Ueber eine geodätische Aufgabe. Von Herrn Dr. *Julius Weingarten*.

Für die Auflösung kleinerer aus kürzesten Linien gebildeter Dreiecke einer krummen Oberfläche bietet, wie man weiss, die Betrachtung eines ebenen Dreiecks von gleichen Seiten grosse Vortheile, und ist die Entwicklung der Winkelunterschiede beider Dreiecke in speciellen Fällen Gegenstand mannigfaltiger Untersuchungen gewesen. Aber erst *Gauss* hat in den „*Disquisitiones circa superficies curvas*“ diese Entwicklung in allgemeiner und massgebender Weise behandelt, und die betreffenden Unterschiede durch Reihen dargestellt, deren Glieder nach seinen Vorschriften ohne Schwierigkeit gefunden werden können, während er selbst dieselben nur bis zur fünften Ordnung (excl.) mitgetheilt hat. In Beziehung auf ausgedehntere Anwendungen als diejenigen sind, welche *Gauss* beabsichtigte, erscheint es nothwendig, die Anzahl der Glieder dieser Reihen zu vergrössern, und die Glieder selbst in derjenigen Form darzustellen, welche *Gauss* nur für den Complex der Glieder bis zur dritten Ordnung (incl.) gegeben hat. Ehe ich jedoch zur Behandlung dieser Aufgabe übergehe, deren Lösung ich hier, durch anderweitige Geschäfte abgezogen, nur andeutungsweise geben will (wobei ich mir vorbehalte, an einem andern Orte über diese und ähnliche Fragen ausführlichere Untersuchungen zu veröffentlichen), muss ich einige Worte über die Bedingungen vorschicken, denen die Endformeln, welche geodätische Fragen der vorgelegten Art lösen, den *Gauss'schen* Principien gemäss unterworfen sein müssen.

Bekanntlich hat *Gauss* in seiner classischen Abhandlung die Theorie der krummen Flächen von einem neuen und fundamentalen Gesichtspunkte auffassen gelehrt, indem er diejenigen Eigenschaften derselben, welche von der durch die Gleichung einer Fläche gegebenen individuellen Form derselben abhängen, von denjenigen Eigenschaften trennt, welche bei der Formveränderung durch Abwicklung erhalten bleiben, mit anderen Worten: *Gauss* scheidet diejenigen Eigenschaften, welche durch die Gleichung einer speciellen Fläche gegeben werden, von denjenigen, welche nur die Kenntnisse der Coefficienten des Linienelements der zugehörigen Flächenklasse erfordern. Die Theorie der geodätischen Linien einer Fläche behandelt nur Eigenschaften der zweiten Art, und dürfen daher die Bestandtheile allgemeiner Endformeln, die sich auf Fragen dieser Theorie beziehen, nicht aus der

vorausgesetzten Kenntniss der Gleichung der betrachteten Fläche geschöpft, sondern müssen aus den Coefficienten des Linienelements gebildet werden, wenn anders diese Endformeln nicht werthlos sein sollen. Ich glaube diese Bedingungen um so mehr hervorheben zu müssen, als der Verfasser einer in neuerer Zeit erschienenen Abhandlung*), in welcher nach dem *Gauss'schen* Verfahren die oben erwähnten Winkelunterschiede eines allgemeinen aus geodätischen Linien gebildeten und eines ebenen Dreiecks eine Ordnung weiter als bei *Gauss* entwickelt werden, dadurch, dass er den *Gauss'schen* Grundgedanken völlig übersehen hat, sogar zu der Meinung veranlasst worden ist, eine Lücke der *Gauss'schen* Darstellung ausgefüllt, und eine Erweiterung derselben gegeben zu haben.

I.

Für die folgenden Entwicklungen ist die Einführung einer neuen bisher nur andeutungsweise behandelten Classe von Formen nothwendig, auf welche man bei der Transformation des Quadrates eines (allgemeinen) Linienelements durch die Einführung neuer Variabeln geführt wird. Hier wo nur geometrische Anwendungen auf die Theorie der krummen Flächen verfolgt werden, bei denen die Linienelemente durch quadratische Formen zweier Variabeln (dp und dq) gegeben sind, reicht es aus, diese Formen direct aus den von *Gauss* gegebenen Grundlagen zu entwickeln.

