplice di a.

Quando A fosse multiplo per a basterebbe trasformare dapprima la F con la trasformazione che muta a in una nuova curva su cui ad A corrispondono uno o più punti semplici (per la curva)

16. Prima di passare all'analisi del caso residuo enunciato alla fine del n.° 14, ritorniamo un momento su quello già studiato.

Dall'ipotesi costante che mai, nella successione dei punti A, due punti appartengano ad una stessa linea s^{pla}, segue immediatamente che non è sufficiente la proposizione del n.° 10 a cui si faccia seguire il ragionamento del n.° 14 solo quando, a cominciare da un certo, tutti i punti della successione appartengano a rette s^{ple} successive (e non ad altre linee s^{ple}) della superficie. Orbene per questo caso si può dimostrare che il numero dei punti della successione è finito, evitando la ricerca del n.° 12 (*), nel modo seguente:

Sia $A^{(r)}$ detto punto o un punto della serie ad esso successivo; si può supporre che per $A^{(r)}$, e quindi pei punti successivi, non passino altre linee multiple di F che le dette rette s^{ple}. (Per $A^{(r)}$ passerebbero tali linee se $A^{(r)}$

(*) Risulta con cio semplificato anche il ragionamento del n.° 14, perchè solo quando sia necessario ricorrere al n.° 12 si debbono considerare punti della successione A, A', ..., $A^{(r)}$, ... successivi ad $A^{(r)}$ per provare il passaggio di C per $A^{(r)}$.

stesse su una linea multipla di F per A, di multiplicità $< s$; ora, pel numero prec., questo caso si può escludere assumendo r convenientemente grande.) Ciò posto, sia $a^{(t)}$ la retta s^{pla} per $A^{(t)}$ $(t \geqq r)$. Si consideri una superficie qualunque che passi per A e per tutte le rette $a^{(t)}$, ad es. la polare F_p di V rispetto alla F, di indice $p > 0$ e $\leqq s-1$; la multiplicità d'intersezione di F e F_p in $A^{(r)}$ è un numero assegnabile ν. Sono ora possibili due ipotesi: 1.° La linea C d'intersezione di F e F_p passa per $A^{(r)}$; poichè r si può assumere grande a piacere, si può applicare a questa C il ragionamento del n.° 14. — 2.° Detta linea non passa per $A^{(r)}$; allora essa non passerà neanche per alcun punto successivo ad $A^{(r)}$. La multiplicità d'intersezione di F e F_p in un punto generico di $a^{(r+1)}$ è $\nu - s(s-p)$ e tale è allora pure per la loro multiplicità d'intersezione in $A^{(r+1)}$, per cui non passa ora altra linea comune a F e F_p. In modo analogo la multiplicità d'intersezione di F e F_p in $A^{(r+2)}, \ldots, A^{(r+i)}, \ldots$ è rispettivamente $\nu - 2s(s-p), \ldots, \nu - is(s-p), \ldots$ Ma questa multiplicità d'intersezione non può divenir negativa; dunque è impossibile che i cresca oltre ogni limite.

17. Sullo stesso concetto di quella del numero precedente, quantunque meno semplice, è fondata la dimostrazione che segue, pel caso che rimane da trattare.

La successione di punti s^{pli} di F: $A, A', \ldots$ sia tale che i punti successivi ad $A^{(r)}$ stiano ciascuno col precedente su una stessa retta successiva ad A. Sia $a^{(r)}$ la retta cui appartiene $A^{(r)}$; sarà anche $A^{(r+1)}$ un punto di $a^{(r)}$; quindi, per un'ipotesi fatta costantemente, $a^{(r)}$ avrà multiplicità $s' < s$. Lo stesso si dovrà dire per tutte le rette sostegni di più punti A. Pel numero 15 su ciascuna di queste rette sta un numero finito di punti A. Si deve quindi supporre che tutti i punti A successivi ad $A^{(r)}$ siano uniplanari, perchè se, p. es., non lo fosse $A^{(r)}$, non lo sarebbe nessuno dei punti successivi su $a^{(r)}$, e successivamente all'ultimo non si potrebbe quindi più avere un punto s^{plo} che stesse con esse su una stessa trasformata di A.

Ciò posto, a cominciare dal punto $A^{(r)}$ modificheremo così i simboli relativi alla considerata successione di punti:

Siano $A^{(r)}, A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \ldots, A_{h_r}^{(r)} \equiv A^{(r+1)}$ i punti della successione appartenenti ad $a^{(r)}$ ($A_1^{(r)}$ sarà il precedente $A^{(r+1)}$). Fatta eccezione pel primo, per ognuno di questi punti passa, oltre la $a^{(r)}$, una retta successiva al punto che lo precede immediatamente, e non passano altre linee multiple per F, effettive ovvero successive ad A, se, come si può sempre supporre, per $A^{(r)}$ non passano altre linee multiple per F poichè $A^{(r)}$ e i punti successivi sono uniplanari — cfr. l'analoga affermazione nel n.° preced.). Indicherò quelle rette rispettivamente con $a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \ldots, a_{h_r}^{(r)} \equiv a^{(r+1)}$. Siano poi $A^{(r+1)}, A_1^{(r+1)}, A_2^{(r+1)}, \ldots, A_{h_{r+1}}^{(r+1)} \equiv A^{(r+2)}$ i punti della successione appartenenti ad $a^{(r+1)}$, e $a_1^{(r+1)}, a_2^{(r+1)}, \ldots, a_{h_{r+1}}^{(r+1)} \equiv a^{(r+2)}$ le rette diverse da $a^{(r+1)}$ passanti rispettivamente per questi punti, escluso il primo. Come pei punti $A_j^{(r)}$, non passano per questi punti $A_j^{(r+1)}$ altre linee di F successive ad A. Analogamente si indicheranno i punti di $a^{(r+2)}$ e le rette di F per essi, e così via.

Sia $s_j^{(i+1)}$ la multiplicità di $a_j^{(r+i)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$ (e può, per particolari valori di i e j, essere $s_j^{(i+1)} = s$; per $j = 0$ è sempre $s^{(i+1)} < s$, come già si disse) e sia $V_j^{(r+i)}$ il punto doppio della conica fondamentale della trasformazione applicata ad $A_j^{(r+i)}$ (sarà $V_{h_{r+i}}^{(r+i)} \equiv V^{(r+i+1)}$). I piani $V_j^{(r+i)} a_j^{(r+i)}$ e $V_j^{(r+i)} a^{(r+i)}$ sono tangenti ad F rispettivamente lungo $a_j^{(r+i)}$ e lungo $a^{(r+i)}$, eccezion fatta pei piani $V_j^{(r+i)} a_j^{(r+i)}$ $(0 < j < h_{r+i})$ per cui fosse $s_j^{(i+1)} = s$. Contino questi piani rispettivamente come $s_j^{(i+1)} - k_j^{(i)}$ e come $s^{(i+1)} - k^{(i)}$ fra i piani tangenti ad F nei punti generici di $a_j^{(r+i)}$ e di $a^{(r+i)}$ (nel caso in cui non si abbia contatto sarà corrispondentemente $s_j^{(i+1)} = k_j^{(i)} = s$); si ha necessariamente $0 \leqq k_j^{(i)} \leqq s$.

Si supponga che la successione dei punti A si protragga in modo che esistano numeri i $\left(\text{e} \sum_{p=r}^{p=r+i} h_p\right)$ sufficientemente grandi perchè le considerazioni seguenti possano farsi; esistano cioè fra questi numeri di quelli superiori (essi e quindi i successivi) a taluni limiti inferiori assegnabili; l'ipotesi contraria equivarebbe ad ammettere assegnato un limite superiore al numero dei punti della successione, onde non avrebbe più luogo la presente ricerca sull'esistenza di un tal limite.

Lasciando per ora indeterminato il numero $k < s$, considero le polari F_{s-1} e F_k di V rispetto ad F e distinguo due casi: 1.° L'intersezione di F_{s-1} e F_k passa per $A_1^{(r)}$; 2.° Questo fatto non si verifica.

Al primo caso si applicano immediatamente i ragionamenti del n.° 14, i quali danno per r un limite superiore.