Die von *Gauss* unter dem Namen Krümmungsmass in die Wissenschaft eingeführte Quantität ist bekanntlich eine Function des Ortes in einer krummen Fläche, die sich aus den Coefficienten des Linienelements und den ersten und zweiten Differentialquotienten desselben zusammensetzen lässt, und zwar stets in derselben Weise, welche specielle Form des Linienelements auch vorgelegt sei. Ist das Quadrat des Linienelements einer krummen Fläche gegeben durch

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2,$$

*) *P. A. Hansen*, geodätische Untersuchungen *№* I. Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1865.

so ist der Werth k des Krümmungsmasses

$$k = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{d \frac{F d \ln \sqrt{\frac{E}{G}} + \frac{dE}{dq} - \frac{dF}{dp}}{\sqrt{EG-F^2}} + \frac{d \frac{F d \ln \sqrt{\frac{G}{E}} + \frac{dG}{dp} - \frac{dF}{dq}}{\sqrt{EG-F^2}} \right\}$$

wovon man sich durch Vergleichung mit der *Gauss'schen* Formel leicht überzeugt. Verwandelt sich durch eine Substitution neuer Variabeln p' und q' die Grösse ds^2 in

$$E' dp'^2 + 2F' dp' dq' + G' dq'^2,$$

so giebt die rechte Seite der vorstehenden Formel von k durch Beifügung der Accente an die betreffenden Buchstaben wiederum den Werth k des Krümmungsmasses im Orte (p, q) resp. (p', q') der krummen Fläche. Es erscheint angemessen, dass solche aus den Coefficienten des Linienelementes und deren Ableitungen zusammengesetzten Formen, die (aus welcher Form des Linienelements auch gebildet) in demselben Ort einer krummen Oberfläche denselben Werth haben, mit einem besonderen Namen belegt werden, und ich will dieselben daher im Folgenden durch den Namen *Inflexenten* bezeichnen. Alsdann stehen der *Gauss'schen* Inflexente k noch eine unbegrenzte Anzahl anderer zur Seite, welche aus ihr nach einem sofort anzugebenden Schema abgeleitet werden können, von denen aber allgemein zu reden nur zwei unter einander unabhängige existiren können. Es ist nämlich leicht zu zeigen, dass wenn k eine Inflexente ist, auch die

$$h = \frac{E \frac{dk^2}{dq^2} - 2F \frac{dk}{dq} \frac{dk}{dp} + G \frac{dk^2}{dp^2}}{EG - F^2}$$

die Eigenschaft einer Inflexente besitzt. Sind ferner ϕ und ψ zwei Inflexenten, so sind auch die Grössen

$$\frac{1}{2} \frac{E \frac{d\phi}{dq} \frac{d\psi}{dq} - F \left(\frac{d\phi}{dp} \frac{d\psi}{dq} + \frac{d\phi}{dq} \frac{d\psi}{dp} \right) + G \frac{d\phi}{dp} \frac{d\psi}{dp}}{EG - F^2},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{d\phi}{dp} \frac{d\psi}{dq} - \frac{d\phi}{dp} \frac{d\psi}{dp}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ d \frac{\frac{E \frac{d\phi}{dq} - F \frac{d\phi}{dp}}{\sqrt{EG - F^2}}}{dq} + \frac{d \frac{G \frac{d\phi}{dp} - F \frac{d\phi}{dq}}{\sqrt{EG - F^2}}}{dp} \right\}$$

Inflexenten. Für die Anwendung auf die in der Einleitung bezeichnete Aufgabe ist zur Ermittlung der Glieder 4. Ordnung der zu entwickelnden Reihen der Winkelunterschiede

die Bildung folgender vier durch h, J_1, J_2, J_3 bezeichneten *Inflexenten* ausser der *Gauss'schen* k nothwendig:

$$\text{I. } \begin{cases} h = \frac{E \frac{dk^2}{dq^2} - 2F \frac{dk}{dp} \frac{dk}{dq} + G \frac{dk^2}{dp^2}}{EG - F^2} \\ J_1 = \frac{1}{2} \frac{E \frac{dk}{dq} \frac{dh}{dq} - F \left(\frac{dk}{dp} \frac{dh}{dq} + \frac{dk}{dq} \frac{dh}{dp} \right) + G \frac{dk}{dp} \frac{dh}{dp}}{EG - F^2} \\ J_2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{dh}{dp} \frac{dk}{dq} - \frac{dh}{dq} \frac{dk}{dp}}{\sqrt{EG - F^2}} \\ J_3 = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ d \frac{\frac{E \frac{dk}{dq} - F \frac{dk}{dp}}{\sqrt{EG - F^2}}}{dq} + \frac{d \frac{G \frac{dk}{dp} - F \frac{dk}{dq}}{\sqrt{EG - F^2}}}{dp} \right\} \end{cases}$$

II.