Quanto al secondo, abbiano $\Phi_j^{(r+i)s-1}$ e $\Phi_j^{(r+i)k}$ significati analoghi a quelli delle analoghe Φ dei n^{i} 10 e seg.; siano inoltre indicati cogli stessi simboli con cui si rappresentano le linee a e i punti A, i loro corrispondenti su queste Φ. F_{s-1} passa semplicemente per le $a_j^{(r+i)}$ $(j \geqq 0)$ e pei punti A, senza esservi tangente ai piani $V_j^{(r+i)} a_j^{(r+i)}$, $V_j^{(r+i)} a^{(r+i)}$; F_k può invece passare per le rette $a_j^{(r+i)}$ con multiplicità diverse (sempre $\leqq s - k$) essendovi o non tangente ai suddetti piani; passerà però sempre pei punti A con multiplicità

$s-k$, senza esservi tangente a detti piani, per le $a^{(r+i)}$ per cui $k^{(i)}=k$ con multiplicità $s^{(i+1)}-k$, avendovi come unico piano tangente il piano $V^{(r+i)}a^{(r+i)} \equiv V_1^{(r+i)}a^{(r+i)} \equiv \ldots \equiv V_{h_{r+i}}^{(r+i)}a^{(r+i)}$ e per le $a_j^{(r+i)}$ per cui $k_j^{(i)}=k$ con multiplicità $s_j^{(i+1)}-k$, avendovi come unico piano tangente il piano $V_j^{(r+i)}a_j^{(r+i)}$.

Crescendo convenientemente i (e basta supporre che possa divenire $i \geqq s^2$), è evidente che esistono sempre una retta $a^{(r+i)}$ e una retta $a_\mu^{(r+i+\lambda)}$ per cui $k^{(i)}=k_\mu^{(i+\lambda)}$ e $s^{(i+1)} \geqq s_\mu^{(i+\lambda+1)}$; sarà necessariamente $k^{(i)}$, $s^{(i+1)}$, $s_\mu^{(i+\lambda+1)}<s$. Assumendo il punto $A^{(r)}$ sulla prima di queste rette, si potrà indicare con k questo numero, e con $a^{(r)}$ la prima retta cui appartiene; si potrà cioè porre $i=0$. Si fissi per il k precedentemente lasciato indeterminato il valore ora fissato, allora $\Phi_1^{(r)s-1}$ passa per $A^{(r)}$ e per $a^{(r)}$ semplicemente, e senza esservi tangente a $V^{(r)}a^{(r)}$, e $\Phi_1^{(r)k}$ passa con multiplicità $s'-k$ per $a^{(r)}$ avendovi come unico piano tangente $V_1^{(r)}a^{(r)}$ e passa per $A_1^{(r)}$ con multiplicità $s-k$. Quindi la multiplicità d'intersezione di $\Phi_1^{(r)s-1}$, $\Phi_1^{(r)k}$ in un punto generico di $a^{(r)}$ è $x=s'-k$; quella in un punto generico di $a_1^{(r)}$ sia x_1. Se ora la curva intersezione di F_{s-1} e F_k non passa per $A_1^{(r)}$, la multiplicità d'intersezione di $\Phi_1^{(r)s-1}$ e $\Phi_1^{(r)k}$ in $A_1^{(r)}$ è x_1+x; quindi quella di $\Phi_2^{(r)s-1}$, $\Phi_2^{(r)k}$ in un punto generico di $a_2^{(r)}$ è:

$$x_2=x+x_1-s+k.$$

In generale, si indichi con $x_j^{(i)}$ la multiplicità d'intersezione di $\Phi_j^{(r+i)s-1}$, $\Phi_j^{(r+i)k}$ in un punto generico di $a_j^{(r+i)}$: $x^{(i)}$ sarà pure la multiplicità d'intersezione di $\Phi_j^{(r+i)s-1}$, $\Phi_j^{(r+i)k}$ in un punto generico di $a^{(r+i)}$; in modo analogo a quello in cui si è ottenuto x_2 si ha:

$$x_j=x_1+(x-s+k)(j-1), \tag{1}$$

e in particolare:

$$x' \equiv x_{h_r}=x_1+(x-s+k)(h_r-1). \tag{2}$$

In seguito:

$$x'_1=x+x'-s+k,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x'_j=x+(x'-s+k)j,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x'' \equiv x'_{h_{r+1}}=x+(x'-s+k)h_{r+1}.$$

In generale:

$$x_j^{(i-1)}=x^{(i-2)}+(x^{(i-1)}-s+k)j, \tag{3}$$

$$x^{(i)}=x^{(i-2)}+(x^{(i-1)}-s+k)h_{r+i-1}. \tag{4}$$

Da queste equazioni (e, per $i = 1$, dalle equivalenti (1) e (2)) si deduce che le disuguaglianze:

$$x^{(i)} \lesseqgtr x_j^{(i-1)}, \qquad x_j^{(i-1)} \lesseqgtr x^{(i-2)}, \qquad x^{(i)} \lesseqgtr x^{(i-2)}, \qquad x^{(i-1)} \lesseqgtr s - k, \tag{5}$$

sussistono simultaneamente scegliendo in tutte lo stesso segno (per $i = 1$ si deve sostituire x a $x^{(i-2)}$).