Zur Entwicklung der Werthe der Fläche und der Winkeldifferenzen eines allgemeinen aus geodätischen Linien zusammengesetzten Dreiecks bedient sich *Gauss* in den „Disquisitiones circa superficies curvas Art. XXIII.“ eines speciellen Systems von Variabeln p und q , welche die Eigenschaft haben, das Quadrat des Linienelements in der Form

$$ds^2 = n^2 dp^2 + dq^2$$

zu ergeben, und ausserdem für die Function n der Grössen p, q nach Potenzen von q die Reihe

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \dots$$

zu liefern. Die Functionen f, g, h etc. von p sind ferner entwickelt gedacht in die Reihen

$$f = f^0 + f^1 p + f^2 p^2 + \dots$$

$$g = g^0 + g^1 p + g^2 p^2 + \dots$$

$$h = h^0 + h^1 p + h^2 p^2 + \dots$$

dergestalt, dass f_0, f^1, g_0, g^1 etc. die Coefficienten der Entwicklung von n nach steigenden Potenzen der Variablen p und q darstellen.

Da in diesem Falle $E = n^2$, $F = 0$, $G = 1$, so bildet man leicht durch einfache Differentiation den Werth des Krümmungsmasses k der betrachteten Fläche in Form einer nach Potenzen von p , q fortschreitenden Reihe, deren Coefficienten durch $f^0, f', \dots$ ausgedrückt sind. Es ist jedoch

$$k = \alpha + rp + sq + \frac{1}{2}(lp^2 + 2l_1pq + l_2q^2) + \frac{1}{3!}(mp^3 + 3m_1p^2q + 3m_2pq^2 + m_3q^3) + \dots,$$

so wird

$$h = \frac{E \frac{dk^2}{dq^2} - 2F \frac{dk}{dp} \frac{dk}{dq} + G \frac{dk^2}{dp^2}}{EG - F^2} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2} q^2\right)^2 \frac{dk^2}{dq^2} + \frac{dk^2}{dp^2}}{\left(1 - \frac{\alpha}{2} q^2\right)^2}$$

$$= r^2 + s^2 + 2p(sl' + rl) + 2q(rl' + sl'') + p^2(l'^2 + l''^2 + sm_1 + rm)$$

$$+ 2pq(l'l'' + ll' + sm_2 + rm_1) + q^2(l'^2 + l''^2 + sm_3 + r(m_2 + \alpha r))$$

ferner:

$$J_1 = s(rl' + sl'') + r(sl' + rl) + \dots \text{etc.}$$

$$J_2 = s(sl' + rl) - r(rl' + sl'') + \dots \text{etc.}$$

$$J_3 = l'' + l + \dots \text{etc.}$$

Die Eckpunkte A, B, C des von Gauss betrachteten aus kürzesten Linien zusammengesetzten Dreiecks haben in der vorgelegten Fläche eine solche Lage, dass sie den Werthen $(0, 0)$, (p, q) , (p, q') der Variablen entsprechen. Bezeichnet man durch i_1, i_2, i_3 die Werthe der Inflectenten J_1, J_2, J_3 im Punkte A , ferner durch λ die Grösse $r^2 + s^2$ oder den Werth der Inflectente h im Punkte A , so ergeben die letzteren Gleichungen ohne Weiteres:

$$l = \frac{1}{\lambda^2} [r^2(2i_1 - i_3\lambda) + 2rsi_2 + \lambda(i_3\lambda - i_1)]$$

$$l' = \frac{1}{\lambda^2} [-(r^2 - s^2)i_2 + rs(2i_1 - i_3\lambda)]$$

$$l'' = \frac{1}{\lambda^2} [s^2(2i_1 - i_3\lambda) - 2rsi_2 + \lambda(i_3\lambda - i_1)]$$

wodurch die Bestimmung der Coefficienten der Glieder 2. Ordnung in k gegeben ist. Die ähnliche Bestimmung für die Glieder 3. Ordnung erforderte die Bildung einer neuen Gruppe von vier Inflectenten, und ist nicht schwer auszuführen. Für den Fall jedoch, dass man nur die Anwendung auf eine Rotationsfläche beabsichtigt, bedient man sich leichter eines Verfahrens, welches weiter unten angegeben werden wird.

etwas bequemer, die Coefficienten der Reihe für k direct in die Rechnung zu führen, weil diese Reihe selbst in den folgenden Rechnungen in den Vordergrund tritt, während diejenige für n nur in den zwei ersten Gliedern zur Geltung kommt. Es sei also:

Betrachtet man jetzt ein ebenes Dreieck, welches die Seiten a, b, c des in Rede stehenden Dreiecks ABC besitzt, und seien A^*, B^*, C^* die Winkel desselben, so hat man nach Gauss (disqu. Art. XXVI.) für die Grössen A^* etc. die Reihen

$$A^* = A - \sigma \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{15}f''p^2 + \frac{1}{5}g_1p(q + q') \\ &+ \frac{1}{5}h^0(3q^2 - 2qq' + 3q'^2) \\ &+ \frac{1}{360}f^{02}(4p^2 - 11q^2 + 14qq' - 11q'^2) \end{aligned} \right\}$$

und ähnliche für B^*, C^* . In denselben sind unter σ der Werth der Fläche des Dreiecks ABC , unter α, β, γ die Werthe der Inflectente k in den Punkten A, B, C , und unter f'', g', h^0, f_0 die betreffenden Coefficienten der Entwicklung der Grösse n zu verstehen. Nach der oben angenommenen Bezeichnungsweise ist einzuführen:

$$f_0 = -\frac{\alpha}{2}$$

$$f'' = -\frac{1}{4}l$$

$$g' = -\frac{1}{6}l'$$

$$h^0 = \frac{\alpha^2}{24} - \frac{l''}{24}$$

wodurch man erhält:

$$A^* = A - \sigma \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma - \frac{1}{120}l''(q - q')^2 \\ &- \frac{1}{60}(lp^2 + 2l'pq + l''q^2) - \frac{1}{60}(lp^2 + 2l'pq' + l''q'^2) \\ &+ \frac{\alpha^2}{360}(4p^2 - 2q^2 + 8qq' - 2q'^2). \end{aligned} \right\}$$

In diese Gleichung sind die ermittelten Werthe von l , l' , l'' einzuführen, und ferner die Beziehungen der Grössen p , q , q' zu den Seiten a , b , c des Dreiecks ABC , nämlich:

$$p = c \sin B, \quad q = c \cos B, \quad q' = c \cos B - a, \\ p^2 + q^2 = c^2, \quad p^2 + q'^2 = b^2, \quad q - q' = a.$$

Diese Einführung würde die Endformeln in einer Form geben, welche die Grössen r und s mit sich führt. Die Elimination dieser geschieht jedoch leicht durch die folgenden, bis auf Glieder 2. Ordnung (excl.) genauen Gleichungen:

$$A^* = A - \frac{\sigma}{12} [2\alpha + \beta + \gamma] \\ + \frac{\sigma i_3}{120} \left[2 \frac{(\beta - \alpha)^2}{\lambda} + 2 \frac{(\gamma - \alpha)^2}{\lambda} + \frac{(\beta - \gamma)^2}{\lambda} \right] \\ - \frac{\sigma}{120} \left[2 \frac{(\beta - \alpha)(\mu - \lambda)}{\lambda} + 2 \frac{(\gamma - \alpha)(\nu - \lambda)}{\lambda} + \frac{(\beta - \gamma)(\mu - \nu)}{\lambda} \right] \\ - \frac{\sigma}{120} \frac{i_3 \lambda - i_1}{\lambda} [a^2 + 2b^2 + 2c^2] \\ - \frac{\sigma \alpha^2}{180} [b^2 + c^2 - 2a^2].$$