Ricordiamo ora che, per ipotesi, esiste una coppia di valori per i e j — $i = \lambda$, $j = \mu$ — tali che $x_\mu^{(\lambda)} = s_\mu^{(\lambda+1)} - k \leqq s' - k < s - k$.

Sono qui possibili due ipotesi:

1.° $\qquad x^{(\lambda+1)} \leqq x_\mu^{(\lambda)} \qquad$ onde $\qquad x^{(\lambda+1)} < s - k$.

Le (5) danno tosto:

$$x^{(\lambda)} \leqq s - k.$$

2.° $\qquad x^{(\lambda+1)} > x_\mu^{(\lambda)}$.

Le (5) danno:

$$x^{(\lambda-1)} < x_\mu^{(\lambda)} \qquad \text{onde} \qquad x^{(\lambda-1)} < s - k,$$

e:

$$x^{(\lambda)} > s - k, \qquad x^{(\lambda-2)} > x^{(\lambda)}.$$

Quindi:

$$x^{(\lambda-2)} > s - k,$$

da cui, per le (5),

$$x^{(\lambda-1)} > x^{(\lambda-3)} \qquad \text{onde} \qquad x^{(\lambda-3)} < s - k.$$

Proseguendo ad applicare le (5) si ottiene di qui:

$$x^{(\lambda-2)} < x^{(\lambda-4)}, \qquad x^{(\lambda-3)} > x^{(\lambda-5)}, \qquad x^{(\lambda-4)} < x^{(\lambda-6)}, \ldots;$$

ossia:

$$s - k > x^{(\lambda-1)} > x^{(\lambda-3)} > x^{(\lambda-5)} > \cdots \tag{6}$$

$$s - k < x^{(\lambda)} < x^{(\lambda-2)} < x^{(\lambda-4)} < x^{(\lambda-6)} < \cdots \tag{7}$$

Se λ è pari, e necessariamente > 0, poichè le (1) e (2) danno che per $\lambda = 0$ si verifica sempre il 1.° caso, il secondo gruppo di disuguaglianze contraddice al fatto che:

$$x < s - k.$$

Se λ è dispari le (3) e (4) danno ancora:

$$x^{(\lambda-2\nu+1)} > x_{h_{r+\lambda-2\nu-1}}^{(\lambda-2\nu)} > x_{h_{r+\lambda-2\nu-2}}^{(\lambda-2\nu)} > \cdots > x_1^{(\lambda-2\nu)} > x^{(\lambda-2\nu-1)} \qquad (\nu \geqq 0);$$

questo gruppo di disuguaglianze, postovi $\nu = 0$, insieme con le (6) dà luogo alla:

$$x_{\mu}^{(\lambda)} > x,$$

che contraddice all'ipotesi principale: il 2.° caso non può adunque verificarsi.

Raccogliendo si ha che, essendo $x_{\mu}^{(\lambda)} \leqq x$,

$$x^{(\lambda+1)} < s - k, \qquad x^{(\lambda)} \leqq s - k.$$

Da queste disuguaglianze, per le (5), si deduce:

$$x^{(\lambda+1)} < s - k, \qquad x^{(\lambda+2)} < s - k,$$

onde, per le (3) e (4):

$$x_j^{(\lambda+2+\varkappa)} < x_{j-1}^{(\lambda+2+\varkappa)}, \qquad (\varkappa \geqq 0).$$

Crescendo $\varkappa$ e j, queste x vanno dunque continuamente decrescendo; ma esse sono numeri essenzialmente interi e positivi, non nulli. I numeri $\varkappa$ e j $\left(\text{o meglio la somma } \sum_{p=r+\lambda+2}^{p=r+\lambda+2+\varkappa} h_p\right)$ ammettono dunque un limite superiore.

La serie dei punti A ha adunque un termine in ogni caso.

18. Da ciascuno dei ragionamenti precedenti sarebbe facile dedurre un valore numerico del limite di cui vi si parla; potrei dare io stesso tali valori, ma mi astengo dal farlo, credendoli troppo superiori al vero perchè possano presentare interesse e trovare altrove utile applicazione. Il lettore potrà in ogni caso ottenerli senza difficoltà.

Torino, Giugno 1897.