Diese Gleichung stellt den Winkel A^* bis auf Grössen 5. Ordnung (excl.) durch Werthe von Inflectenten dar, die aus den Coefficienten des Linienelements, durch welche Variable auch die Lage des Punktes einer Fläche gegeben sei, gebildet werden können. Es bedarf nicht der Erwähnung, dass für die Anwendung dieser Gleichung, die Lage des Punktes A in einer Stelle, für welche die Grössen r , s und also die Inflectente λ den Nullwerth annehmen, ausgeschlossen ist, da den Entwicklungen die Voraussetzung zu Grunde liegt, dass für hinreichend kleine Werthe von p und q der numerische Betrag von $\beta - \alpha$ etc. durch die Werthe $rp + sq$, etc. mit beliebiger Genauigkeit gegeben sei. Für solche ausnahmsweise Lagen bedarf es in den Entwicklungen kleiner

$$\beta - \alpha = rp + sq, \quad \gamma - \alpha = rp + sq', \quad \beta - \gamma = s(q - q')$$

und

$$\frac{1}{2} \lambda (\mu - \lambda) = i_1 (rp + sq) + i_2 (sp - rq) \\ \frac{1}{2} \lambda (\nu - \lambda) = i_1 (rp + sq') + i_2 (sp - rq') \\ \frac{1}{2} \lambda (\mu - \nu) = (i_1 s - i_2 r) (q - q')$$

in welchen letzteren Gleichungen λ , μ , ν die Werthe der Inflectente h in den Punkten A , B , C bezeichnen. Hiernach erhält man, durch eine kleine Rechnung, deren Ausführung der Mittheilung nicht bedarf:

Modificationen, die nicht allgemeinen, sondern nur den speziellen Bedingungen dieser Stellen gemäss, erledigt werden können.

III.

Die Ermittlung der Grössen A^* , B^* , C^* wird sehr erleichtert, wenn diejenige Fläche, für welche sie geschehen soll, zur Classe der auf eine Rotationsfläche abwickelbaren gehört. In diesem Falle sind die Inflectenten h , J_1 , J_2 , J_3 etc. Functionen von k allein, und die Bestimmung der Coefficienten der Reihenentwicklung von k lässt sich durch den Satz der unbestimmten Coefficienten einfach bewerkstelligen. Setzt man wie oben für k die Entwicklung

$$(1) \quad k = \alpha + rp + sq + \frac{1}{2} (lp^2 + 2l'pq + l''q^2) + \frac{1}{3!} (mp^3 + 3m_1p^2q + 3m_2pq^2 + m_3q^3) + \dots$$

voraus, so ist für eine beliebige Function von k :

$$(2) \quad F(k) = F(\alpha) + (rp + sq) F' + \frac{1}{2} [(lF' + r^2F'')p^2 + 2(l'F' + rsF'')pq + (l''F' + s^2F'')q^2],$$

wenn F' und F'' die betreffenden Derivirten der Function $F(k)$ für $k = \alpha$ bezeichnen.

Es seien nunmehr die Inflectenten $h = \varphi(k)$, $J_3 = \mathfrak{J}(k)$, so hat man nach der Definition dieser Grössen die Reihen:

$$\varphi(k) = r^2 + s^2 + 2p(sl' + rl) + 2q(rl' + sl'') + p^2(l'^2 + l''^2 + sm_1 + rm) \\ + 2pq(l'l'' + ll' + sm_2 + rm_1) + q^2(l''^2 + l'''^2 + sm_3 + r(m_2 + \alpha r)) + \dots \\ \mathfrak{J}(k) = l'' + l + p(m_2 + m) + q(m_3 + m_1 - \alpha s) + \dots$$

und aus diesen durch Coefficientenvergleichung:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & rl + sl' = \frac{1}{2} r \varphi' \\
 & sl'' + rl' = \frac{1}{2} s \varphi' \\
 & l + l'' = \mathfrak{J} \\
 & l^2 + l'^2 + sm_1 + rm = \frac{1}{2} (l \varphi' + r^2 \varphi'') \\
 & l' \mathfrak{J} + sm_2 + rm_1 = \frac{1}{2} (l' \varphi' + rs \varphi'') \\
 (4) \quad & l'^2 + l''^2 + sm_3 + rm_2 = \frac{1}{2} (l'' \varphi' + s^2 \varphi'') - \alpha r^2 \\
 & m_2 + m = r \mathfrak{J}' \\
 & m_3 + m_1 = s \mathfrak{J}' + \alpha s,
 \end{aligned}$$

in welchen Gleichungen $\varphi, \varphi', \varphi'', \mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$ die Werthe von $\varphi(k), \varphi'(k), \varphi''(k), \mathfrak{J}(k), \mathfrak{J}'(k)$ für $k = \alpha$ vorstellen. Von den letzten fünf Gleichungen ist immnr eine als Folge der vier übrigen zu betrachten, und zwar einer identischen Beziehung zwischen den Grössen $\varphi, \varphi', \varphi'', \mathfrak{J}, \mathfrak{J}', \alpha$ wegen.

Die Gleichungen (3) ergeben die Grössen l, l', l'' und alsdann die (4) die Werthe von m, m_1, m_2, m_3 . Für l, l', l'' ergibt sich:

$$F(k) = F(\alpha) + F'(rp + sq) + \frac{1}{2} F'' \left(\mathfrak{J} - \frac{\varphi'}{2} \right) (p^2 + q^2) + \frac{(rp + sq)^2}{2} \left[\frac{\varphi' - \mathfrak{J}}{\varphi} F' + F'' \right] + \dots$$

erhält, und die Function F der Differentialgleichung

$$\frac{\varphi' - \mathfrak{J}}{\varphi} F' + F'' = 0$$

gemäss bestimmt. Als dann ergibt sich bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & rp + sq = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{F'} - \frac{1}{2} \left(\mathfrak{J} - \frac{\varphi'}{2} \right) c^2 \\
 & rp + sp' = \frac{F(\gamma) - F(\alpha)}{F'} - \frac{1}{2} \left(\mathfrak{J} - \frac{\varphi'}{2} \right) b^2.
 \end{aligned}$$

IV.

Für die Anwendung auf das Rotationsellipsoid ist es am einfachsten, zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf demselben die reducirte Breite θ und die geographische Länge λ desselben einzuführen. Hierbei ergibt sich für das Linienelement die Gleichung

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= n^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + n^2 \cos^2 \theta d\lambda^2 \\
 &= E d\theta^2 + G d\lambda^2,
 \end{aligned}$$

$$l = \mathfrak{J} - \frac{\varphi'}{2} + \frac{\varphi' - \mathfrak{J}}{\varphi} r^2$$

$$l' = \frac{\varphi' - \mathfrak{J}}{\varphi} r s$$

$$l'' = \mathfrak{J} - \frac{\varphi'}{2} + \frac{\varphi' - \mathfrak{J}}{\varphi} s^2,$$

wie man auch aus den allgemeineren Formeln hätte finden können, wenn man bemerkt, dass für Rotationsflächen die Inflectente J_2 identisch verschwindet. Die hiernach leicht zu ermittelnden Werthe der Grössen m bedürfen hier nicht der weiteren Mittheilung. Will man die so gefundenen Werthe benutzen, um die von Gauss gegebenen Reihen für A^*, B^*, C^* eine Ordnung weiter auszuführen, als dies von Gauss geschehen ist, so bedarf man der Grössen

$$rp + sq \text{ und } rp + sq'$$

mit einer Genauigkeit bis zur dritten Ordnung (excl.). Man erreicht dies, indem man in die Formel (2) die Werthe von l, l', l'' einführt, wodurch man

wenn unter n die grosse Halbhaxe des Späroïds verstanden wird. Die Formel für das Krümmungsmass liefert aus den Coefficienten des Linienelements

$$k = \frac{1 - e^2}{n^2} \frac{1}{(1 - e^2 \cos^2 \theta)^2}$$

oder bis auf die niedrigsten Potenzen von e

$$k = \frac{1}{n^2} (1 + e^2 \cos 2\theta).$$

Daraus ergeben sich wiederum aus den Coefficienten des Linienelements durch eine einfache Rechnung:

$$h = \varphi(k) = \frac{4e^4}{n^6} \sin^2(2\theta)$$

$$J_3 = \mathfrak{J}(k) = \frac{4e^2}{n^4} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

ferner:

$$\frac{dh}{dk} = \varphi'(k) = -\frac{8e^2}{n^4} \cos(2\theta)$$

$$F(k) = \sin \theta, \quad F'(k) = -\frac{n^2}{4e^2} \frac{1}{\sin \theta}$$

und ebenso leicht die weiteren Derivirten dieser Functionen nach k . Bezeichnet man durch a, b, c die reducirten Breiten der Eckpunkte eines aus geodätischen Linien auf dem Rotationsellipsoid zusammengesetzten Dreiecks, so geben die Gleichungen (5) die folgenden Beziehungen:

$$rp + sq = \frac{4e^2}{n^2} (\sin a - \sin b) \sin a - \frac{2e^2}{n^4} \sin^2 a \cdot c^2$$

$$rp + sq' = \frac{4e^2}{n^2} (\sin a - \sin c) \sin a - \frac{2e^2}{n^4} \sin^2 a \cdot b^2,$$

welche in dieser Form in die von *Gauss* gegebenen, aber um eine Ordnung erweiterten Reihen substituirt werden müssen, wenn man vermeiden will, dass die Endformeln in der Nähe des Pols und Aequators des Ellipsoids, wo die Inflectente $\varphi(k)$ verschwindet, ihre Anwendbarkeit verlieren.

Zum Schlusse dieser Mittheilung sei es mir noch gestattet, mit Unterdrückung der leicht auszuführenden Zwischenrechnungen, die Endformeln für die Uebertragung eines sphäroidischen Dreiecks auf eine Kugel vom Radius der grossen Halbaxe des Späroids zu geben, durch welche die von Herrn *Hansen* (Geodätische Untersuchungen I. pag. 189) ersetzt werden müssen.

Sind A, B, C die Winkel eines sphäroidischen Dreiecks, dessen Seiten durch a, b, c bezeichnet sein mögen, $A + \delta A, B + \delta B, C + \delta C$ die Winkel eines sphärischen Dreiecks von denselben Seiten, welches einer Kugel, die mit einem Radius gleich der grösseren Halbaxe n des Ellipsoids beschrieben ist, angehört; sind ferner a, b, c die reducirten Breiten der Eckpunkte A, B, C des sphäroidischen Dreiecks, σ^* die Fläche desselben und e die Excentricität des Ellipsoids, so findet man für die Grösse δA folgenden Werth:

$$\begin{aligned} \delta A = & -\frac{\sigma}{12n^2} \left(e^2 + \frac{1}{4} e^4 \right) \left\{ 2 \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c \right\} \\ & -\frac{\sigma e^4}{16n^2} \left\{ 2 \cos^2 2a + \cos^2 2b + \cos^2 2c - \frac{4}{3} \right\} \\ & -\frac{\sigma e^2}{30n^2} \left\{ 2 (\sin a - \sin b)^2 + 2 (\sin c - \sin a)^2 + (\sin b - \sin c)^2 \right\} \\ & -\frac{\sigma e^2}{240n^4} \left\{ -a^2 + 7b^2 + 7c^2 \right\} \cos 2a \\ & -\frac{\sigma e^2}{480n^4} \left\{ 3a^2 + 3b^2 + 11c^2 \right\} \cos 2b \\ & -\frac{\sigma e^2}{480n^4} \left\{ 3a^2 + 11b^2 + 3c^2 \right\} \cos 2c \\ & +\frac{\sigma e^2}{60n^4} \left\{ a^2 + 2b^2 + 2c^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Werthe δB und δC ergeben sich aus Vorstehendem durch Buchstabenvertauschung. Es ist bemerkenswerth, dass die 3 verschiedenen Berechnungsweisen, welche *Gauss* für A^*, B^*, C^* gegeben hat, desgleichen die des Herrn *Hansen* nach dem Einsetzen der Coefficientenwerthe in die eine obige zusammenfallen.

Die oben gegebene Formel für δA ist genau bis auf Grössen 8. Ordnung (excl.), wenn man unter a, b, c und e Grössen 1. Ordnung versteht.

Dr. Julius Weingarten.

*) Wofür in der Anwendung auch die Fläche des sphärischen Dreiecks gesetzt werden darf.

Schreiben des Herrn *Alexander Palagi*, Directors der Sternwarte in Bologna, an den Herausgeber.

J'ai l'honneur de vous envoyer mon observation du Passage de *Mercur* sur le disque solaire du 5 (civil) du Novembre dernier, faite à l'équatorial de *Dollond* (ouverture $2\frac{1}{2}$ pouces):

Contact intérieur $21^h 45^m 54^s 0$ T. m. Bologne.
Contact externe $21 \ 48 \ 20,6 \ : \ : \ :$

Le ciel était couvert des nuages le matin, mais suffisamment serein pendant l'observation.

Bologne, 16 Décembre 1868.

Alexander Palagi,
Directeur de l'Observatoire.